3196 大韓機械學會論文集 第 17 卷 第 12 號, pp. 3196~3207, 1993

〈論 文〉

저레이놀즈수 2차 모멘트 난류 열유속모형 개발에 관한 연구

신종근* · 최영돈** · 이건휘***

(1993년 3월 5일 접수)

A Low-Reynolds Number Second Moment Closure for Turbulent Heat Fluxes

J. K. Shin, Y. D. Choi and G. H. Lee

Key Words: Turbulent Heat Flux(난류 열유속), Second Moment Turbulence Closure(2차 모멘트 난류모형), Algebraic Heat Flux Model(AHFM ; 대수 열유속모형), Differential Heat Flux Model(DHFM ; 미분 열유속모형), Turbulent Prandtl Number(난류 프란틀수)

Abstract

A second moment turbulent closure for the turbulent heat flux near a wall is developed by modification of model constants in pressure interaction term as the variables of the turbulent Reynolds number using the universal properties of turbulent heat flux near the wall. The present model shows that model costant for the wall reflection term in pressure interaction is most important in modelling of the near wall heat flux. Fully developed pipe flows with costant wall heat flux are tested to validate the proposed model. In most of calculation region, the predicted turbulent properties agree better with the experimetal data than the results from standard algebraic heat flux model which use the uniform model constants.

기 호 설 명

C_{1t}, C_{2t}, C_{1t}' : 모형상수
C_p : 정압비열
C_θ : 모형상수, 0.15
D : 원관의 직경
k : 난류 운동에너지
P : 난류 운동에너지 생성률
p : 요동압력
Pr, Pr_t : 층류 및 난류 프란틀수
q_w : 벽면 열유속
r : 반경방향 좌표
R : 원관의 반경
Re : 레이놀즈수, U_mD/ν
Re_c : 레이놀즈수, U_cD/ν
R_t : 난류 레이놀즈수, $k^2/\nu\varepsilon$
T, T_w : 평균온도 및 벽면의 온도
T_τ : 벽 마찰온도, $q_w/\rho c_p u_\tau$
T^+ : 무차원온도, $(T_w-T)/T_\tau$
U, u : 유동방향 평균 및 요동속도
U_m : 원관내의 평균속도
U_c : 원관 중심선에서의 평균속도
u_τ : 벽 마찰속도, $(\tau_w/\rho)^{1/2}$
$\overline{u_iu_j}$: 레이놀즈응력 텐서
$\overline{u_i\theta}$: 난류 열유속벡터
$\overline{u\theta^+}$: 유동방향 무차원 열유속, $\overline{u\theta}/u_\tau T_\tau$
$\overline{v\theta^+}$: 반경방향 무차원 열유속, $\overline{u\theta}/u_\tau T_\tau$
V, v : 반경방향 평균 및 요동속도
x : 유동방향 좌표
y : 벽면에서 수직방향으로의 좌표

*고려대학교 기계공학과 대학원
**정회원, 고려대학교 기계공학과
***MIT 객원연구원

y^+ : 벽면으로부터의 무차원거리
α : 열확산계수
ε : 난류 운동에너지 소멸율
κ : von Karman 상수
θ : 요동온도
ν : 점성계수
ρ : 유체의 밀도
τ_w : 벽면 전단응력

1. 서 론

최근 벽면부근에서의 비등방 레이놀즈응력들을 정확히 예측하기 위한 저레이놀즈수 난류모형 개발이 활발히 진행되고 있으며, 이에 따라 2차 모멘트 난류 닫힘문제에 대한 많은 진보가 이루어져 왔다.[1,2]

반면에 상대적으로 난류 열유속방정식에 대한 모형화는 여전히 초보적인 상태를 면하지 못하고 있는데 이는 벽근방의 비등방 레이놀즈응력들이 열유속방정식에 매우 중요한 인자들이므로 난류 열유속에 대한 모형의 개발은 주로 이 레이놀즈응력 모형의 정확성에 의존하기 때문이다. 따라서 정확한 레이놀즈응력 방정식 닫힘문제보다 열유속 전달방정식들의 닫힘문제를 달성하는 것이 훨씬 더 어렵다고 할 수 있다. 신뢰성있고 상대적으로 정확한 벽근방 열유속 측정값들의 부족은 열유속방정식들에 대한 벽근방의 난류 열유속모형의 개발을 지연시키는 또 하나의 원인이 되어 왔으며 이러한 어려움 때문에 난류 열전달 연구에 관한 가장 일반적인 접근은 전통적인 Boussinesq근사법을 사용하여 통상적인 열유속방정식을 모형화하는 것이었다. 이 방법에서는 열전달에 대한 와확산계수를 구하기 위하여 난류 프란틀수를 일정값인 0.9 로 사용하거나 무차원거리의 1차 함수로 사용하게 되는데, 이렇게 사용된 난류 프란틀수로는 열전달 문제에서 전반적으로 얻을수 있는 결과가 제한되기 때문에 많은 연구자들은 온도 요동치에 대한 2-방정식[3]이나 대수적인 열유속모형[4] 등을 개발하여 열유속모형을 증대시키려고 노력하여 왔다. 그러나 비교적 정확한 예측을 하기 위해서는 열유속에 대한 2차 모멘트 닫힘문제에 기초해야 한다고 믿어지는데 그 이유는 레이놀즈응력과 열유속을 생성시키는 난류 상호작용들이 보다 적은 경험적인 방법에 의해 다루어질 수 있기 때문이다.

열유속에 대한 2차 모멘트 난류 닫힘문제를 공학적인 열전달 문제에 적용한 연구자들은 Baughn 등[5]과 Launder와 Samaraweera[6]등이 있으나 이들의 모형은 고레이놀즈수 구역에 국한되며, Lai와 So[7]는 벽면까지 사용할 수 있는 모형을 개발하였으나 제시된 식들이 상당히 복잡하고 경험적인 측면에 의한 경험상수들이 다수 포함되어 있다. 따라서 본 연구에서는 기존의 열유속방정식에 대한 식의 형태를 변화시키지 않으면서도 벽면부근까지 확장적용할 수 있는 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류 열유속모형을 개발하는데 그 목적이 있다.

정확한 난류 열유속을 얻기 위해서는 무엇보다도 정확한 속도분포와 난류 레이놀즈응력의 계산이 선결되어야 하는데 이를 위해 본 연구에서는 김[8]이 기존의 실험결과 값들을 근간으로 하여 개발한 새로운 2차 모멘트 난류 모형에 의해 속도분포와 레이놀즈응력들을 계산하였다. 이 모형에 의한 벽면부근에서의 비등방 레이놀즈응력의 예측은 기존의 모형들 보다 우수한 결과를 나타내었기 때문에 벽면부근의 2차 모멘트 난류 열유속모형의 새로운 개발을 촉진하는 계기가 되었다.

2. 이론해석

2.1 난류 열유속방정식

난류 열유속($\overline{u_i\theta}$)방정식은 Navier-Stokes방정식에 요동온도 θ를 곱하고 여기에 요동속도 u_j를 곱한 온도 T방정식을 더한 다음 시간평균을 취하면 고레이놀즈수 영역에서는 직교텐서 형태로 다음과 같이 나타내어 진다.

$$\underbrace{U_k\frac{\partial\overline{u_i\theta}}{\partial x_k}}_{C_{i\theta}} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{u_ku_i\theta}+\delta_{ik}\overline{\frac{p\theta}{\rho}}\right)}_{\frac{\partial}{\partial x_k}d_{ik\theta}} \underbrace{-\overline{u_iu_k}\frac{\partial T}{\partial x_k}}_{P_{i\theta1}}$$

$$\underbrace{-\overline{u_k\theta}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}}_{P_{i\theta2}} + \underbrace{\overline{\frac{p}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}}}_{\phi_{i\theta}} \underbrace{-(\lambda+\nu)\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x_k}}_{\varepsilon_{i\theta}} \tag{1}$$

여기서,

$C_{i\theta}$: 대류항(convective transport)

$\frac{\partial}{\partial x_k} d_{ik\theta}$: 확산항(diffusive transport)

$P_{i\theta 1}$: 온도구배에 의한 생성항(mean temperature gradient production)

$P_{i\theta 2}$: 전단에 의한 생성항(Mean shear production)

$\phi_{i\theta}$: 압력-온도 구배상관항(pressuretemperature gradient correlation)

$\varepsilon_{i\theta}$: 점성소멸항(molecular dissipation)

이다.

생성항은 평균속도와 평균온도 구배와의 복합된 작용에 의해 일어나며 모형화과정은 요구되지 않는다. 고레이놀즈수 영역의 국부등방성 난류에서는 상관관계 $\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial \theta}{\partial x_k}}$가 0이므로 소멸항이 없어지게 되나 벽면인접부에서 소멸항은 0이 되지 않기 때문에 이 항을 고려해야 하나, 현재까지 이 항에 대한 정확한 모형화가 이루어져 있지 않기 때문에 본 연구에서도 전 유동장에 대해 이 항을 0으로 처리하였다. 따라서 식(1) 중 모형화가 필요한 항들은 확산항과 압력 변형률항이다. 확산항에 대한 모형은 Daly와 Harlow[9]에 따라 다음과 같이 모형화하였으며

$$\frac{\partial}{\partial x_k} d_{ik\theta} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[C_\theta \frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k u_l}\frac{\partial \overline{u_i\theta}}{\partial x_l}\right] \tag{2}$$

압력 변형률항은 Monin,[10] Owen,[11] Launder,[12] Gibson과 Launder[13] 등에 따라

$$\phi_{i\theta} = \phi_{i\theta 1} + \phi_{i\theta 2} + \phi'_{i\theta 1} + \phi'_{i\theta 2} \tag{3}$$

로 모형화되는데 식(3)의 각 항은

$$\phi_{i\theta 1} = -C_{1t}\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_i\theta} \tag{4}$$

$$\phi_{i\theta 2} = -C_{2t}P_{i\theta 2} \tag{5}$$

$$\phi'_{i\theta 1} = -C'_{1t}\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_n\theta}\delta_{in} f\left(\frac{L}{x_n}\right) \tag{6}$$

$$\phi'_{i\theta 2} = -C_{2t}' C_{2t} P_{k\theta 2}\delta_{in} f\left(\frac{L}{x_n}\right) \tag{7}$$

과 같다. 그러나 실제유동에 있어서 식(7)의 모형은 효과를 나타내지 못하는 것으로 알려져 있으므로 본 연구에서도 이 항을 생략하였다.

따라서 난류 열유속에 대해 최종적으로 남게 되는 항들을 미분식 형태로 구성하게 되면

$$U_k\frac{\partial \overline{u_i\theta}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(C_\theta \overline{u_k u_l}\frac{\partial \overline{u_i\theta}}{\partial x_l}\right) - \overline{u_i u_k}\frac{\partial T}{\partial x_k} - \overline{u_k\theta}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - C_{1t}\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_i\theta} + C_{2t}\overline{u_k\theta}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + C'_{1t}\frac{\varepsilon}{k}\delta_i nf\left(\frac{L}{x_n}\right) \tag{8}$$

이 된다.

2.2 대수 열유속모형

레이놀즈응력 방정식은 Rodi[14]에 의해 다음과 같이 대수적 형태로 나타내어 졌다.

$$\frac{D\overline{u_iu_j}}{Dt} - Diff(\overline{u_iu_j}) = \frac{\overline{u_iu_j}}{k}\left(\frac{Dk}{Dt} - Diff(k)\right) = \frac{\overline{u_iu_j}}{k}(P-\varepsilon) \tag{9}$$

Gibson과 Launder[15]는 Rodi와 유사한 방법으로 $\overline{u_i\theta}$의 식을 나타내었는데, $\overline{u_i\theta}$는 속도와 온도요동 두 성분에 의해 영향을 받으므로 다음과 같이 표현하였다.

$$\frac{D\overline{u_i\theta}}{Dt} - Diff\ \overline{(u_i\theta)} = \frac{\overline{u_i\theta}}{2k}(P-\varepsilon) + \frac{\overline{u_i\theta}}{2\theta^2}(P_\theta - \varepsilon_\theta) \tag{10}$$

여기서 P_θ와 ε_θ는 각각 온도요동 방정식에서의 생성항과 소멸항이다. Gibson과 Launder는 $\overline{\theta^2}$과 $\overline{u_i\theta}$ 사이에는 단지 약한 연관(coupling)만이 있어서 $P_\theta = \varepsilon_\theta$라는 가정은 충분히 정확하다고 주장하고 식(10)의 두 번째 부분을 무시하였다. 따라서 본 해석에서도 이들을 따라 최종적으로

$$\frac{D\overline{u_i\theta}}{Dt} - Diff\overline{(u_i\theta)} = \frac{\overline{u_i\theta}}{2k}(P-\varepsilon) \tag{11}$$

로 사용하였다. 이러한 가정하에 식(3), (11)을 식(8)에 대입하면

$$\overline{u_i\theta} = -\frac{2k}{\varepsilon}\frac{\overline{u_iu_k}\frac{\partial T}{\partial x_k} + \phi_1\left(\overline{u_k\theta}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right)}{\frac{P}{\varepsilon} - 1 + \frac{2k}{\varepsilon}\phi_1\frac{\partial U_i}{\partial x_i} + 2\phi_2} \tag{12}$$

이 얻어진다. 여기서 나타나는 $\frac{\partial U_i}{\partial x_i}$에 사용된 첨자 i는 일반적인 텐서원칙에서 반복하며 항들을 더해나가는 반복첨자(repeated indice)가 아니고 단지 유동방향을 지시하는 성분만을 표시하는 첨자이며, 그 외의 다른 첨자들은 모두 반복되며 합해지는 첨자이다.

식(12)에서

$$\phi_1 = 1 - C_{2t} \tag{13}$$

$$\phi_2=C_{1t}+C'_{1t}f(\frac{L}{x_n}) \tag{14}$$

이 되며 $f(\frac{L}{x_n})$은 벽함수를 나타내는데, 본 연구에서는 Launder[12]가 제시한 일반적인 벽함수 표현을 김[8]이 저레이놀즈수 $k-\varepsilon$모형 개선에서 사용한 와점성계수(eddy viscosity coefficient)의 수정계수

$$f_\mu=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+\frac{47.4}{R_t}}) \tag{15}$$

를 이용하여 벽함수를

$$f=\frac{f_\mu C_\mu^{3/4}k^{3/2}}{\kappa y\varepsilon} \tag{16}$$

로 사용하였는데 이 f_μ값은 난류 레이놀즈수 R_t값이 커질수록 즉, 유동의 중심부에서는 1.0으로 유지되기 때문에 유동중심부의 고레이놀즈수 구역에서는 Launder의 벽함수 표현과 크게 다르지 않다.

2.3 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류 열유속모형의 개발

본 연구에서는 과거의 고레이놀즈수 구역에 대한 2차 모멘트 난류 열유속모형을 확장적용할 수 있는 새로운 열유속모형을 개발하는 연구를 하였다. 따라서 본 연구에서 개발하려는 새로운 모형은 과거의 모형을 근본적으로 변화시키는 것이 아니고 그 모형상수들을 정량적 이론에 바탕하여 난류 레이놀즈수(R_t)와 벽면으로부터의 무차원거리(y^+)의 함수로 표현하여 모든 열유속을 벽면 인접부에서 정확히 예측할 수 있게 한 것과 모형의 적용가능 범위를 벽면이 존재하는 3차원 유동에까지 확장 가능하게 한데 있다. 식(3)과 같이 모형화된 압력 변형률항에 나타나는 모형상수들을 R_t 및 y^+의 함수로 표현하는 과정은 다음과 같다. 일반적으로 고레이놀즈수 영역에서 사용하는 식(12)를 벽면 인접부에서도 적용할 수 있다고 가정하면 유동방향에 대한 열유속은

$$\overline{u\theta}=-\frac{k}{\varepsilon}\frac{\phi_1\overline{v\theta}\frac{\partial U}{\partial y}+\overline{uv}\frac{\partial T}{\partial y}}{\frac{1}{2}(\frac{P}{\varepsilon}-1)+\phi_2} \tag{17}$$

이고 $\phi_1=1-C_{2t}$, $\phi_2=C_{1t}$이다. $\frac{P}{\varepsilon}=\alpha$로 치환하고 식(17)을 무차원식으로 전개하면

$$C_{1t}+\frac{\alpha}{g_\theta}C_{2t}=\frac{\alpha}{g_\theta}(1+Pr_t)-\frac{1}{2}(\alpha-1) \tag{18}$$

가 된다. 여기서 α는 Laufer[17]가 제시한 난류 생성율 P와 난류 운동에너지 소멸율 ε의 실험값을 곡선맞춤하여 사용하였으며, 식(18)에서

$$g_\theta=\frac{\overline{uv^+}}{k^+}\frac{\overline{u\theta^+}}{\overline{v\theta^+}}=-g_{12}\frac{\overline{u\theta^+}}{\overline{v\theta^+}} \tag{19}$$

$$Pr_t=\frac{\overline{u\theta^+}/(dU^+/dy^+)}{\overline{v\theta^+}/(dT^+/dy^+)} \tag{20}$$

이 된다.

유동방향에 수직한 성분은

$$\overline{v\theta}=-\frac{k}{\varepsilon}\frac{\overline{v^2}\frac{\partial T}{\partial y}}{\frac{1}{2}(\frac{P}{\varepsilon}-1)+\phi_2} \tag{21}$$

이 되며

$$\phi_2=C_{1t}+C'_{1t}f(\frac{L}{x_n}) \tag{22}$$

이다. 이 식을 무차원식으로 전개하면

$$C'_{1t}=\frac{1}{f}[\frac{g_1}{g_{12}^2}\alpha Pr_t-\frac{1}{2}(\alpha-1)-C_{1t}] \tag{23}$$

이 된다. 식(23)에서

$$g_1=\frac{\overline{v^{+2}}}{k^+} \tag{24}$$

$$g_{12}=-\frac{\overline{uv^+}}{k^+} \tag{25}$$

이다. 따라서 식(18)은 C_{1t}에 대한 C_{2t}의 선형함수이므로 $C_{1t}-C_{2t}$ 도표를 Fig. 1과 같이 나타낼 수 있다. Fig. 1에서 직선 $\overline{AB}$ 선상의 점 P에 대하여 β를

$$\beta=\frac{\overline{CB}}{\overline{OB}} \tag{26}$$

으로 정의하고 이 직선이 C_{1t}축과 만나는 점을 C_{1to}, C_{2t}축과 만나는 점을 C_{2to}라 하면

$$\tilde{C}_{1t}=C_{1to}\beta \tag{27}$$

$$\tilde{C}_{2t}=C_{2to}(1-\beta) \tag{28}$$

가 된다. 따라서

$$\tilde{C}_{1t}=\beta[\frac{\alpha}{g_\theta}(1+Pr_t)-\frac{1}{2}(\alpha-1)] \tag{29}$$

$$\tilde{C}_{2t}=(1-\beta)[1+Pr_t-\frac{1}{2}(\alpha-1)\frac{g_\theta}{\alpha}] \tag{30}$$

가 된다. 이 식들에서 β는 미지의 값이므로 경계조건과 고레이놀즈수 극한조건을 사용하여 정해주

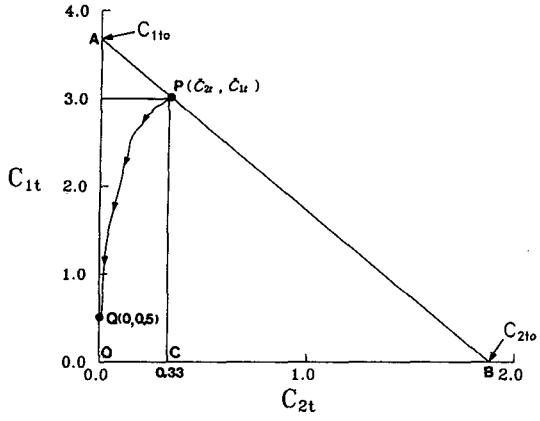

Fig. 1 $C_{1t}-C_{2t}$ map

어야 한다. 고레이놀즈수 구역에서 일반적으로 사용하고 있는 모형상수는 Gibson과 Launder[15]가 제시한 $C_{1t}=3.0$, $C_{2t}=0.33$, $C'_{1t}=0.5$이므로 이 조건을 만족시키기 위해서 β의 고레이놀즈수 극한값은 $\beta_\infty=0.822$가 요구되는 것을 Fig. 1에서 알 수 있다. 한편 y가 0으로 접근하면 Craft 와 Launder[16]는 실현가능성 제한조건(realizability constraint)에 따라 $\tilde{C}_{2t}$는 0이 되어야 한다고 제안한 바 있다. y가 0에 접근하면 난류 프란틀수 Pr_t는 벽면에서 0이 되지 않는 것이 많이 알려져 있으며, a는 0으로 g_θ는 일정값으로 접근함으로 $\frac{g_\theta}{a}$는 벽면 부근에서 어떤 큰 값을 갖을 것으로 판단되기 때문에 식(30)에서 $\tilde{C}_{2t}$가 벽면에서 0이 되어야 한다는 조건을 보장할 수 없다. 따라서 $\tilde{C}_{2t}$가 벽면에서 0으로 수렴하는 것을 확실히 보장하기 위해서는 y가 0에 접근할 때 β를 1로 수렴시킬 수 밖에 없다. 그러므로 본 연구에서는 y가 0으로 접근할 때 β를 1로 수렴하도록 하는 조건을 부과하였다. β가 고레이놀즈수 영역에서 0.822가 되고 $y=0$에서 1.0이 되도록 하기 위해서 β를

$$\beta=\beta_\infty+(1-\beta_\infty)\ (\exp(-0.008R_t)) \tag{31}$$

$$\beta_\infty=0.822 \tag{32}$$

와 같은 모형식을 가정하였으며, 식(31) 에서 사용된 상수 0.008은 $R_t=400$에서 $\beta=0.99\beta_\infty$가 되도록 도입한 것이다.

$\tilde{C}_{1t}$와 C'_{1t}도 벽면 제한조건을 가져야 하는데 주어진 식(23)과 (29)로는 확실한 벽면 제한조건을 알 수 없기 때문에 다음과 같이 이론적인 해석방법을 사용하였다.

벽면에서 무차원 요동속도와 온도를 벽면에 수직한 성분으로 Taylor 급수 전개하면

$$u^+=a_1y^++a_2y^{+2}+\cdots \tag{33}$$

$$v^+=b_2y^{+2}+b_3y^{+3}+\cdots \tag{34}$$

$$w^+=c_1y^++c_2y^{+2}+\cdots \tag{35}$$

$$\theta^+=d_1y^++d_2y^{+2}+\cdots \tag{36}$$

이 된다. 이 조건들을 이용하면 $y^+\to 0$이 될 때 우리가 관심을 갖는 난류 특성값들의 벽면조건을 구할수 있고 이러한 난류 특성값들을 조합하면 벽면에서 식(23), (29), (30)에 나타난 주요한 항들은

$$g_1=\frac{\overline{v^{+2}}}{k^+}\sim y^{+2} \tag{37}$$

$$g_{12}=-\frac{\overline{uv^+}}{k^+}\sim y^+ \tag{38}$$

$$a=\frac{P}{\varepsilon}\sim y^{+3} \tag{39}$$

$$g_\theta=-g_{12}\frac{\overline{u\theta^+}}{\overline{v\theta^+}}\sim y^{+0}(finite) \tag{40}$$

$$Pr_t=\frac{\overline{uv^+}/(dU^+/dy^+)}{\overline{v\theta^+}/(dT^+/dy^+)}\sim y^{+0}(finite) \tag{41}$$

$$1-\beta\sim y^{+4} \tag{42}$$

$$f=\frac{f_\mu C_\mu^{3/4}k^{3/2}}{\kappa y\varepsilon}\sim y^{+0}(finite) \tag{43}$$

에 비례하게 된다. 따라서 벽면에서

$$\tilde{C}_{1t}\sim\frac{1}{2} \tag{44}$$

$$\tilde{C}_{2t}\sim y^+ \tag{45}$$

$$\tilde{C}'_{1t}\sim y^{+3} \tag{46}$$

에 비례함으로 식(23), (29), (30)으로 제시한 난류 모형상수들의 벽면 제한조건은 $y=0$에서 다음과 같아져야만 한다.

$$\tilde{C}_{1t}=\frac{1}{2} \tag{47}$$

$$\tilde{C}_{2t}=0 \tag{48}$$

$$\tilde{C}'_{1t}=0 \tag{49}$$

식(17)과 (21)을 유도하는 과정에 있어서 완전발달된 유동이라도 $\frac{\partial T}{\partial x}$에 관계되는 항들이 존재하나 본 연구에서는 이 항들을 생략하였다. 이것은 이 항들이 추가되면 식(61)로 표현된 가정을 사용하여 결국 식(29), (30)에서 Pr_t항에 새로운 항이 추가되는 형태가 되며, 이 경우 벽면에서의 열유속 조건이 변할 때마다 새로 계산을 해야하는 번거로움

이 있다. 그러나 우리가 직관적으로 생각해 볼 때 벽면의 열유속변화가 벽면 인접부의 무차원 열유속 분포를 변화시킬 것 같지 않으며 또한 직접 이 항을 포함하여 계산을 하는 경우에 있어서도 식(29), (30)에 공통적으로 추가항이 적용되므로 난류 모형상수 계산에 서로 보완적 형태로 작용하여 결과적인 난류 모형상수 값은 차이가 없으며 실제 계산에 앞서 이 항을 추가하여 벽면의 열유속을 바꾸어 가며 계산해 본 결과에도 차이가 없었기에 본 난류 모형상수 계산에서는 $\frac{\partial T}{\partial x}$에 관계되는 항들을 무시하였지만 실제 열유속 계산시에는 고려하였다.

또한 식(18), (19), (24), (25)에 나타나는 a, g_{12}, g_1 등은 Laufer[17]의 실험값들을, $\overline{u\theta^+}$, $\overline{v\theta^+}$는 Hishida[18] 등의 실험값들을 근간으로 하여 R_t가 400이하 ($y^+\cong 80$)인 구역에서 다음과 같이 Taylor 급수 전개에 의한 벽면조건을 만족하도록 지수함수 및 다차항의 고차함수들로 곡선맞춤(curve fitting)하여 사용하였다.

$$a=\frac{P}{\varepsilon}=\begin{cases}0.12172R_t^{0.75} & (R_t\le 5.0)\\ MIN(0.182R_t^{0.5},\ 1.1) & (R_t>5.0)\end{cases} \quad (50)$$

$$g_1=\frac{\overline{v^2}}{k}=\begin{cases}0.00536\sqrt{R_t} & (R_t<125)\\ 0.32-5.48\times10^{-3}R_t+2.72\times10^{-5}R_t^2 & (125\le R_t<150)\\ 0.0178(R_t-116.1)^{0.516} & (R_t\ge 150)\end{cases} \quad (51)$$

$$g_{12}=-\frac{\overline{uv}}{k}=\begin{cases}0.029424426R_t^{0.25} & (R_t\le 5.0)\\ 0.021R_t^{0.46} & (R_t>5.0)\end{cases} \quad (52)$$

$$-\overline{u\theta^+}=\begin{cases}0.07866864y^{+2} & (y^+\le 2.6)\\ 0.0431279+0.0981385y^+ +0.0439213y^{+2} & \\ -0.00382979y^{+3}+8.57328\times10^{-5}y^{+4} & (2.6<y^+\le 15)\\ 3.40319-0.0497584y^+ +0.000733315y^{+2} & \\ -5.9554\times10^{-6}y^{+3}+1.99625\times10^{-8}y^{+4} & (y^+>15)\end{cases} \quad (53)$$

$$\overline{v\theta^+}=\begin{cases}0.000428945y^{+3} & (y^+\le 5.1)\\ -0.00610347-0.00375782y^+ +0.00315749y^{+2} & (5.1<y^+\le 10)\\ -0.932856+0.179198y^+ -0.00683917y^{+2} & \\ +0.000125594y^{+3}-1.10434\times10^{-6}y^{+4} & \\ +3.72155\times10^{-9}y^{+5} & (y^+>10)\end{cases} \quad (54)$$

식(20)은 난류 프란틀수에 대한 정의식이 되는데 이 식을 직접 사용하기에는 기존의 실험값들을 이용하기가 어렵기 때문에 Kays와 Crawford[19]가 제안한 다음식을 모형상수 계산에 사용하였다.

$$Pr_t=\left[\frac{\gamma^2}{2}+\gamma cP_{et}-(cP_{et})^2(1-\exp(-\gamma/(P_{et}c))\right]^{-1} \quad (55)$$

여기서

$$P_{et}=\left(\frac{\nu_t}{\nu}\right)Pr \quad (56)$$

$$\gamma=\sqrt{1/0.86} \quad (57)$$

$$c=0.2 \quad (58)$$

이다.

최종적으로 계산된 C_{1t}'에 해당하는 식(23), C_{1t} 및 C_{2t}에 해당하는 식(29), (30)은 R_t가 400($y^+\cong 80$) 이하인 영역에서만 타당하므로 이 구역을 지나서는 고레이놀즈수 영역에 해당하는 일반상수를 사용하였다.

3. 적용 대상문제 및 해법

위에 제시된 저레이놀즈수 난류 열유속모형을 검증하기 위해 벽면에서 일정한 열유속조건을 갖는 완전발달된 부력이 없는 원관유동을 채택하였다. 속도장과 온도장은 부력이 없는 유동에 대하여 서로 연관이 없기 때문에 김[8]이 제시한 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류 모형으로 속도장을 먼저 해석한 후에 온도장을 해석하였다. 수렴조건은 계산된 모든 변수에 대하여 상대오차 10^{-6}으로 하였으며 전 유동장중 벽면부근의 10%내에 전격자의 50%로 구성된 비균일 격자계를 구성하여 계산을 하였다. 원관유동에 사용된 경계조건은 벽면에서

$$T=T_w,\ \overline{v\theta}=\overline{u\theta}=0 \quad (59)$$

이고, 중심선에서

$$\frac{dT}{dr}=\frac{d\overline{u\theta}}{dr}=0,\ \overline{v\theta}=0 \quad (60)$$

이다. 또한 x와 $x+dx$ 사이의 검사체적에서 에너지 평형조건과 완전발달된 유동조건 등을 이용하면

$$\frac{dT_w}{dx}=\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{2q_w}{\rho c_p U_m R} \quad (61)$$

이 얻어지므로 본 연구에서는 지배방정식에 이 관계를 사용하여 계산을 수행하였다.

4. 고찰 및 검토

현재 개발된 난류 열유속모형을 검증하기 위하여 본 연구에서는 평균속도와 원관의 지름을 기준으로 한 레이놀즈수($Re=U_mD/\nu$)를 각각 40,000, 71, 200, 29,500, 4,580 등에 대하여 대류항과 확산항을 대수적으로 치환한 대수 열유속모형(algebraic heat flux model ; AHFM)과 대류항과 확산항을 직접계산하는 미분 열유속모형(differential heat flux model ; DHFM)으로 계산하고 Hishida 등,[18] Bremhorst와 Bullock[20]의 실험결과, Kasagi[21] 등의 직접모사법(direct numerical simulation ; DNS) 결과와 비교하였다. 미분 열유속모형을 사용할 때에는 점성확산항을 고려해야 되며 이 항에 대한 모형화가 또한 요구되므로 본 연구에서는 이 항을 $\frac{\nu}{Pr}\frac{\partial^2 u_i\theta}{\partial x_k^2}$으로 고려하여 확산항에 추가하여 사용하였다.

Fig. 2는 Re가 40,000이고 y^+가 80 이하인 영역에서 상수 C_{1t}, C_{2t}, C_{1t}'의 변화를 도시한 것이다. C_{1t}와 C_{2t}는 이론해석에서 얻어진 벽면 제한조건과 같은 값(0.5, 0)을 갖는 것을 알 수 있으며 벽면으로부터 출발하여 고레이놀즈수 구역으로 갈수록 $C_{1t}=2.80$, $C_{2t}=0.30$ 정도로 접근하는 것을 볼 수 있다. 이러한 접근경향은 β값으로 고레이놀즈수 극한조건을 주었음에도 불구하고 고레이놀즈수 구역에 해당하는 난류 모형상수들과 다소 차이가 있는데, 이는 앞서 제시한 Laufer의 실험값을 이용한 g_1과 α값이 $y^+\cong 80$ 부근의 구역에서 제시된 값들을 적절하게 곡선맞춤하지 못한데서 그 오차가 발생한 것으로 생각된다. 그러나 고레이놀즈수 극한값으로의 접근은 차이가 있지만 우리가 예측한대로 벽면부근에서부터 유동중심부로 난류 모형상수가 일정한 접근값으로 진행되어 가고 있는 것을 볼 수 있다. 또한, C_{1t}'도 벽에서 벽면 제한조건인 값 0을 만족하는 것을 알 수 있으며, y^+가 30 이하에서 그 변화의 정도가 심한 것을 나타내고 있으며 특히 y^+가 10에서 25 사이에서는 그 값이 음의 값을 갖는 특이한 현상을 보여준다. 전반적으로 볼 때 y^+ 가 30 이하에서 상수값들의 변화 정도가 저레이놀즈수 구역에서의 난류 열유속에 상당한 영향을 미친다고 할 수 있다. Fig. 1에서 곡선은 Fig. 2에 도시된 C_{1t}, C_{2t}값들의 궤적을 직접 표시한 것인데 모형상수들은 고레이놀즈수 영역에서, 사용되는 $P(0.33,\ 3.0)$으로 부터 벽면으로 갈수록 점차 $Q(0,\ 0.5)$로 접근하는 것을 알 수 있다. 모형상수들이 저레이놀즈수 영역에서 일정한 값을 갖지 않는 이유는 이 부근의 비등방 레이놀즈응력들에 의해 난류 열유속에 대한 압력 변형율이 단순한 형태의 모형으로는 나타내어지지 않기 때문에 발생한다고 생각되어 진다. 즉, y^+가 30 이하의 영역에서 난류 모형상수들의 변화가 크다는 것은 벽면부근의 난류열유속을 계산할 때에는 벽면부근의 점성역에 해당하는 항들을 난류 열유속방정식의 확산항과 점성소멸항에 모두 포함시켜야 하나 본 연구에서 사용한 모형과 같이 고레이놀즈수 영역에서 사용되는 난류 열유속 방정식을 저레이놀즈수 구역에 그대로

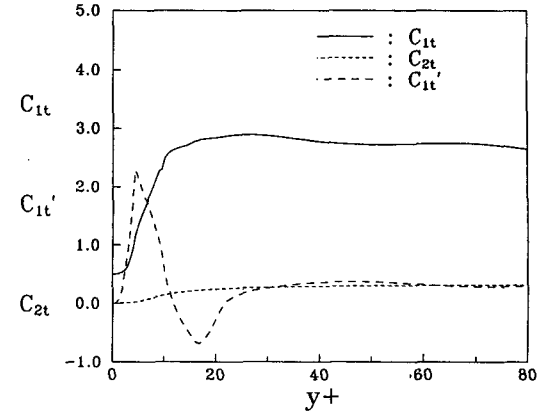

Fig. 2 Model constants in the wall region for pipe flow at Re=40,000

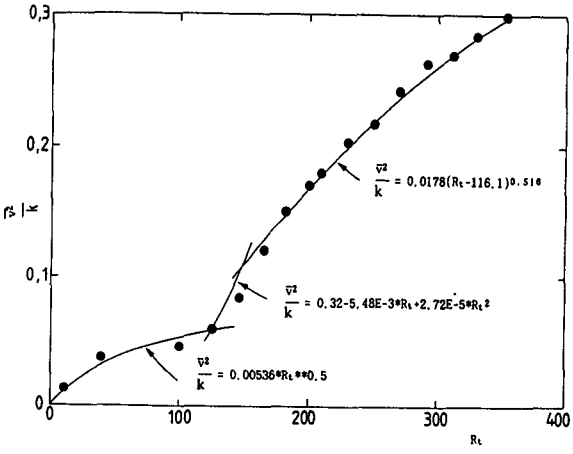

Fig. 1 $\frac{\overline{v^2}}{k}-R_t$ relation in channel flow

적용하기 때문에 발생하는 상대적인 보완효과라고 할 수 있다.

Fig. 4는 Re=40,000이고 y^+가 80 이하인 저레이놀즈수 구역에서 유동방향의 무차원 난류 열유속 $-\overline{u\theta^+}$를 도시하여 Hishida[18]등의 실험결과와 비교한 것이다. 일정한 모형상수들을 사용한 표준열유속모형(이하에서는 표준 AHFM이라 한다.)은 본 연구에서 개발한 AHFM(이하에서는 본 AHFM이라 한다.)과 비교할 때 전반적으로 차이가 심하며 특히 벽근방에서는 정확성이 많이 떨어지고 있다. 본 AHFM은 y^+가 80 부근에서 실험값과 다소 차이가 있으나 전반적으로 실험값과 매우 잘 일치하고 있으며 y^+가 15 정도에서 계산값이 약간의 굴곡을 갖는 현상을 볼 수 있는데 이것은 Laufer[17]의 실험값을 곡선맞춤하는데 있어서 Fig. 3에서와 같이 곡선들을 하나의 선으로 연결하지 않고 서로 다른 함수들로 조합하는 과정에서 그 원인이 비롯된 것으로 보인다. 본 AHFM과 같은 모형상수를 사용한 DHFM은 벽면근처에서 실험값들과의 차이가 있지만 확산효과로 인해 y^+가 80 근방에서는 보다 실험치에 접근한 예측을 하였다.

Fig. 5는 Fig. 4와 같은 조건하에서 반경방향의 무차원 열유속 $\overline{v\theta^+}$를 나타낸 것인데 표준 AHFM으로 계산한 경우에는 y^+가 20부근에서 실험치를 많이 벗어나고 있으나, 본 AHFM과 DHFM 둘 다 실험치와 매우 잘 일치하는 결과를 예측해 주고 있으며 본 AHFM에 의한 예측이 벽 인접부에서 보다 우수한 결과를 보여주고 있다.

Fig. 6은 Re=40,000인 조건하에서 무차원 $-\overline{u\theta^+}$를 전구간에 대해 도시한 것이다. 표준 AHFM은 y^+가 100 이하인 저레이놀즈수 구역에서 실험값과 차이가 크지만 그 이상의 고레이놀즈수 구역에서는 예상한 바와 같이 본 AHFM과 같은 결과값을 예측해 주었다. 본 AHFM은 실험결과와 대체적으로 잘 일치하지만 국부적으로 y^+가 80인 부근과 원관 중심부인 1000인 지점에서 실험결과와의 차이가 보인다. y^+가 80 근방에서 실험값과 차이가 나는것은 저레이놀즈수 구역에서 즉 y^+가 80까지의 기존의 제한된 실험값들을 이용하여 곡선맞춤 함으로써 생기는 조화(matching)의 불균형으로 인해 발생한 오차로 해석된다. 또한 y^+가 1000인 원관의 중심부분에서의 차이는 본 AHFM이 확산항을 전부 고려하지 않고 대류항과 확산항을 하나로 묶어 대수적으로 식을 유도한데 그 원인이 있다고 볼 수 있

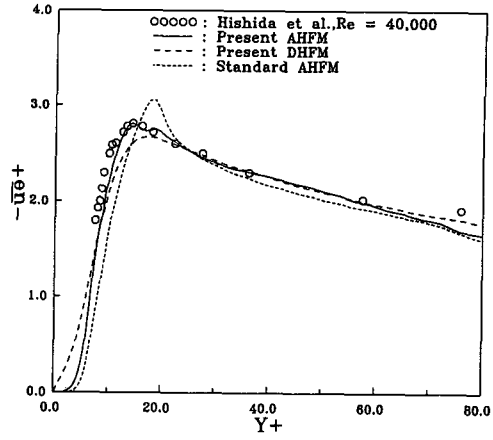

Fig. 4 Distribution of streamwise heat fluxes in the near wall region at Re=40,000

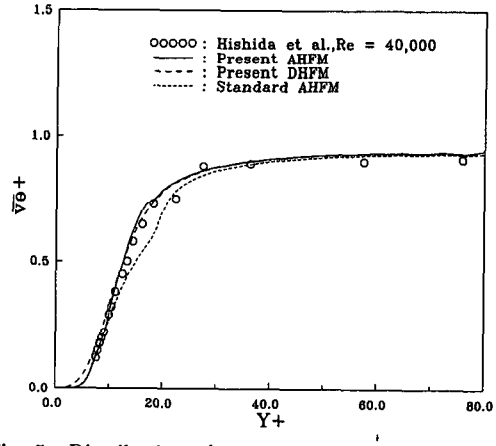

Fig. 5 Distribution of normal heat fluxes in the near wall region at Re=40,000

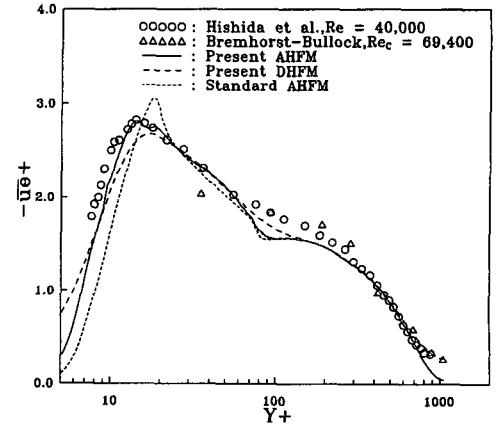

Fig. 6 Distribution of streamwise heat fluxes in pipe flow at Re=40,000

다. y^+가 80인 부근과 원관 중심부의 본 AHFM에 의한 이러한 오차는 비록 벽면 인접부에서의 DHFM에 의한 결과값은 본 AHFM에 의한 것보다는 좋지 않지만 DHFM을 사용함으로써 개선될 수 있음을 이 그림은 또한 보여준다. 그러나 본 연구의 주 목적은 벽면부근의 정확한 난류 열유속을 계산하는 모형을 개발하는데 있으므로 앞으로의 비교 내용은 주로 본 AHFM을 사용한 경우이다.

Fig. 7은 y^+가 80 이하인 영역에서 각기 다른 Re에 따라 무차원 열유속 $-\overline{u\theta^+}$를 나타낸 것인데 Re가 24,900이상으로 큰 경우에는 벽면부근에서의 난류열유속은 Re의 변화에 따라 $-\overline{u\theta^+}$ 분포가 거의 일정한 값을 보여주나 Re가 작은 4,580 인 경우에는 $-\overline{u\theta^+}$의 분포가 다른 높은 Re들의 경우보다 낮은 분포를 예측해 주고 있음을 알 수 있다.

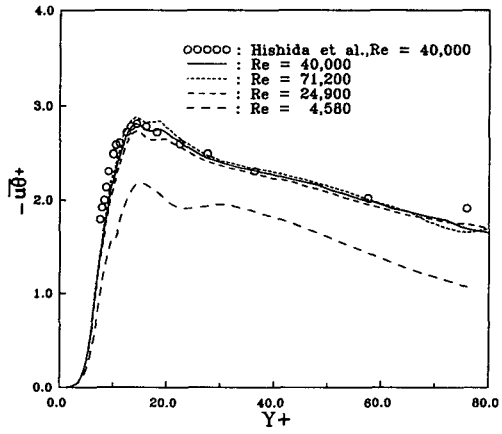

Fig. 7 Distribution of streamwise heat fluxes in the near wall region

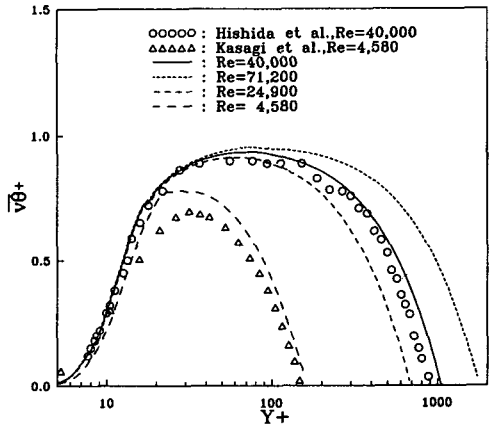

Fig. 8 Distribution of normal heat fluxes in pipe flow

Fig. 8은 전 유동역에 있어서 $\overline{v\theta^+}$의 예측값을 도시한 것으로써 Re가 커짐에 따라 벽면 인접부 즉 y^+가 25 이하에서는 큰 변화가 없으나 그 이후에는 R_e의 증가에 따라 $\overline{v\theta^+}$의 분포도 증가하는 것을 볼 수 있다. 그림상에서 Kasagi[21]등의 자료는 DNS에 의한 결과로써 본 해석결과와 비교할 때 벽 근방을 제외하고 대체적으로 작은 분포값을 보여주나 전반적인 경향은 유사하며, Re=40,000인 경우 Hishida[18]등의 결과와 비교한 본 예측결과는 실험값과 매우 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 9는 난류 프란틀수에 대한 식(18)을 계산하여 벽근방에서 도시한 것인데 벽인접부의 y^+가 2.5 이하인 곳과 y^+가 80 근방에서는 곡선맞춤에 의한 함수들의 조화 불균형으로 인해 계산값들이 불안정하여 이 부분을 생략하여 나타낸 것이다. y^+가 15 근방에서 곡선이 크게 변하는 것은 역시 $\overline{v^2}/k$에 대한 곡선맞춤에서 서로 다른 함수들의 연결점에서 발생한 것으로 보인다. 계산결과값들을 실험값들과 비교할 때 벽면부근에서는 Blackwell[22]의 실험값들을 잘 따르지만 y^+가 20 이상에서는 Hishida 등의 결과와 유사한 경향을 나타내고 있다. 또한 이 그림에는 모형상수 계산시 사용한 Kays-Crawford[19]의 공식을 같이 도시하였는데 Hishida[18]등의 실험결과와 아주 유사한 값들을 제시해 주고 있기 때문에 모형상수 계산에 이들의 공식을 사용한 것은 타당성이 충분하다고 생각된다. 실험값들과 Kays-Crawford 공식은 y^+가 40이상인

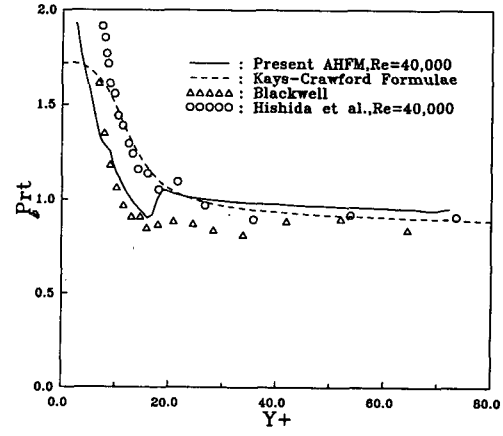

Fig. 9 Turbulent Prandtl number variation in the near wall region

영역에서 대체적으로 Pr_t가 0.9정도로 보통 일반적인 계산에서 사용하는 값과 같지만 본 계산에 의한 결과는 이보다 약간 큰 1.0 정도로 계산되었다. 벽면인접부에서는 y^+의 감소에 따라 Pr_t가 급격히 증가하는 경향을 보여주는데 이것은 열에 대한 난류 확산이 벽근방에서 운동량에 대한 확산보다 훨씬 작다는 것을 의미한다.

Fig. 10은 유동방향 대 반경방향의 열유속비 $-\overline{u\theta}/\overline{v\theta}$를 나타낸 것인데 이 값들은 난류 열전달을 계산하는 한 수단을 제시해 준다. 실험값들과 비교해 볼 때 표준 AHFM은 벽근방의 열유속들을 제대로 예측을 하지 못하였기 때문에 벽근방에서 차이가 심하며 그 예측경향도 본 AHFM과 다른것을 알 수 있다. 이에 반해 본 AHFM은 실험값과 아주 유사한 경향을 보여주고 있으며 y^+가 100 이상인 대부분의 영역에서는 거의 일정한 값을 갖는 것을 예측해 주고 있다. 원관 중심부에서 본 AHFM에 의한 결과와 실험값과의 차이는 앞서 설명한 바와 같이 이 모형은 대류항과 확산항을 묶어 대수적으로 처리하였기 때문에 $-\overline{u\theta}$를 이 부근에서 보다 낮은 값으로 예측함으로써 생긴 결과이다.

Fig. 11~14는 각각의 Re에 따라 계산된 무차원 온도분포를 Kader,[23] Johnk와 Hanratty[24] 실험값들과 비교한 것인데 본 AHFM은 Re가 작은 4,580인 경우에는 Kader의 실험값보다 다소 크게 예측을 하였으나 실험값과 거의 일치하는 경향을 보여주고 있으며, Re가 이보다 큰 경우에는 원관 중심부에서 실험값들보다 Re가 커질수록 대체적으로 작게 예측되었으나 전체적인 양상은 실험값에 잘 일치하고 있다. 그러나 Fig. 13은 본 AHFM과 DHFM은 실험값에 잘 일치하지만 벽근방의 열유속들을 정확히 예측하지 못한 표준 AHFM은 벽근방의 온도분포를 잘못 예측하는 것이 아니라 벽근방의 부정확한 열유속들이 원관 중심부의 온도분포에 상당한 영향을 주어 전체적인 온도분포를 실험값보다 크게 예측한 것을 알 수 있다.

이상의 결과로 볼 때 새로 개발한 2차 모멘트 난류 열유속모형은 본 AHFM 으로 계산할 경우 국부적으로는 실험치를 벗어나는 곳이 있지만 전반적으로 실험치를 잘 추종해 가는 보다 합리적인 모형으로 판단되어지며, 이러한 국부적인 불일치는 현재의 방법으로 계산된 난류 모형상수들을 경험적인

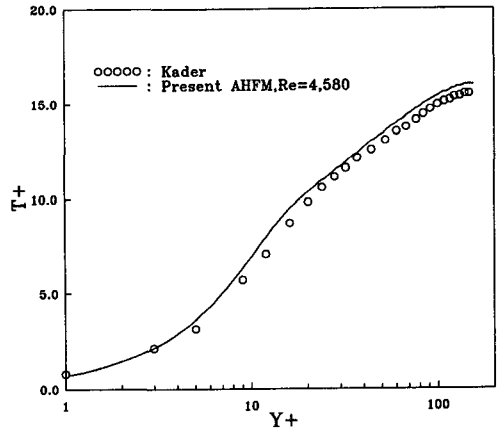

Fig. 11 Dimensionless mean temperature distribution at Re=4,580

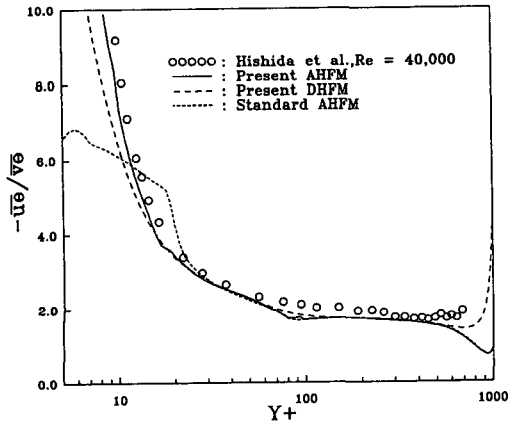

Fig. 10 Distribution of heat flux ratio $-\overline{u\theta}/\overline{v\theta}$ at Re =40.000

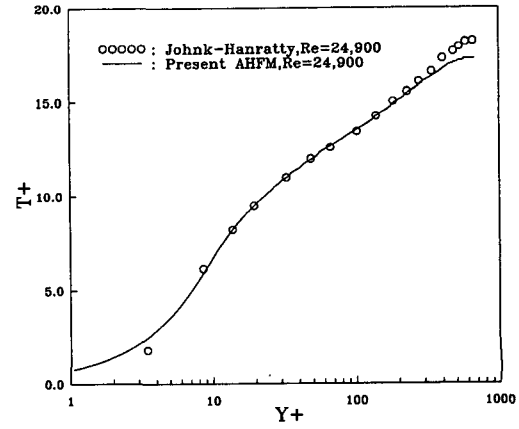

Fig. 12 Dimensionless mean temperature distribution at Re=24,900

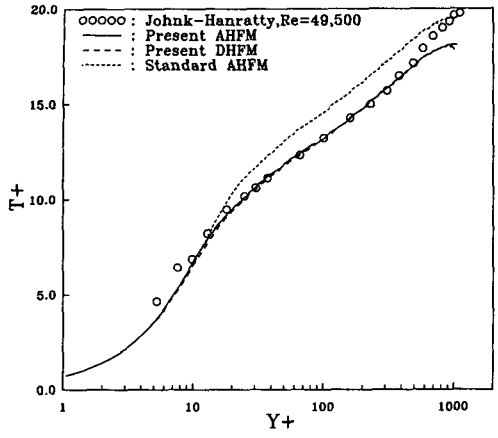

Fig. 13 Dimensionless mean temperature distribution at Re=40,000

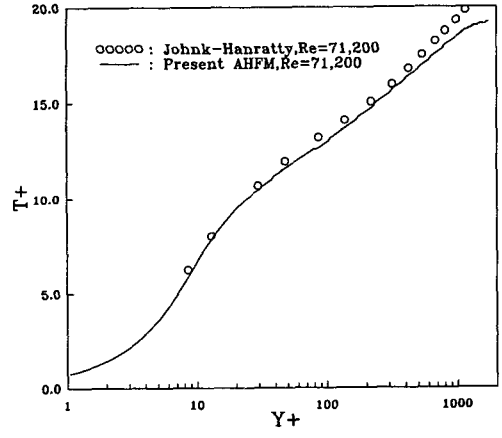

Fig. 14 Dimensionless mean temperature distribution at Re=71,200

측면에서 좀 더 보완하여 DHFM을 사용하면 해소될 수 있을 것으로 예측된다.

5. 결 론

본 연구에서는 벽면 인접부의 저레이놀즈수 구역을 정확히 해석해 줄 수 있는 2차 모멘트 난류 열유속모형을 개발하기 위해서 압력 변형률항에 나타나는 난류 모형상수들을 벽면 인접부에서의 Laufer의 레이놀즈응력, Hishida 등의 난류 열유속 측정 실험결과들과 대수 열유속모형을 이용하여 난류 레이놀즈수 및 벽면으로부터의 무차원거리의 함수로 나타내었다. 본 연구에서 개발한 저레이놀즈수 난류 열유속모형의 적합성을 검증하기 위하여 본 모형을 벽면에서 일정 열유속을 갖는 완전발달된 부력이 없는 원관유동에 적용하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) y^+가 30 이하에서는 2차 모멘트 난류 열유속 모형상수들의 변화가 크지만 그 이상에서는 거의 일정하였다. 이것은 y^+가 30 이하에서는 레이놀즈응력들의 비등방성이 크기 때문에 난류 열유속 압력변형율이 단순한 형태의 모형으로는 나타내어지기 어렵기 때문이라고 생각된다.

(2) 본 연구에서 개발한 난류 열유속모형은 저레이놀즈수 구역에서 실험치와 매우 잘 일치하는 결과를 예측하였으며 레이놀즈수의 변화에 따른 벽면 부근의 열유속값들의 예측은 Re=24,900 이상에서는 그 변화가 극히 작았다.

(3) 본 AHFM 으로 계산한 경우 유동방향의 열유속 $-\overline{u\theta^+}$는 y^+가 80인 부근에서 제한된 구역의 실험값들을 이용함으로써 생기는 부조화로 인하여, 원관의 중심부에서는 대류항과 확산항을 대수적으로 치환함으로써 생기는 원인에 의하여 실험치와 다소 차이가 나지만 이러한 차이들은 DHFM을 사용함으로써 개선될 수 있음을 본 연구는 나타내어 주었다.

(4) 원관유동에서는 본 저레이놀즈수 난류 열유속모형의 우수성이 검증되었으나 본 모형을 실제 유동해석에 적용하기 위해서는 복잡한 3차원 난류 열전달 문제에서의 검증이 요구된다.

참고문헌

(1) Shima, N., 1988, "A Reynolds-stress Model for Near-Wall and Low-Reynolds-Number Regions.," J.Fluids Engng., Vol. 110, pp. 38~44.

(2) Launder, B. E. and Tselepidakis, D. P., 1988, "Cotribution to the Second Moment Modelling of Sublayer Turbulent Transport.," Proc. Zaric Memorial International Seminar on Wall Turbulence, Dubrovnik,Yogoslvia. Hemisphere, Washington. DC.

(3) Nagano, Y. and Kim, C., 1988, "A Two-Equation Model for Heat Transport in Wall Turbulent Shear Flows." J. Heat Transfer, Vol. 110, pp. 583~589.

(4) Prud'homme, M. and Elghobashi, S., 1986,

"Turbulent Heat Transfer Near the Reattachment of Flow Downstream of a Sudden Pipe Expansion.," Numer. Heat Transfer, Vol. 10, pp. 349~368.

(5) Baughn, J. W., Hoffman, M. A., Launder, B. E. and Samaraweera, D. S. A., 1978, "Three-Dimensional Turbulent Heat Transport in Pipe Flow : Experiment and Model Validation.," ASME Paper. No. 78-WA-HT-15.

(6) Launder, B. E. and Samaraweera, D.S.A., 1979, "Application of a Second Moment Turbulence Closure to Heat and Mass Transport in Thin Shear Flows-I. Two-Dimensional Transport.," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 22., pp. 1631-1643.

(7) Lai, Y. G. and So, R. M. C., 1990, "Near-Wall Modelling of Turbulent Heat Fluxes.," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 33 , pp. 1429-1440.

(8) 김명호, 1991, "저레이놀즈수 2차 모멘트 난류 모형 개발에 관한 연구," 고려대학교 박사학위논문.

(9) Daly, B. J. and Harlow, F. M., 1970, "Transport Equation in Turbulence.," Phys. Fluids, Vol. 13, p. 2634.

(10) Monin, A. S., 1965, "On the Symmetry Properties of Turbulence in the Surface Layer of Air.," Isre. Atmos. Ocean. Phys., pp. 85~94.

(11) Owen, R. G. 1973, "An Analytical Turbulent Transport Model Applied to Non-isothermal Fully-Developed Duct Flows.," PhD. Thesis, The Penn. State University.

(12) Launder, B. E., 1975, "A Reynolds-stress Closure Model of Turbulence Applied to the Calculation of a Highly Curved Mixing Layer.," J. Fluid Mech., PP. 569~581.

(13) Gibson, M. M. and Launder, B. E., 1978, "Ground Effects on Pressure Fluctuations in the Atmospheric Boundary Layer.," J. Fluid Mech. Vol. 86, pp. 491~511.

(14) Rodi, W., 1976, "A New Algebraic Relation for Calculating the Reynolds Stress.," ZAMM 56, T21S~T221.

(15) Gibson, M. M. and Launder, B. E., 1976, "On the Calculation of Horizontal Turbulent Free Shear Flow under Gravitational Influence.," J. Heat Transfer, 98C, pp. 81~87.

(16) Craft, T. J. and Launder B. E., 1989, Proc. 7th Symp. Turb. Shear Flows, 17.1.1-17.1.6. Stanford University.

(17) Laufer, J. 1951, "Investigation of Turbulent Flow in a Two Dimensional Channel.," NACA Rept. 2123.

(18) Hishida, M., Nagano, Y. and Tagawa, M, 1986, "Transport Process of Heat and Momentum in the Wall Region of Turbulent Pipe Flow.," Proc. 8th Int. Heat Transfer Conf., Vol. 3, pp. 925~930, Hemisphere, Washington, DC.

(19) Kays. W. M. and Crawford, M. E., 1980, "Convective Heat and Mass Transfer.," p. 228, Mcgraw-Hill.

(20) Bremhorst, K. and Bullock, K. J, 1973, "Spectral Measurement of Turbulent Heat and Momentum Transfer in Fully Developed Pipe Flow," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 16, pp. 2141-2154.

(21) Kasagi, N., Tomita, Y. and Kuroda, A., 1992, "Direct Numerical Simulation of Passive Scalar Field in a Turbulent Channel Flow.," J. Heat Transfer, Vol. 114, pp. 598-606.

(22) Blackwell, B. F., 1972, PhD. Thesis, Stanford University.

(23) Kader, B. A., 1981, "Temperature and Concentration Profiles in Fully Turbulence Boundary Layers.," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 24, pp. 1541-1544.

(24) Johnk, R. E. and Hanratty, T. J., 1962, "Temperature Profiles for Turbulent Flow of Air in a Pipe-I. The Fully Developed Heat Transfer-Region.," Chem. Engng. Sci., Vol. 17, pp. 867-879.