

〈論 文〉

# 회전체 원판의 볼트구멍에 존재하는 모서리균열의 유한요소해석

한상배\* · 이진호\*\* · 김영진\*\*\*

(1993년 6월 2일 접수)

## Finite Element Analysis of a Rotating Disc with a Corner Crack Originating at the Bolt Holes

S. B. Han, J. H. Lee and Y. J. Kim

**Key Words :** Finite Element Analysis(유한요소해석), Rotating Disc(회전체 원판), Corner crack(모서리균열), Bolt Hole(볼트구멍)

### Abstract

The objective of this paper is to obtain stress intensity factor solutions for a corner crack originating at bolt holes in a rotating disc. Initially two-dimensional finite element analyses of a rotating disc with bolt holes are performed to determine the maximum stress region. Subsequently three-dimensional finite element analyses of a rotating disc with a corner crack originating at the bolt holes are performed with a variety of crack geometries. According to the numerical results, the maximum stress was observed at the point toward the disc center of bolt hole. The maximum stress intensity factor, with an increase in crack depth ratio, was observed at the surface of the plate due to the interference effect of corner crack and disc bore.

기 호 설 명		
$a$	: 모서리균열의 길이	$R_3$ : 원판 중심에서 볼트구멍 중심까지의 거리
$b$	: 모서리균열의 깊이	$t$ : 원판두께
$d$	: 볼트구멍의 지름	$\nu$ : 푸아송비
$E$	: 탄성계수	$\omega$ : 각속도
$E'$	: 탄성매개변수	$\phi$ : 타원 매개각
$F_I$	: Mode I 수정계수	$\Pi$ : 포텐셜에너지
$G$	: 에너지해방률	$\rho$ : 밀도
$K$	: 응력확대계수	$\sigma$ : 균열이 없는 회전체 원판 bore에서의 원주응력
$r$	: 원판 중심으로부터의 거리	$\sigma_\theta, \sigma_r$ : 거리 $r$ 일 때의 원주응력 및 반경방향응력
$R_1, R_2$	: 원판의 내반경 및 외반경	

\*한국타이어 중앙연구소 기초연구실

\*\*정회원, 육군사관학교 기계공학과

\*\*\*정회원, 성균관대학교 기계설계학과

### 1. 서 론

터보 기계류에서는 고속 회전부품이 널리 사용되

고 있다. 만일 가동중에 회전부품이 파손되면 막대한 재산상의 피해와 인명손실이 초래되며, 실제로 이같은 파손사례<sup>(1)</sup>가 다수 보고되고 있다. 회전부품의 파손은 주로 원판의 bore 및 볼트구멍과 같이 응력이 집중되는 부위에서 발생하는 결함에 의해서 이루어지며, 결함의 기하학적 형상은 원판표면과 구멍이 교차하는 부위에서 발생하는 모서리균열이 대부분이다. 이러한 형상에 대하여 정확한 응력확대계수(stress intensity factor : S.I.F.)  $K$ 값을 얻기 위해서는 3차원 응력해석이 요구되고 있다.

Cruse와 Besuner<sup>(2)</sup>는 경계적분법을 이용하여 회전체 원판내부의 볼트구멍에 하나의 모서리균열(corner crack)이 존재하는 경우에 대하여 피로균열성장률(fatigue crack growth rate)을 평가하는 파괴역학적 방법론을 제시하였다. 그러나, 이들의 해석은 곡면을 이루는 구멍의 기하학적인 형상에 대해서는 고려하지 않았다. Kobayashi 등<sup>(3)</sup>은 교대법(alternating method)을 이용하여 회전체 원판 bore에 존재하는 하나의 모서리균열에 대하여 균열형상비를 변화시켜가며 균열선단에서의  $K_I$ 값을 구하였다. 그러나 Kobayashi가 제시한 곡면수정계수(curvature correction factor)는 평판에서 구하였기 때문에 이 결과를 곡면에 적용하면 정확하지 않다.

Tan 등<sup>(4,5)</sup>은 경계적분법을 이용하여 회전체 원판의 bore에 하나의 모서리균열이 존재하는 경우에 대하여 균열형상비 변화에 따른 응력확대계수  $K$ 해석을 수행하였다. 그러나, 회전체 원판에서 실제 가장 높은 응력이 발생하는 볼트구멍 부위의 균열에 대한 파괴역학적인 연구는 그 실용적인 문제의 중요성에 비추어볼 때 보고된 사례가 미비한 실정이다.

본 연구에서는 회전체 원판의 수명예측 및 강도 평가를 위한 기초연구로서 볼트구멍에 존재하는 균열의 3차원 유한요소해석을 수행하고자 한다. 먼저 볼트구멍이 있는 회전체 원판의 최대 응력발생위치를 알아보기 위해 2차원 유한요소해석을 수행하였으며, 이어서 회전체 원판의 bore에 존재하는 모서리균열에 대한 해석을 수행하여 Tan<sup>(6)</sup>의 결과와 비교하였다. 끝으로 볼트구멍에 존재하는 모서리균열에 대하여  $K$ 해석을 수행하였다. 해석은 볼트구멍의 위치, 균열깊이비 및 균열형상비를 변화시켜가며 수행하였으며, 해석수단으로는 범용 패키지 프로그램 ABAQUS를 사용하였다.

## 2. 관련이론

### 2.1 회전체 원판에 작용하는 응력

Fig. 1과 같이 각속도  $\omega$ 로 회전하는 원판에 작용하는 원주방향응력(circumferential stress)  $\sigma_\theta$  및 반경방향응력(radial stress)  $\sigma_r$ 은 탄성학의 이론으로부터 평면응력조건하에서 다음과 같이 표시된다.

$$\sigma_\theta(r) = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left\{ R_2^2 + R_1^2 + \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right\} \tag{1}$$

$$\sigma_r(r) = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left\{ R_2^2 + R_1^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} - r^2 \right\} \tag{2}$$

여기서,  $\rho, \nu$ 는 재료의 밀도와 푸아송의 비이며,  $R_1$ 과  $R_2$ 는 원판의 내반경 및 외반경이다.

식(1)과 식(2)로부터 회전체 원판의 전영역에서 원주방향응력(circumferential stress)  $\sigma_\theta$ 가 반경방향응력(radial stress)  $\sigma_r$ 보다 크게 나타남을 알 수 있다.

### 2.1 응력확대계수의 계산

Parks<sup>(6)</sup>는 2차원 및 3차원 균열에 대한  $K$ 값을 계산하기 위하여 가상균열진전법(virtual crack extension method)을 제안하였으며 ABAQUS<sup>(7,8,9)</sup>를 비롯한 범용 유한요소 프로그램에서 널리 사용되고 있다. Fig. 2는 가상균열진전법을 도식적으로 나타

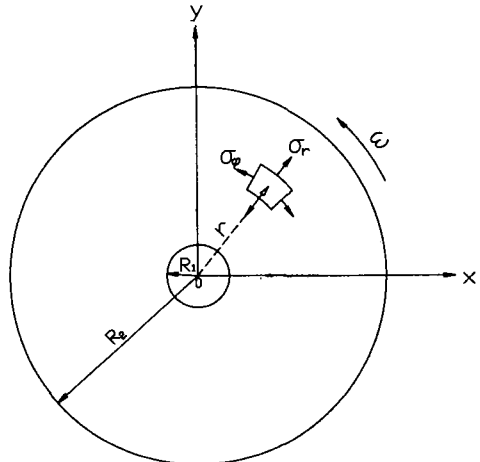


Fig. 1 Geometry of rotating disc

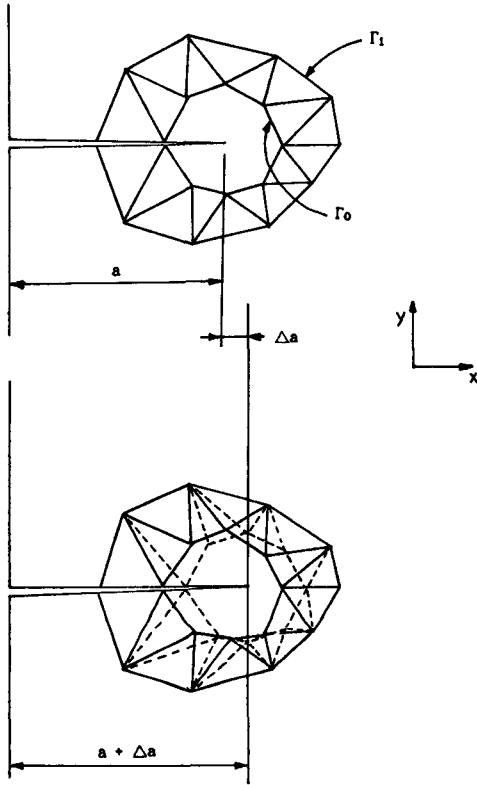


Fig. 2 Virtual crack extension in the direction of crack advance

낸 것으로서, 이 방법은 균열선단을 중심으로 하는 contour 내부 요소의 절점이동에 의한 강성행렬 (stiffness matrix) 변화로부터 에너지해방률을 얻는 방법이다. 결함이 존재하는 구조물의 유한요소해석을 통해 절점변위  $\{U\}$ , 절점력  $\{f\}$  및 강성행렬  $[K]$  이 얻어진다면 이로부터 포텐셜에너지  $\Pi$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Pi = \frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\} - \{U\} \{f\} \quad (3)$$

또한 형상의 변화에 따른 포텐셜에너지 변화량  $\delta\Pi$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\delta\Pi = \frac{1}{2} \{U\}^T [\delta K] \{U\} + \{\delta U\}^T ([K] \{U\} - \{f\}) - \{U\}^T \{\delta f\} \quad (4)$$

여기서 변위는 평형상태의 해이므로 들뜬 저항의 팔호안은 0이 되고, 균열이 하중을 받지 않는다면 세제항도 0이 되어 다음식이 얻어진다.

$$\delta\Pi = \frac{1}{2} \{U\}^T [\delta K] \{U\} \quad (5)$$

따라서 에너지해방률  $G$ 값은 다음과 같이 계산된다.

$$G = -\frac{d\Pi}{da} = -\frac{1}{2} \{U\}^T \frac{\partial K}{\partial a} \{U\} \quad (6)$$

위식에서  $\partial K / \partial a$ 는 단위균열진전에 따른 강성행렬의 변화를 나타내며, 경로  $\Gamma_0$  내의 모든 절점들만 미소거리  $\Delta a$ 만큼 이동시킴으로써 균열진전의 효과를 얻을 수 있다. 이때  $\Gamma_0$  내부와  $\Gamma_1$  외부의 강성행렬은 변화하지 않고  $\Gamma_0$ 와  $\Gamma_1$  밴드내의 요소들의 값만 변화하므로 이 값만 계산해 주면 된다. 따라서 이 방법은 균열길이 변화에 따른 에너지 변화가 균열선단을 둘러싼 2개의 경로 사이에 있는 요소들만에 의하여 구해지기 때문에 종래의 에너지해방률법처럼 2번 반복 계산하지 않아도 된다는 이점이 있다.

응력확대계수  $K$ 와 에너지해방률  $G$ 의 관계로부터 응력확대계수  $K$ 값은 다음과 같이 계산된다.

$$K = \sqrt{E' \cdot G} \quad (7)$$

여기서,

$$E' = \begin{cases} E & (\text{평면응력}) \\ \frac{E}{1-\nu^2} & (\text{평면변형률}) \end{cases}$$

### 3. 2차원 유한요소해석-응력집중부위에 대한 평가

회전체 원판에서 최대 응력집중이 발생하는 부위를 찾아내기 위해 볼트구멍의 위치 및 개수를 변화시키며 2차원 유한요소해석을 수행하였다.

#### 3.1 볼트구멍의 위치변화에 따른 회전체 원판 내부의 응력분포

볼트구멍이 회전체 원판의 응력분포에 미치는 영향을 검토하기 위한 해석을 수행하였다. Fig. 3은 회전체 원판의 기하학적 형상으로서,  $d/R_1 = 0.2$ 인 볼트구멍이 4개 존재한다고 가정하였으며,  $R_2/R_1 = 6$ 일 때 볼트구멍의 위치를  $R_3/R_1 = 2 \sim 4$ 까지 변화시키며 해석을 반복하였다. 원판의 재질은 Cr-Mo-V강으로 탄성계수 ( $E$ )는 205.8 GPa, 밀도 ( $\rho$ )는 7900 kg/m<sup>3</sup>, 푸아송비 ( $\nu$ )는 0.3이며, 각속도 ( $\omega$ )는 400 rad/sec이다. Fig. 4는 유한요소해석을 위한 요소망으로서, 대칭성을 이용하여 원판의 1/8만 모델

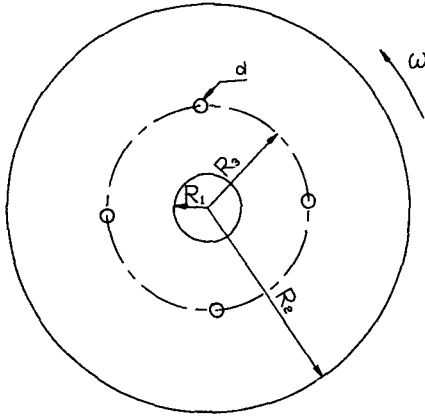


Fig. 3 Geometry of rotating disc with bolt holes

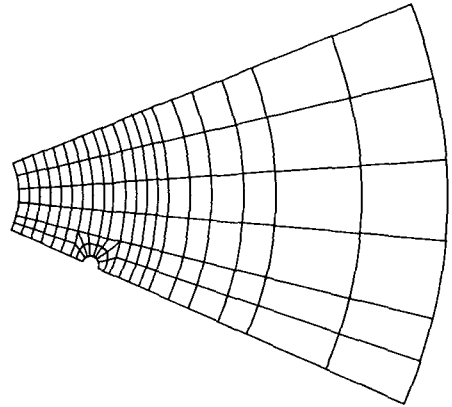


Fig. 4 Finite element mesh for a rotating disc with bolt holes

링하였다. 8-절점 등매개 요소(8-node isoparametric element)를 사용하였으며, 445개의 절점과 128개의 요소가 사용되어 전체 자유도(degree of freedom)는 890이다.

Fig. 5는 해석결과를 정리한 것으로 횡축은 거리를 무차원화한 값( $r/R_1$ )이며, 종축은 원주응력을 무차원화한 값( $\sigma_\phi/\sigma$ )이다. 여기서,  $\sigma_\phi$ 는 거리  $r$ 일 때의 원주응력이며,  $\sigma$ 는 회전체 원판 bore에서의 원주응력으로 식(1)로부터 다음과 같이 표시된다.

$$\sigma = \frac{3+\nu}{4} \rho \omega^2 \left\{ R_2^2 + \frac{1-\nu}{3+\nu} R_1^2 \right\} \quad (8)$$

해석결과로부터 볼트구멍 주위에 높은 원주응력이 발생함을 알 수 있다. 그러나, 볼트구멍의 위치가 원판의 중심에서 멀리 떨어져 있는( $R_3/R_1=4$ ) 경우에는 볼트구멍 주위에서의 응력이 bore에서의 응력보다 작게 나타났다.

### 3.2 볼트구멍의 개수변화에 따른 회전체 원판 내부의 응력분포

볼트구멍의 개수가 원판내부의 응력에 미치는 영향을 조사하기 위하여  $R_3/R_1=2$ 일때 볼트구멍의 개수가 4, 8, 12, 20인 경우에 대하여 해석을 반복하였다. 회전체 원판의 형상은 앞의 경우와 동일하다. Fig. 6은 해석결과를 정리한 것으로, 볼트구멍의 개수가 많아짐에 따라 볼트구멍 주위에서의 원주응력이 작아짐을 알 수 있다.

위의 두 해석결과로부터 응력은 볼트구멍 부위에서도 원판중심을 향하는 쪽에서 더 크게 나타남을 알 수 있다.

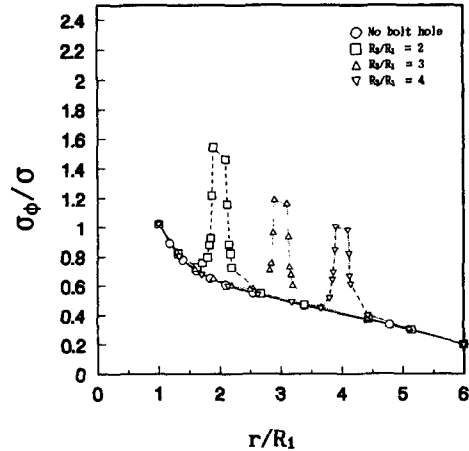


Fig. 5 Effect of bolt hole location on circumferential stress for a rotating disc

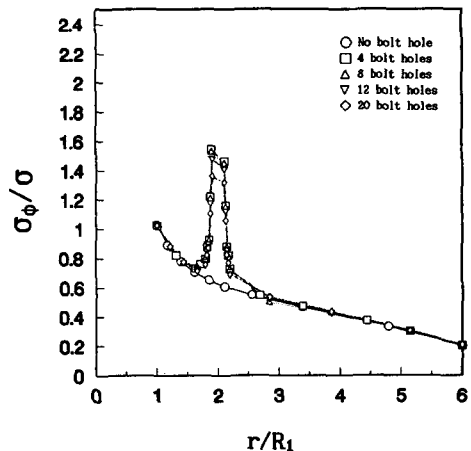


Fig. 6 Effect of bolt hole number on circumferential stress for a rotating disc

#### 4. 3차원 유한요소해석

회전체 원판에서는 원주응력이 반경방향응력보다 크게 나타나고, 2차원 유한요소해석 결과로부터 알 수 있듯이 원판중심쪽 볼트구멍에서 최대응력이 발생한다. 따라서, 본 연구에서는 회전체 원판의 볼트구멍에서 원판중심쪽으로 존재하는 모서리균열의 Mode I 응력확대계수  $K_I$ 에 대한 3차원 유한요소해석을 수행하였다.

##### 4.1 Bore에 존재하는 모서리균열

Fig. 7은 회전체 원판의 기하학적 형상으로서,  $R_2/R_1=6$ 이고,  $t/R_1=2$ 이다. 균열의 형태는 원판의 내경과 표면이 교차하는 부분에서 발생되는 1/4 타원형 모서리균열이며, 균열깊이비( $b/t$ )는 0.5이다. Fig. 8은 유한요소해석을 위한 요소망으로서,

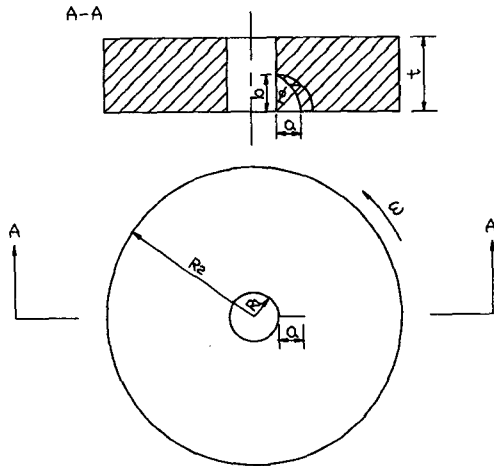


Fig. 7 Geometry of rotating disc with a quarter elliptical corner crack at bore

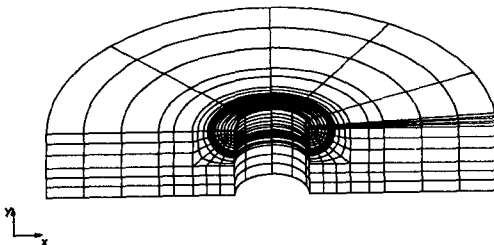


Fig. 8 Finite element mesh for a rotating disc with a quarter elliptical corner crack at bore

대칭성을 이용하여 원판의 1/2만 모델링하였다. 20-절점 등매개 요소(20-node isoparametric element)를 사용하였으며, 해석에는 5,413개의 절점과 1,080개의 요소가 사용되어 전체 자유도는 16,239이다.

Fig. 9는 균열깊이비( $b/t$ )가 0.5일 때 균열형상비( $a/b$ )가 각각 0.5, 0.75인 경우에 대한 해석결과를 도시한 것으로서, 횡축은 각도를 무차원화한 값( $2\phi/\pi$ )이며 종축은 원주응력에 의한 응력확대계수를 무차원화한 값( $F_I=K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ )이다. 여기서,  $F_I$ 은 Mode I 수정계수이고  $\sigma$ 는 식(8)로부터

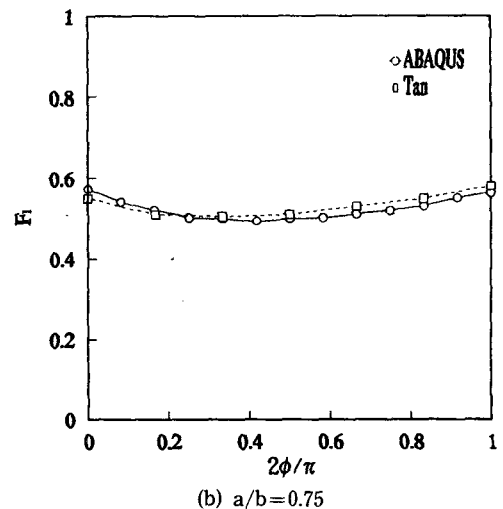
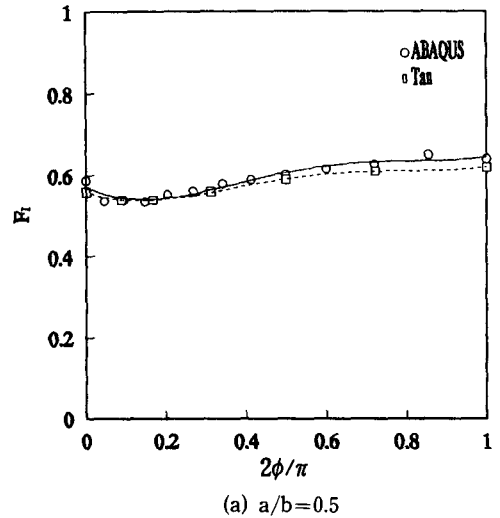


Fig. 9 Variation of stress intensity factor along front of a quarter elliptical crack in a rotating disc

계산되는 회전체 원판 bore에서의 원주응력이다. 균열형상비( $a/b$ )가 0.5일 때는 원판 표면( $\phi=90^\circ$ )에서 최대  $K$ 값이 나타났으며, 0.75일 때는 최대 응력확대계수값이 bore 표면( $\phi=0^\circ$ )에서 나타났다. 수치해석결과는 경계요소법으로 구한  $\text{Tan}^{(6)}$ 의 결과와 4% 이내에서 잘 일치하였다.

4.1 볼트구멍에 존재하는 표면균열

Fig. 10은 회전체 원판의 기하학적 형상으로서, 반경비( $R_2/R_1$ ),  $t/R_1$  및 각속도( $\omega$ )는 앞의 경우와 동일하며, 여기에  $d/R_1=0.2$ 인 볼트구멍이 4개 존재한다고 가정하였다. 볼트구멍의 위치를  $R_3/R_1=2\sim 3$ 까지 변화시키며 해석을 반복하였다. 균열의 형태는 볼트구멍에서 원판 중심쪽으로 존재하는 1/

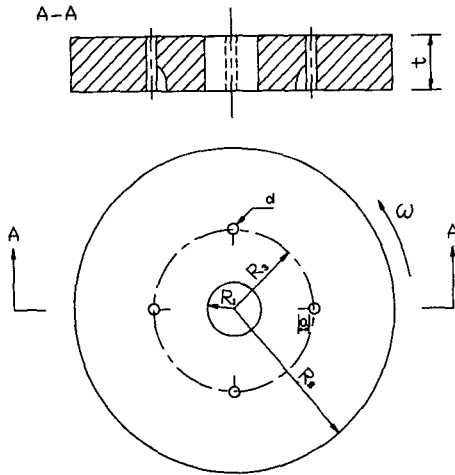


Fig. 10 Geometry of rotating disc with a quarter elliptical corner crack at each bolt hole

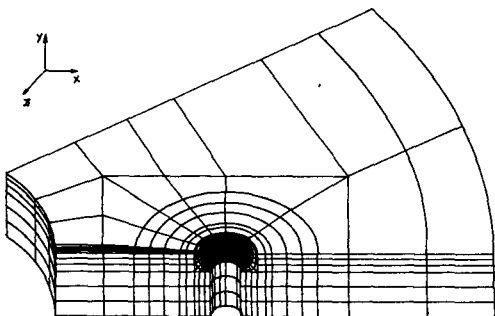


Fig. 11 Finite element mesh for a rotating disc with a quarter elliptical corner crack at each bolt hole

4타원형이다. Fig. 11은 유한요소해석을 위한 요소 망으로서, 대칭성을 이용하여 원판의 1/8만 모델링 하였다. 20절점 등개개 요소(20-node isoparametric element)를 사용하였으며, 해석에는 8,644개의 절점과 1,746개의 요소가 사용되어 전체 자유도는 25,932이다.

Fig. 12, 13, 15는 균열형상비( $a/b$ )가 각각 0.25, 0.5, 0.75, 1.0일 때,  $R_3/R_1$ 을 2~3, 균열깊이비( $b/t$ )를 0.2~0.4로 변화시키며 해석을 수행한 것

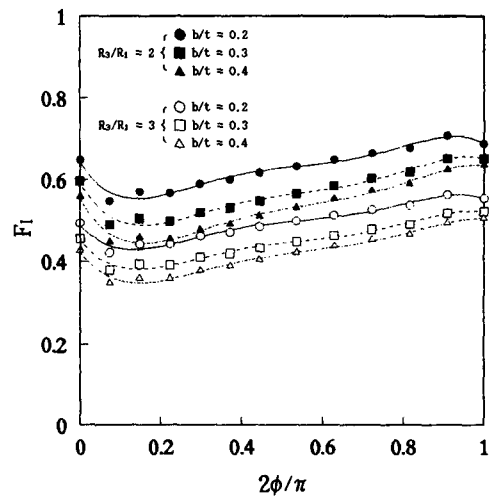


Fig. 12 Variation of stress intensity factor along front of a quarter elliptical crack( $a/b=0.25$ ) in a rotating disc

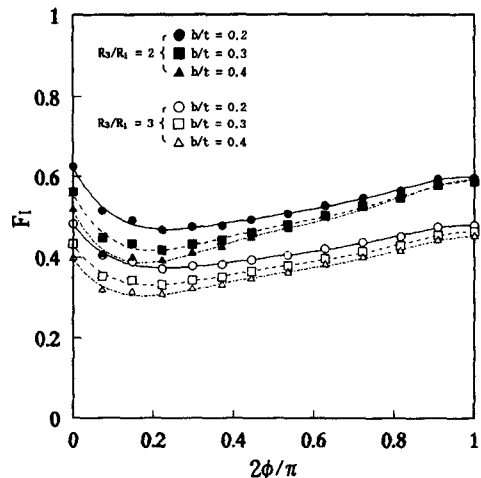


Fig. 13 Variation of stress intensity factor along front of a quarter elliptical crack( $a/b=0.5$ ) in a rotating disc

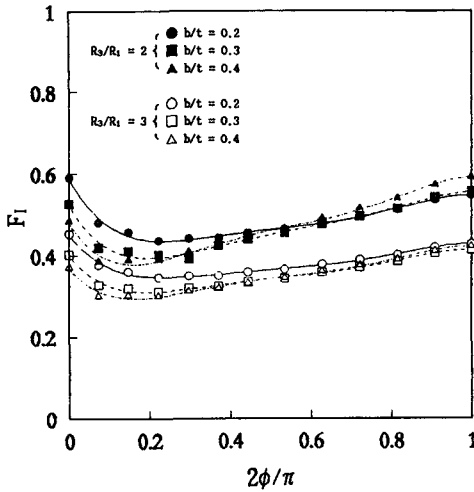


Fig. 14 Variation of stress intensity factor along front of a quarter elliptical crack ( $a/b=0.75$ ) in a rotating disc

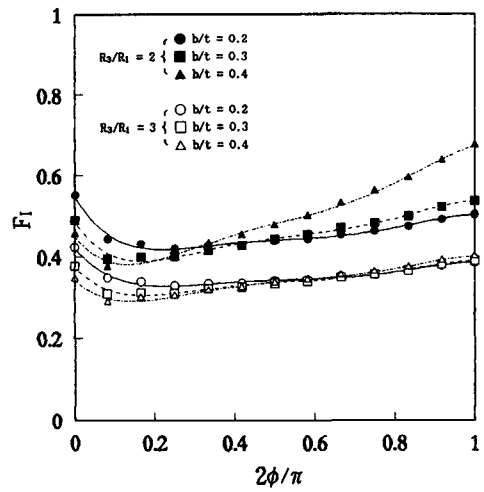


Fig. 15 Variation of stress intensity factor along front of a quarter elliptical crack ( $a/b=1.0$ ) in a rotating disc

이다. 횡축은 각도를 무차원화한 값( $2\phi/\pi$ )이며 종축은 응력확대계수를 무차원화한 값 [ $F_I = K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$ ]이다. 여기서,  $\sigma$ 는 식 (8)로부터 계산되는 회전체 원판 bore에서의 원주응력이다.

Fig. 12는 균열형상비 ( $a/b$ )가 0.25일 때의 해석결과를 도시한 것으로, 수정계수  $F_I$ 값은 볼트구멍 표면 ( $\phi=0^\circ$ )에서  $12^\circ$ 부근까지 감소하다가 원판 표면 ( $\phi=90^\circ$ )으로 갈수록 다시 증가하였다. 또한, 주어진 균열깊이비 ( $b/t$ )에 대하여  $R_3/R_1=2$ 에서의 수정계수  $F_I$ 값이  $R_3/R_1=3$ 에서의  $F_I$ 값보다 더 클 수 있으며 최대 응력확대계수는 원판의 표면에서 나타났다. Fig. 13, 14, 15는 균열형상비 ( $a/b$ )가 각각 0.5, 0.75, 1.0일 때의 해석결과를 도시한 것으로서, 균열깊이비 ( $b/t$ )가 0.2일 때는 최대 응력확대계수가 볼트구멍 표면에서 나타난 반면, 균열깊이비 ( $b/t$ )가 0.3과 0.4인 경우에는 원판 표면에서 나타났다. 이는 균열이 커짐에 따라 모서리균열이 bore에 접근하면서 발생하는 상호간섭효과 때문에 최대 응력확대계수가 표면에서 나타난다고 생각되며,  $R_3/R_1$ 이 작아짐에 따라 이러한 경향은 더욱 두드러지게 나타나고 있다. 또한 Fig. 12~15에서  $K_I$ 의 절대값은 균열깊이비 ( $b/t$ )가 커질수록 증가하였다.

이상의 해석결과로부터 회전체 원판의 볼트구멍에 존재하는 모서리균열이 피로하중을 받아 성장할 때 원판 표면쪽이 볼트구멍 표면쪽보다 빨리 성장

하는 것으로 결론낼 수 있다. 그러나, 실제구조물에서는 볼트구멍 주위에서 두께가 변하기 때문에 두께변화의 영향으로 볼트구멍 표면쪽에서 더 빠른 성장을 보인다.<sup>(2)</sup> 따라서, 수치해석 결과를 실제 구조물에 적용하기 위해서는 두께변화를 고려한 충분한 연구가 선행되어야 한다.

## 5. 결론

(1) 볼트구멍이 있는 회전체 원판에서 최대 응력은 원판중심쪽의 볼트구멍 주위에서 나타났다. 따라서, 볼트구멍이 있는 회전체 원판에서 대부분의 결함은 원판 중심쪽의 볼트구멍에서 발생한다.

(2) 균열형상비 ( $a/b$ )가 일정한 경우, 균열깊이비 ( $b/t$ )가 커질수록 전 선단에서  $K$ 값이 증가하였으며, 볼트구멍 표면 ( $\phi=0^\circ$ )에서  $12^\circ$ 부근까지 감소하다가 원판 표면 ( $\phi=90^\circ$ )으로 갈수록  $K$ 값이 증가한다.

(3) 균열깊이비 ( $b/t$ )가 작고 균열형상비 ( $a/b$ )가 작은 경우에는 원판 표면에서  $K$ 값이 최대로 나타나며, 균열형상비 ( $a/b$ )가 커짐에 따라 볼트구멍 표면에서  $K$ 값이 최대로 나타난다. 그러나, 균열깊이비 ( $b/t$ )가 커지면, 즉, 균열이 bore에 접근하면, 모서리균열과 bore의 상호간섭으로 인해 균열형상비에 무관하게 원판 표면에서  $K$ 값이 가장 크게 나타난다.

## 후 기

이 연구는 한국과학재단이 터보동력기계연구센터의 지원으로 수행되었으며, 이에 관계자 여러분에게 깊은 감사의 뜻을 포함합니다.

## 참고문헌

- (1) Yukawa, S., Timo, D. P. and Rubio, A., 1969, "Fracture Design Practices for Rotating Equipment," *Fracture*, Vol. 5, Academic Press.
- (2) Cruse, T. A. and Besuner, P. M., 1975, "Residual Life Prediction of Surface Cracks in Complex Structural Details," *J. Aircraft.*, Vol. 12, pp. 369~375.
- (3) Kobayashi, A. S., Polvanich, N., Emery, A. F. and Love, W. J., 1976, "Corner Cracks at the Bore of a Rotating Disk," *ASME J. Engng. Pwr.*, Vol. 98, pp. 465~472.
- (4) Tan, C. L., 1983, "Boundary Integral Equation Stress Analysis of a Rotating Disc with a Corner Crack," *J. Strain Analysis*, Vol. 18, pp. 231~237.
- (5) Jia, Z. H. and Tan, C. L., 1985, "Stress Intensity Factors for Corner Cracks in a Rotating Disks," *Int. J. Frac.* Vol. 28, pp. R57~R62.
- (6) Parks, D. M., 1977, "Virtual Crack Extension Method for Nonlinear Material Behavior," *Computational Method in Applied Mechanics and Engng.*, Vol. 12, pp. 353~364.
- (7) Judge, R. C. B. and Marsdeu, B. J., 1992, "NAFEMS Linear Elastic Fracture Mechanics Test Case," *ABAQUS Users' Conference Proceedings*, pp. 239~253.
- (8) Kussmaul, K., Kerkhof, K. and Berreth, K., 1993, "Use of ABAQUS IN Materials Testing and Structural Integrity Assessment," *ABAQUS Users' Conference Proceedings*, pp. 13~38.
- (9) Kaguchi, H. and Nikbin, K. M., "Evaluation of Fracture Mechanics Parameters Using the ABAQUS Virtual Crack Extension and a Contour Integral Techniques," *ABAQUS Users' Conference Proceedings*, pp. 289~303.