

# 본드선도 모델링 방법의 기본개념 및 그 적용 예

김종식 · 박전수

## Basic Concepts of Bond Graph Modeling Techniques and Its Applications

Jong-Shik Kim and Jeon-Soo Park



- 김종식(부산대 기계설계학과 교수)
- 1954년생.
- 비선형 다변수 제어를 전공하였으며, 차량시스템의 모델링 및 제어에 관심을 가지고 있다.



- 박전수(부산대 기계기술연구소 제어시스템실)
- 1962년생.
- 자기부상 시스템의 모델링 및 제어에 관심을 가지고 있다.

### 1. 머리말

동적 시스템의 해석 및 설계를 위해 우선 수행해야 할 일은 동적 시스템을 수학적 으로 표현하는 모델링 작업이다. 특히, 해석적인 방법으로 제어시스템을 설계하고자 할 때 수학적 모델링 작업은 필수적이다. 일반적으로 모델링 작업은 주어진 플랜트의 동특성을 나타낼 수 있는 변수들을 선정하고, 이 변수들이 다양한 형태의 방정식으로 표시되는 물리법칙들을 통하여 변수들의 상호관계를 찾아냄으로써 이루어지게 된다.

그러나 실제적으로 공학적인 물리 시스템 이른바, 기계, 전기·자기, 유체·유압 그리고 열 시스템 등에 대하여 각 부분시스템(subsystem)의 요소들 상호간의 물리법칙들을 충분히 이해하지 않고서는 동적 방정식을 유도하기 어렵고 특히, 이와 같은 각 부분 시스템이 조합되어 나타나는 복잡한 다에너지 지역 시스템(multi-energy domain system) 일 경우에는 무엇보다도 각각의 에너지 영역

에서 성립되는 각 물리법칙들에 대한 충분한 지식을 갖지 않고서는 거의 불가능하다.

한편, 제어 동역학(controlled dynamics)의 관점에서 동적 시스템을 모델링할 때 흔히 사용하는 블록선도(block diagram)나 신호흐름선도(signal flow graph) 방법은 현실적으로 선형 시스템을 모델링하는데 국한되며 또한 복잡한 시스템에 대해서는 시스템이 포함하는 각 요소들에 대한 개별적인 평가가 어렵고, 입출력 관계식을 구하는 과정이 때때로 지루하여 다변수 시스템에서는 조작하기가 힘들다. 무엇보다도 이와 같은 모델링 방법은 일반적으로 주어진 플랜트 각 요소들 상호간의 물리법칙들을 잘 이해해야만 이용할 수 있다. 그러므로 독자들이 익숙하지 않은 물리 시스템에 대해서는 이러한 방법을 이용하여 동적 시스템을 수학적으로 모델링하는 것은 어렵다.

따라서 이 글에서는 우리가 익숙하지 않은 물리 시스템을 포함하고 있는 복잡한 다에너지 지역 시스템이라도 조직적으로 간편하게 모델링할 수 있는 본드선도(bond graph) 모델

링 방법의 기본 개념과 그 적용 예를 간단히 소개하기로 한다. 본드선도 모델링 방법은 1959년 Paynter<sup>(1)</sup>에 의해 처음 제안된 이후 Rosenberg<sup>(2)</sup>와 Karnopp<sup>(3)</sup> 등에 의하여 여러 가지 실제 시스템에 확대 적용되고 있다. 물리적 등가(physical equivalence)개념에 충실한 각 부분시스템 서로 간의 상호작용시 반드시 에너지 교환이 이루어져야 하며 이 때, 에너지 보존법칙을 만족하여 동적 시스템의 연결부에서는 이에 상응하는 인과관계를 할당할 수 있다는 것이 본드선도 모델링 방법의 기본개념이다. 따라서 본드선도 모델링 방법에는 모든 물리 시스템이 갖는 일률 및 에너지를 동일한 방법으로 일관성 있게 다룰 수 있다. 본드선도 모델링 방법은 Newton 제2법칙을 쉽게 적용할 수 있는 기계시스템, Kirchhoff의 전류·전압법칙을 쉽게 적용할 수 있는 전기시스템뿐만 아니라 유체·유압·자기, 그리고 열시스템 또한 이들이 조합된 기계시스템에서도 직접적이며 일관성있게 적용되어 시스템의 상태방정식을 간결하게 유도할 수 있는 장점을 가지고 있으므로 제어동역학 관점에서 강력한 모델링 방법이다. 또한 TUTSIM<sup>(4)</sup> 또는 ENPORT<sup>(5)</sup> 등과 같은 본드선도 전용 프로그램이 개발되어 있어 동역학 시스템을 직접 모델링부터 시뮬레이션까지 수행할 수 있기 때문에 그 응용범위가 한층 넓어지고 있다.

## 2. 본드선도 모델링 방법

### 2.1 본드선도의 기본 요소

본드선도는 동적 시스템의 기본 특성과 동적 시스템들 간의 상호작용시 반드시 발생하는 에너지 전달현상을 동적 시스템을 모델링하는데 가장 기본이 되는 에너지 보존법칙에 입각하여 모든 동적 시스템에 일의적으로 표시할 수 있는 기호를 정의하는 것에서부터 출발한다. 다시 말하면 동적 시스템을 구성하는 각 요소를 에너지 특성에 따라 에너지

발생, 저장, 발산 그리고 변환요소로 구분하고, 이 요소들이 서로 연결되어 상호작용을 할 때 만족되어야 할 필요한 물리적인 제법칙들을 접합요소를 통하여 실현되도록 한다. 이는 동적 시스템에 관한 일반적인 물리법칙은 물리적 등가개념에 따라 시뮬레이션 종류에 관계없이 일률적으로 적용할 수 있음을 상기해 볼 때, 동적 시스템의 각 기본요소들의 입·출력에 관한 물리량인 작력(effort)과 흐름(flow)으로 표시되는 일률변수 그리고 일반화된 운동량과 일반화된 변위로 표시되는 에너지 변수들로 표기하여 모든 동적 시스템을 조직적이며 일의적으로 모델링할 수 있음을 의미한다.

이와 같은 물리적 등가를 이용한 상사(similarity) 시스템 개념은 시스템 모델링 과정에서 매우 유용하게 이용될 수 있다. 기계, 전기·자기, 유체·유압, 열 시스템 등 플랜트의 종류가 다르더라도 각 시스템이 상사시스템이면 어느 시스템에서나 전적으로 같은 수학적 모델식으로 표현되며, 오직 다른점은 사용하는 용어가 다를 뿐이다. 예를 들면 기계 시스템에서는 힘, 속도, 변위, 운동량, 스프링상수, 질량, 감쇠계수라는 용어를 사용하고 전기 시스템에서는 이를 각각 전위차, 전류, 전하량, 자속쇄고, 커패시터, 인덕턴스, 저항이라고 하는 용어를 사용한다는 차이뿐이다.

표 1은 대표적인 공학시스템에 대한 작력변수와 흐름변수의 명칭을 요약한 것이다.

한편, 본드선도에서는 표 1과 같이 일률을 나타낼 때 이용되는 작력변수(e)와 흐름변수(f) 이외에 동적 시스템이 저장하는 에너지를 표시하기 위하여 본드선도상의 각 포트(port)에서 작력변수 및 흐름변수와 적분관계를 갖는 일반화된 운동량변수(p) 및 일반화된 변위변수(q)를 에너지변수로 정의하여, 이 일반화된 네 가지의 변수들만이 모든 동적 시스템을 모델링하는데 사용된다.

일반화된 운동량 p와 일반화된 변위 q는

표 1 시스템 종류에 따른 일률변수

시 스템	작력변수( $e$ )	흐름변수( $f$ )	일률( $P=e \times f$ )
병진식 기계시스템	힘( $F$ )	속도( $v$ )	$F \cdot v$
회전식 기계시스템	토크( $\tau$ )	각속도( $\omega$ )	$\tau \cdot \omega$
비압축성 유체시스템	압력( $P$ )	체적유량( $Q$ )	$P \cdot Q$
압축성 유체시스템	엔탈피( $h$ )	질량유량( $m$ )	$h \cdot m$
열 시스템	온도( $T$ )	엔트로피유량( $\dot{s}$ )	$T \cdot \dot{s}$
전기시스템	전위차( $e$ )	전류( $i$ )	$e \cdot i$
자기시스템	자기력( $\mathcal{F}$ )	자속률( $\dot{\phi}$ )	$\mathcal{F} \cdot \dot{\phi}$

각각 다음과 같이 정의된다.

$$p = p_0 + \int_{t_0}^t edt \quad \text{혹은} \quad dp = edt \quad (1)$$

$$q = q_0 + \int_{t_0}^t fdt \quad \text{혹은} \quad dq = fdt \quad (2)$$

그리고 각 포트상에서 일률 흐름에 따라 동적 시스템이 저장하고 소멸하는 에너지  $E$ 는 식 (3) 또는 식 (4)와 같이 정의된다.

$$E = E_0 + \int_{t_0}^t Pdt \quad (3)$$

$$E - E_0 = \int_{t_0}^t efdt = \int_{t_0}^t edq = \int_{t_0}^t fdp \quad (4)$$

식 (4)에서  $E - E_0$ 는 일률흐름이 발생했을 때 각 포트를 통하여 전달된 순수 에너지이고 이 에너지는 동적 시스템이 구성하는 각 에너지 저장요소에 따라 위치에너지와 운동에너지를 각각 식 (4)의 세번째 및 네번째 항과 같은 형태로 저장된다.

이제 에너지를 발생, 저장, 발산 그리고 변환하는 시스템의 각 요소와 이 요소들 사이를 연결시켜 주는 접합요소에 대하여 알아보기로 한다. 에너지 발생요소는 흔히 소스(source)라고 하는데, 일반적으로 작력소스와 흐름소스로 구분한다. 작력소스는 발전기와 같이 작력변수의 변화로 에너지를 발생시키는 요소이고, 흐름소스는 펌프와 같이 흐름변수의 변화로 에너지를 변화시키는 요소이다.

에너지 저장요소는 위치에너지 저장요소인

커패시턴스(capacitance)와 운동에너지 저장요소인 이너턴스(inertia)로 분류한다. 커패시턴스는 작력과 변위 사이가 일련의 정적함수 관계를 갖는 요소로서, 힘이 가해졌을 때 위치 또는 각 변위가 일어나는 일반적인 탄성체(스프링, 토션 바, 보 등), 전기회로의 커패시터, 그리고 유체·유압 시스템에서 저장용 탱크 혹은 어큐뮬레이터 등이 있다. 그리고 이너턴스는 흐름이 운동량과 적당한 정적함수 관계를 갖고 있는 요소로서, 질량체가 동적 운동(직선 및 회전운동)을 하는 경우나 전기회로의 인덕턴스(inductance) 그리고 유체·유압 시스템에서 질량유량의 관성효과 등이 이에 속한다.

에너지 발산요소는 일반적으로 시스템 저항이라고 하는데, 시스템이 갖는 에너지를 열, 소음, 빛 등으로 소멸시키는 요소로서, 운동하는 두 물체의 접촉으로 인한 마찰이나 기계적인 메카니즘상의 에너지 손실, 전기회로에서 저항이나 자기장속의 자속 유출, 그리고 유체·유압 시스템의 파이프 유동손실이나 오리피스, 밸브 등과 같은 수력학적 장치상에서의 유량 손실 등을 나타내는데 사용되며 일률변수인 작력과 흐름의 상관관계로 그 요소방정식이 표시된다.

한편, 에너지 변환요소는 에너지 저장 및 발산요소와는 달리 두 개의 포트를 갖는 일종의 접합요소로서 에너지 변환방법에 따라 트랜스포머(transformer)와 자이레이터(gyra-

tor)로 구분된다. 동적 시스템들 간의 연결부에 정의되는 본드선도의 접합요소는 서로 간의 일률흐름이 일어날 때 반드시 에너지 보존법칙이 만족되어야 하는 점을 상기해 볼 때, 에너지 변환요소 역시 다음과 같은 에너지 보존법칙이 성립되어야 한다.

$$e_i f_i = e_o f_o \quad (5)$$

여기서, 첨자  $i, o$ 는 에너지 변환요소가 갖는 두 개의 포트 중에서 각각 입력포트와 출력포트를 의미한다. 만약 출력 작력변수  $e_o$ 가 입력 작력변수  $e_i$ 의 함수로 에너지 변환요소의 요소방정식이 표시되면 즉, 지레대, 기어변속기, 랙과 피니언, 유압 서보기구 등과 같이 입력 작력(힘, 토크, 힘, 유압)에 적당한 계수(트랜스포머 계수;  $m$ )가 곱해져 출력 작력(힘, 토크, 토크, 힘)을 결정하는 형태를 트랜스포머라 하고, 출력 작력변수  $e_o$ 가 입력 흐름변수  $f_i$ 의 함수로 표시되면 즉, 일반적인 구동기로 흔히 사용되는 직류모터 등과 같이 입력 흐름(전류)에 적당한 계수(자이레이터 계수;  $r$ )가 곱해져 출력 작력(토크)을 결정하는 형태를 자이레이터라 한다. 이 에너지 변환요소들은 여러 가지 에너지 영역에서 작동되는 동적 시스템을 본드선도로 모델링할 때 매우 유용한 요소들이며 특히, 자이레이터는 에너지 저장요소인 커패시턴스와 이너턴스에 저장된 에너지가 서로 연성인 상태에서 변환코자 할 때 가장 필수적인 요소가 된다.

이제 위에서 정의된 각 기본요소들이나 이 기본요소들로 구성된 동적 시스템들을 서로 연결할 때 사용되는 접합요소에 대하여 알아보기로 한다. 접합요소는 기본적으로 3-포트 이상의 입·출력 단자를 가지며 각 연결부에서 반드시 에너지 보존법칙을 만족해야 하는 구속조건을 갖는다. 그러므로 본드상에서 짝으로 표시되는 일률변수 중에서 작력변수의 값이 같으면 그 구성요소들을 공통작력접합(common effort junction) 즉, 0-접합으로

연결하고 흐름변수의 값이 같으면 공통흐름 접합(common flow junction) 즉, 1-접합으로 연결하여, 0-접합에서는 흐름변수가 보존( $\sum f_i = 0$ )되고, 1-접합에서는 작력변수가 보존( $\sum e_i = 0$ )되는 특성을 갖는다. 표 2는 동적 시스템을 본드선도로 모델링할 때 필요한 가장 기본적인 요소들을 요약한 것이다.

한편, 본드선도는 시스템의 구조가 크고 복잡한 경우에 보다 더 간편하게 모델링하기 위하여 위에서 정의된 기본요소 이외에 다접점필드(multiport field)<sup>(6)</sup> 개념을 이용한 본드선도의 확장요소<sup>(7)</sup>가 있다. 이는 동적 시스템을 구성하는 에너지 저장, 발산 그리고

표 2 본드선도의 기본요소

분류	명 칭	기 호	요소방정식
발생 요소	작력소스	$S_e \overset{e}{\leftarrow}$	$e = e(t)$
	흐름소스	$S_f \overset{f}{\leftarrow}$	$f = f(t)$
저장 요소	커패시턴스	$\overset{e}{\leftarrow} C$	$e = \Phi_c(q)$ $q(t) = q(t_0) + \int^{t} f dt$
	이너턴스	$\overset{e}{\leftarrow} I$	$f = \Phi_l(p)$ $p(t) = p(t_0) + \int^{t} e dt$
발산 요소	저 항	$\overset{e}{\leftarrow} R$	$\Phi R(e, f) = 0$
변환 요소	트랜스포머	$\frac{e_1}{f_1} \overset{e_2}{\leftarrow} F \overset{e_2}{\leftarrow} \frac{e_2}{f_2}$	$e_2 = m e_1$ $m f_2 = f_1$
	자이레이터	$\frac{e_1}{f_1} \overset{e_2}{\leftarrow} G \overset{e_2}{\leftarrow} \frac{e_2}{f_2}$	$e_2 = r f_1$ $r f_2 = e_1$
접합 요소	공통작력접합 (0-접합)	$\frac{1}{2} \overset{e}{\leftarrow} \overset{e}{\leftarrow} \dots \overset{e}{\leftarrow} \overset{e}{\leftarrow} \overset{e}{\leftarrow}$	$e_1 = e_2 = \dots = e_n$ $\sum_{i=1}^n f_i = 0$
	공통흐름접합 (1-접합)	$\frac{1}{2} \overset{e}{\leftarrow} \overset{e}{\leftarrow} \dots \overset{e}{\leftarrow} \overset{e}{\leftarrow} \overset{e}{\leftarrow}$	$f_1 = f_2 = \dots = f_n$ $\sum_{i=1}^n e_i = 0$

변환요소와 같은 여러 개의 단일요소를 합축한 형태로서, 집중하중과 토크를 동시에 받는 구조물이나 에너지 변환이 발생하는 각종 동적 시스템들의 연결부 혹은 유연물체 (flexible body) 등을 모델링할 때 아주 효과적으로 사용된다.<sup>(8,9)</sup>

### 2.2 일률흐름 표시

본드선도에서 일률흐름 표시는 동적 시스템 각 요소들 간의 에너지흐름을 나타내는데 사용한 수동적인 에너지 요소에서는 각 포트상의 일률이 포트의 안쪽으로 들어가는 것을 양(+ )의 방향으로 하여 본드의 한쪽 끝에 부가된 반쪽 화살표로 일률흐름을 표시한다. 다시 말하면  $e$ 와  $f$ 의 정적합수 관계가  $e-f$  평면상에서 제1과 제3사분면에 놓여질 때 일률흐름 표시는 양의 방향이 되고 이 때, 모든 수동적인 에너지 요소는 각각 에너지 저장, 소멸 등의 과정이 수행되어 동적 시스템은 일반적인 보존계 (conservative system)로서 거동하게 된다. 그렇지만 능동적인 요소 (source)는 다른 시스템 요소로 일률을 전달하므로 일률이 모든 능동요소 밖으로 나오는 것을 양의 방향으로 정의한다.

특히, 에너지 접합요소에서의 일률흐름 표시는 각 입·출력 포트에 부가되는 일률변수들의 관계를 작력 혹은 흐름에 대한 구속조건식으로 표현하기 때문에 대단히 중요하다. 이는 시스템 모델링 단계에서 요구되는 기본

적인 물리적법칙들을 표현함과 동시에 본드선도의 최종 목표인 상태방정식을 유도하는데 필수적이다. 즉, 기계시스템에서 작동하는 힘과 평형조건에 관한 관계 및 변형과 기하학적 적합조건에 관한 관계, 전기회로에서 가장 중요한 회로법칙인 Kirchhoff의 전류·전압법칙, 그리고 유체·유압시스템의 질량보존법칙 및 파이프 결점점에서 만족해야 하는 압력강하 제로법칙 등을 일의적으로 결정한다.

표 3은 대표적인 공학시스템에서 접합구조가 갖는 역학적 의미를 요약한 것이다.

### 2.3 인과관계 할당

본드선도에서는 각 시스템 요소들에 대한 입·출력을 나타내기 위하여 인과관계 (causality)를 할당한다. 인과관계 할당은 에너지 저장요소의 입력 에너지변수가 시스템의 상태변수로 선택 가능성을 제시해 주기 때문에 본드선도 모델링 과정에서 가장 중요한 부분이다. 따라서 이 글에서는 동적 시스템의 기본요소들 중에서 에너지 저장요소에 대한 인과관계 할당만을 설명하기로 한다. 그 외의 본드선도 요소인 에너지발생, 발산, 변환 그리고 접합요소에 대한 인과관계 할당은 참고 문헌(10, 11)을 참조하기 바란다.

만약 두 개의 동적 시스템들 간의 상호관계를 표시하기 위하여 인과를 할당한다면 각 입·출력에 나타나는 작력신호의 방향에 따

표 3 대표적인 공학시스템에 있어서의 접합구조의 의미

종 류	접 합 구 조	의 미
전 기 시 스템	0-접합	Kirchhoff의 전류법칙 ( $\sum i=0$ )
	1-접합	Kirchhoff의 전압법칙 ( $\sum e=0$ )
기 계 시 스템	0-접합	기하학적 적합조건식 ( $\sum v=0$ )
	1-접합	동적 평형방정식 ( $\sum F=0$ )
비 압 축 성 유 체 시 스템	0-접합	질량보존법칙 ( $\sum Q=0$ )
	1-접합	압력강하 제로법칙 ( $\sum P=0$ )

라 일의적으로 인과를 부여할 수 있다. 그림 1(a)의 경우 시스템 A는 작력을 출력하여 시스템 B에 영향을 주고 시스템 B는 시스템 A의 작력을 입력으로 하여 시스템 자체의 동적 메카니즘을 거쳐 흐름 효과를 다시 시스템 A로 돌려 보낸다. 그림 1(b)도 그림 1(a)와 같은 방법으로 설명될 수 있다.

그러나 동적 시스템을 구성하는 각 요소들에 대하여 인과관계를 할당한다면 특히 에너지 저장요소의 입력을 어떤 에너지변수로 선정하느냐에 따라서 의미가 달라진다. 왜냐하면 동적 시스템의 상태변수를 선정하기 위해서는 에너지 저장요소가 독립된 에너지 저장요소가 되도록 선정해야 하는데, 이는 에너지 저장요소의 입력이 각 요소의 내부 루프를 통과할 때 적당한 해를 가질 수 있어야 하며 또한 그것은 논리적으로 일관성이 있어야 하기 때문이다. 따라서 인과관계 할당은 적분형, 미분형으로 구분하여 각각의 의미를 부여한다.

그림 2(a)는 커패시턴스로 흐름  $f$ 가 입력으로 들어가 내부 루프 속의 적분기를 통하여 커패시턴스의 요소방정식  $e = \Phi_c(q)$ 가 적분기 출력 신호인 변위  $q$ 에 의하여 일의적

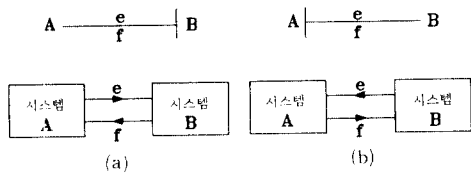


그림 1 인과관계 표시

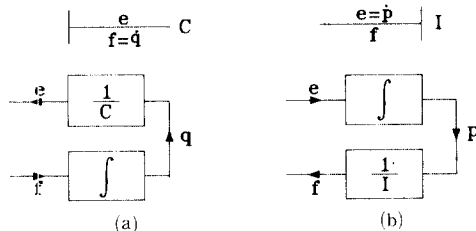


그림 2 에너지 저장요소의 등가 블록선도

으로 결정되고, 그림 2(b)의 인너턴스 경우에는 작력  $e$ 가 입력이 되어 운동량  $p$ 를 생성함으로써 인너턴스의 요소방정식인  $f = \Phi_l(p)$ 가 일의적으로 정해지게 된다. 인과관계 할당을 좀더 자세히 설명하기 위하여 그림 3과 같은 인과관계에 따라 두 개의 일률변수와 두 개의 에너지변수 사이에 할당되는 요소관계를 살펴보기로 한다.

그림 3에서 (a)와 같은 적분형이 될 때는 에너지 저장요소의 입력(커패시턴스의  $f$ , 인너턴스의  $e$ )이 내부 루프 속의 적분기를 통과함으로써 내부루프의 출력(커패시턴스의  $q$ , 인너턴스의  $p$ )이 시스템 출력(커패시턴스의  $e$ , 인너턴스의  $f$ )과 적절한 요소 방정식의 관계를 갖기 때문에  $q$  및  $p$ 의 초기치가 설정됨에 따라 적합한 해를 갖게 된다. 따라서 적분형 인과관계를 갖는 에너지 저장요소의 에너지변수인  $q$ 와  $p$ 를 상태변수로 선정함으로써 제어동역학에 적합한 상태방정식을 얻을 수 있다. 반면에 (b)와 같이 미분형 인과관계가 할당될 때에는 각 에너지변수들의 적분 형태가 시스템의 출력(커패시턴스의  $f$ , 인너턴스의  $e$ )과 관계를 갖게 되어 (a)의 경우와는 달리 일반적으로 적분방정식을 얻게 된다. 이것은 목시적 형태의 미분방정식으로 모든 에너지 저장요소에 미분형 인과관계가 일률적으로 할당되지 않을 때에는 선택된 상태변수가 독립변수가 되지 않고 다른 집합 요소들에 대한 대수적 관계로 결정

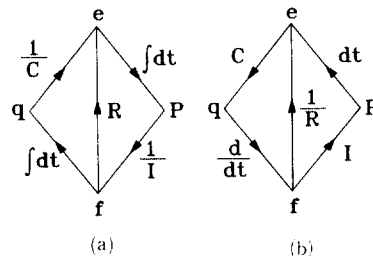


그림 3 입력관계에 따른 일률변수와 에너지변수 사이의 관계

됨을 의미한다.

한편, 본드선도의 인과관계 할당은 위에서 언급한 적분형, 미분형 인과관계와 같은 직접적인 인과관계 할당 이외에 Lagrange 인과관계<sup>(12)</sup>라는 간접적인 인과관계 할당도 사용되는데, 이는 본드선도가 루프를 형성하여 복잡해지고 또한 접합요소에서 비선형 구속조건을 갖는 경우나 에너지 저장요소가 두 개 이상의 입·출력을 갖는 다접점필드가 되어 쉽게 상태방정식을 유도할 수 없는 경우에 아주 유용하게 이용될 수 있다. 특히, Lagrange 인과관계 할당은 본드선도의 확장요소와 함께 사용됨으로써 기계역학적 특성이 복잡한 시스템<sup>(13)</sup>이나 에너지 변환 메카니즘이 여러 경로에서 발생하는 시스템<sup>(14)</sup> 등을 모델링할 때 큰 장점이 있다.

#### 2.4 상태공간 모델식 유도

지금까지 본드선도의 기본요소를 선정하고 일률흐름과 인과관계를 할당하는 방법에 대하여 알아보았다. 이제 이것들을 이용하여 본드선도를 그리는 절차와 본드선도 모델링의 최종 목표인 상태방정식을 유도하는 방법에 대하여 설명하기로 한다.

본드선도를 그리는 절차는 크게 3단계 ① 기본요소 선정, ② 일률흐름 표시, ③ 인과관계 할당)로 이루어진다. 먼저, 기본요소 선정 및 일률흐름 표시는 앞에서 설명된 에너지 발생, 저장, 발산 및 변환요소를 동적 시스템의 각 요소에 적합하게 선정하고 요소와 요소 사이에 적당한 접합요소를 선정하여 본드로 연결한다. 이 때 동적 시스템의 각 요소에 대한 일률흐름 표시는 모두 양의 방향으로 표시되며 일률흐름이 발생하는 접합요소에서는 표 3과 같은 기본적인 물리법칙에 위배되지 않도록 표시되어야 한다. 인과관계 할당은 논리적으로 일관성이 있고 입·출력의 관계를 명확하게 파악하여 각 에너지 저장요소의 요소방정식이 해를 가질 수 있도록 구속되어야 한다. 이는 본드선도에서 인

과관계 할당은 무엇보다도 동적 시스템의 상태변수를 선정하는데 가장 필수적인 작업뿐만 아니라 동적 시스템들 사이의 접합부에서 각 접합요소가 갖는 물리적 특성 즉, 접합요소에서 반드시 결정되어야 할 공통변수로서 0-접합에서는 작력, 1-접합에서는 흐름을 결정하는 중요한 역할을 하기 때문이다.

이제 본드선도 모델링의 최종 목표인 본드선도로부터 상태방정식을 유도하는 방법에 대하여 설명하기로 한다. 상태변수는 어떤 지정된 시간에서 동적 시스템을 완전하게 묘사하는데 요구되는 최소의 변수 집합으로서, 본드선도에서는 독립된 에너지 저장요소의 에너지변수(커패시턴스에서 변위, 인더턴스의 운동량)를 상태변수로 선정한다.<sup>(15)</sup> 그러나 동적 시스템을 구성하는 각 기본요소들에 대한 요소방정식이 선형 시불변 방정식이 되는 경우에는 각 에너지 저장요소의 출력인 일률변수(커패시턴스에서 작력, 인더턴스에서 흐름)를 상태변수로 선정하는 것이 더 유용할 수 있다.

왜냐하면 상태변수로 선정되는 에너지 저장요소의 에너지변수가 동적 시스템 사이의 접합관계에 의해서 결정되는 것이 일률흐름과 관점에서 모델링되는 본드선도 이념에 적합하나 에너지 저장요소의 요소방정식이 선형 시불변 관계가 될 때에는 직접 미분된 형태 즉, 커패시턴스에서는  $e = \mathcal{O}_c(f)$ , 인더턴스에서는  $f = \mathcal{O}_l(e)$ 가 성립될 수 있어 오히려 본드선도상에서 더 직관적으로 상태방정식을 유도할 수 있기 때문이다. 따라서 본드선도가 다접점필드로 구성되지 않는 대부분의 동적 시스템에서는 에너지 저장요소의 요소방정식이 선형 시불변 방정식으로 나타나기 때문에 상태변수를 관심있는 물리량 즉, 커패시턴스에서 변위 혹은 작력, 인더턴스에서 운동량 혹은 흐름을 선택적으로 선정할 수 있다.

본드선도에서 선정한  $n$ 개의 상태변수가 각 에너지 저장요소의 일률변수일 때  $n$ 개의

상태방정식을 유도하는 일반적인 절차는 다음과 같다.

- ① 본드선도의 각 기본요소들에 대한 요소 방정식을 쓴다. 이 때 독립된 에너지 저장요소의 일률변수(커패시턴스에서 작력, 인너턴스에서 흐름)가 상태변수가 된다.
- ② 본드선도에서 선정된 상태변수와 짝을 이루는 변수 즉, 커패시턴스에서 흐름, 인너턴스에서 작력을 본드선도에 표시된 일률흐름 기호인 반쪽 화살표의 방향을 이용하여 0-접합과 1-접합에서 지정된 흐름 및 작력에 관한 접합방정식으로 쓴다.
- ③ 선정된 상태변수에 포함된 보조(secondary) 변수들을 ②에서 얻은 접합 방정식으로 대입하여 독립된 에너지 저장요소에 관한 방정식을 상태변수와 입력변수의 항으로 표시한다.

이와 같은 절차를 통하여  $n$  개의 상태변수와  $m$  개의 소스변수(입력변수)로 표시된  $n$  개의 독립된 에너지 저장요소에 대한 미분방정식인 상태방정식이 유도된다.

### 3. 적용 예

이제 본드선도 모델링 방법을 다음과 같은 두 개의 실제 시스템에 적용하여 상태방정식을 유도해 보기로 한다. 그림 4는 일반적인 구동기로 흔히 사용되는 직류 모터와 유압 서보기구에 대한 개략적인 모델이다.

그림 4와 같은 두 개의 에너지 영역에서 서로 에너지 변환을 그 특성으로 하는 대부

분의 구동기는 보통 2-포트 변환요소 즉, 자이레이터나 트랜스포머를 이용하여 모델링하는 것이 일반적이다. 다시 말하면 전기에너지를 기계에너지로 변환하는 (a)와 같은 직류 모터는 흐름(전류)을 입력으로 작력(토크)을 출력하므로 자이레이터를, 그리고 물체의 위치, 방위, 자세 등을 제어하기 위하여 구성되는 일반적인 서보계에 흔히 사용되는 (b)와 같은 유압 서보밸브는 작력(유압)이 입력되어 작력(피스톤 힘)이 출력되므로 트랜스포머를 이용하여 모델링한다. 또한 구동기는 각 에너지 영역에서 에너지를 저장하고 발산하는 기본적인 동적 특성을 가지고 있으므로 본드선도의 기본요소 중에서 일반화된 커패시턴스, 일반화된 인너턴스 그리고 일반화된 저항을 적당한 접합요소와 연결하여 표시할 수 있다. 따라서 그림 4와 같은 구동기 모델을 본드선도로 나타내고자 할 때는 에너지 변환요소인 자이레이터와 트랜스포머 그리고 에너지 저장 및 발산요소들을 모두 포함시킨 일반화된 구동기 본드모델을 제시함으로써 필요시 즉, (a)나 (b) 중에서 실제 사용할 구동기 종류에 따라 선택적으로 요구되는 파라미터를 선정하여 각 경우에 대한 최종적인 본드선도를 찾는 것이 에너지 변환 장치에서의 에너지 흐름을 체계적으로 이해하는데 더욱 효과적이다.

그림 5는 그림 4와 같은 여러가지 구동기를 일반적으로 나타낼 수 있는 일반화된 구동기의 본드선도이다.

그림 5에 대하여 각 요소들에 대한 물리적인 의미들을 개략적으로 살펴보면, 먼저 작력소스  $e_1, e_2$ 는 각 시스템(직류모터를 MO, 유압 서보밸브를 HV로 표시한다.)의 입력 및 출력측에 가해지는 소스변수로서  $e_1$ 은 MO에서 전압, HV에서 압력을, 그리고  $e_2$ 는 각각에서 모두 외란입력으로 취급될 수 있는 부하를 의미한다. 흐름소스  $f_1, f_2$ 는 MO에서 전류와 각속도를, 그리고 HA에서는 유량과 속도를 나타낸다. 그리고 일반화

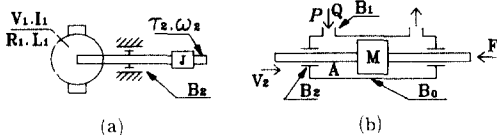


그림 4 직류모터 및 유압 서보기구



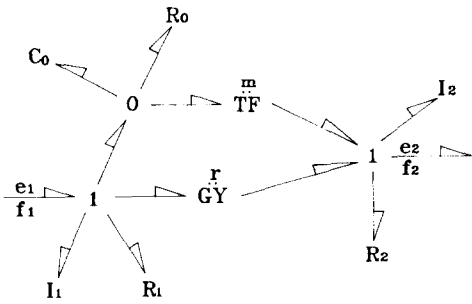


그림 5 일반화된 구동기의 본드선도

된 저항  $R_1, R_2$ 는 각각 입력 및 출력측에서 발생하는 에너지 손실로서 모두 1-접합에 연결되어 있으므로 흐름(MO에서 전류, HV에서 피스톤 속예)에 비례하는 손실이다. 이때  $R_1$ 은 MO 및 HA에서 각각 전기저항체의 발열과 파이프 유동손실을 의미하고,  $R_2$ 는 각각 모터축의 회전으로 인한 베어링 마찰 및 피스톤과 실린더 사이의 마찰에 의한 손실을 의미한다. 한편, 그림 5에는 일반적인 동력전달 과정에서 흔히 볼 수 있는 미끄럼이나 유출 특성 등을 나타내기 위하여 0-접합에 일반적인 저항  $R_0$ 가 첨가되어 있다. 이는 축 등의 긴 물체가 동적 거동으로 탄성처짐이 발생하는 경우나 압축성 유체의 미세한 동특성을 고려하고자 할 때 사용되는 에너지 저장요소인  $C_0$ 와 더불어 일반적인 모델링 과정에서는 생략될 수 있는 요소이나 유압장치 등에 자주 발생하는 밀봉부분에서의 유량손실 등이 간혹 모델링의 정확도를 떨어뜨림을 고려해 볼 때, 무엇보다도 동적 모델링 과정에서 그것들이 갖는 의미를 파악해 보는 것이 중요하다. 또한 운동에너지 저장요소인 일반화된 인덕턴스  $I_1, I_2$ 는 질량을 갖는 운동물체의 관성효과를 나타내는 것으로 MO에서 각각 인덕턴스와 축 관성을, HV에서 각각 질량유량의 관성효과와 피스톤의 관성을 의미하고, 그림 5의 본드상에 표시된  $m$ 과  $r$ 은 각각 트랜스포머 및 사이레이터 계수를 나타낸다.

이제 그림 4의 각 경우에 대한 본드선도를

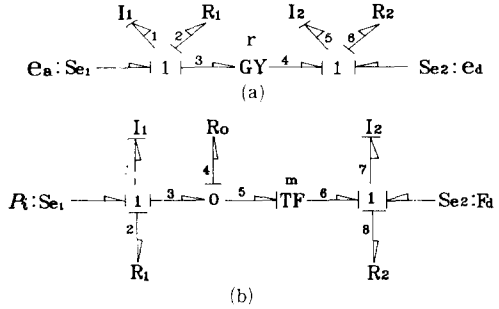


그림 6 직류모터 및 유압 서보밸브에 대한 본드선도

일률흐름 표시 및 인과관계 할당의 절차를 통하여 완성하고 본드선도에서 상태방정식을 유도해 보기로 한다. 그림 6은 직류 모터와 유압 서보밸브에 대한 본드선도로서 개별 시스템에 사용되는 물리적 용어를 본드선도 모델링시 사용되는 네 개의 일반화된 변수로 통용하여 체계적이며 일률적으로 상태방정식을 얻기 위하여 각 본드상에 번호를 기입하여 나타내었다.

먼저, 직류모터에 대한 상태방정식을 앞에서 설명된 절차에 따라 유도해 보기로 한다. 그림 6(a)에 표시된 각 요소에서  $e_a$ 와  $e_d$ 는 각각 시스템의 입력인 아마추어 전압 및 기계장에서 축에 걸린 외부 부하이고,  $R_1$ 과  $R_2$ 는 각각 아마추어 저항 및 기계장에서 축과 베어링 사이의 마찰 특성을 나타낸다. 또한 에너지 저장요소인  $I_1$ 과  $I_2$ 는 각각 아마추어 인덕턴스와 축 관성이다. 그림 6(a)의 인과관계 할당에서 보는 바와 같이 전기장과 기계장에서 인덕턴스  $I_1, I_2$ 가 독립된 에너지 저장요소이므로 이 에너지 저장 요소의 일률변수 즉,  $I_1$ 에는 인덕턴스를 통과하는 전류  $i_1$ 이, 그리고  $I_2$ 에는 회전 축의 각속도  $\dot{\theta}$ 가 상태변수가 된다. 상태방정식을 유도하기 위하여 에너지 저장요소의 요소방정식 및 본드선도상에서 상태변수와 짝을 이루는 일률변수에 관한 접합방정식을 구하면 표 4와 같다.

접합방정식을 사용하여 요소방정식에 있는 모든 보조변수들을 소거시켜 다음과 같이 상

표 4 상태변수와 짝을 이루는 일률변수에 관한 집합 방정식

요소방정식	집합방정식
$df_1/dt = 1/I_1 e_1$	$e_1 = e_a - e_2 - e_3$
$df_5/dt = 1/I_2 e_5$	$e_5 = e_4 - e_6 + e_d$
$e_2 = R_1 f_2$	$f_2 = f_1$
$e_6 = R_2 f_6$	$f_6 = f_5$
$e_3 = r f_4$	$f_4 = f_5$
$e_4 = r f_3$	$f_3 = f_1$

표 5 상태방정식을 유도하는데 필요한 방정식

요소방정식	집합방정식
$df_1/dt = 1/I_1 e_1$	$e_1 = P_a - e_2 - e_3,$ $e_3 = e_4$
$df_5/dt = 1/I_2 e_5$	$e_5 = e_6 - e_8 + F_d$
$e_2 = R_1 f_2$	$f_2 = f_1$
$e_4 = R_0 f_4$	$f_4 = f_3 - f_5, f_3 = f_1$
$e_8 = R_2 f_8$	$f_8 = f_7$
$e_6 = m e_5$	$e_5 = e_4$
$f_5 = m f_6$	$f_6 = f_7$

대변수( $f_1, f_2$ )와 소스변수( $e_a, e_d$ )로 표시되는 두 개의 1차 미분방정식인 상태방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{df_1}{dt} = \frac{1}{I_1} [e_a - R_1 f_1 - r f_5] \quad (6)$$

$$\frac{df_5}{dt} = \frac{1}{I_2} [r f_1 - R_2 f_5 + e_d] \quad (7)$$

끝으로 그림 6(a)의 유압 서보밸브에 대한 상태방정식을 구해보기로 한다. 그림 6(b)는 위에서 설명된 0-접합에서의 동적 특성 중에서  $C_0$ 의 효과는 무시하고 즉, 작동유체는 비압축성이며 공급라인, 구동기 벽 등은 모두 변형이 없는 강체로 가정하고 단지 실린더와 피스톤 사이의 밀봉부분인 실(seal)에서의 유량손실만 고려한 본드선도이다. 그림 6(b)에서 작력소스인  $P_i$ 와  $F_d$ 는 각각 유량의 입·출구에서 측정된 압력의 차와 피스톤에 걸린 외부부하이며, 일반화된 저항  $R_1, R_0$  그리고  $R_2$ 는 파이프 유동손실, 실에서의

유량손실 그리고 실린더와 피스톤의 접촉운동에 의한 미끄럼마찰을 각각 나타낸다. 또한 일반화된 이너턴스  $I_1, I_2$ 는 각각 질량유체의 유동 및 피스톤 관성을 나타내기 위한 에너지 저장요소이다. 한편 에너지 저장요소인 이너턴스  $I_1, I_2$ 는 모두 적분형 인과관계가 할당되어 있으므로 에너지 저장요소의 일률변수인 일반화된 흐름 즉, 공급라인을 따라 흐르는 체적유량(volume flow)  $f_1$ 과 피스톤의 속도  $f_7$ 이 상태변수가 된다. 상태방정식을 유도하는데 필요한 요소방정식과 집합방정식은 표 5와 같다.

따라서 집합방정식을 사용하여 요소방정식에 있는 모든 보조변수들을 소거시켜 상태변수( $f_1, f_7$ )와 소스변수( $P_i, F_d$ )로 표시되는 상태방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$\frac{df_1}{dt} = \frac{1}{I_1} [P_i - R_1 f_1 - R_0 (f_1 - m f_7)] \quad (8)$$

$$\frac{df_7}{dt} = \frac{1}{I_2} [m R_0 (f_1 - m f_7) - R_2 f_7 + F_d] \quad (9)$$

지금까지 본드선도의 기본요소인 에너지 소스, 저장, 발산, 변환 그리고 집합요소를 동적 시스템의 액튜에이터로 흔히 사용되는 구동기(직류모터와 유압 서보밸브) 모델에 적용하여 최종적인 상태방정식을 아주 조직적으로 유도해 보았다. 이와 같이 본드선도 모델링 방법은 근본적으로 동적 시스템의 상태방정식을 유도함에 있어서, 일률흐름 관점에서 모델링될 시스템이 상사시스템이면 어디에나 똑같이 적용할 수 있을 뿐만 아니라 응용이 편리하고 각 요소들이 포함하는 정보가 많아 거의 대부분의 물리시스템에 폭넓게 이용되고 있다.

#### 4. 맺음말

이상에서 살펴본 바와 같이 본드선도는 물리적 등가가 적용되는 모든 상사 시스템을 대단히 조직적이며 일관성있게 모델링할 수 있을 뿐만 아니라 시스템의 동적 방정식을

제어동역학 관점에 유리한 상태방정식으로 직접 유도할 수 있다. 또한 본드선도는 모델링 단계에서 무시된 각 요소들의 동적 특성 즉, 기계시스템에서 회전축의 탄성처짐이나 운동 물체들 사이의 마찰 효과, 전기·자기 시스템에서 자속유출량, 그리고 유체·유압 시스템에서 밀봉부분의 유량손실이나 압축성 유체 특성 등을 기존에 구성된 본드선도의 변경 없이 각 특성들이 나타나는 본드상에 적절한 집합요소와 함께 단순히 첨가하여 고려할 수 있기 때문에 모델링 과정을 다시 반복하지 않고도 무시된 동적 특성들이 전체 시스템에 미치는 영향을 파악할 수 있다.

특히, 본드선도가 에너지 변환 장치나 에너지 유동 메카니즘이 복잡한 다에너지역 시스템 등에 적용될 때는 각 에너지 저장요소의 동적 거동이 전체시스템에 미치는 효과를 시각적으로 보다 세밀히 파악할 수 있을 뿐만 아니라 구성된 본드선도에 인과관계를 할당하여 본드선도의 집합요소를 통하여 유도된 최종적인 동적 방정식이 현실적으로 실현 가능한 물리시스템인지 파악할 수 있어 본드선도 모델링 단계에서 시스템을 묘사하는 동적 방정식의 옳고 그름을 평가할 수 있다.

이와 같이 본드선도는 기계, 전기·자기, 유체·유압, 열 시스템 및 이들이 조합된 복잡한 다에너지역 시스템 등을 효과적으로 모델링할 수 있는 매우 유용한 동적 시스템 모델링 방법이다.

### 참고문헌

(1) Paynter, H. M., 1961, Analysis and Design of Engineering Systems, M.I.T. Press.  
 (2) Rosenberg, R. C. and Karnopp, D., 1983, Introduction to Physical System Dynamics, McGraw-Hill.  
 (3) Karnopp, D. and Rosenberg, R. C., 1975, System Dynamics: A Unified Approach,

J. Wiley and Sons.  
 (4) TUTSIM Users Manual, 1985, Applied i.  
 (5) The ENPORT Reference Manual, 1987, ROSENCODE Associates Inc.  
 (6) Rosenberg, R. C., 1972, "Multiport Models in Mechanics," ASME J. of Dyn. Sys. Meas. and Control, pp. 206~212.  
 (7) Ingrim, M. E. and Masada, G. Y., 1991, "The Extended Bond Graph Notation," ASME J. of Dyn. Sys. Meas. and Control, pp. 113~117.  
 (8) Busch-Vishniac, L. J., 1990, "Spatially Distributed Transducers: Part I-Coupled Two Port Models," ASME J. of Dyn. Sys. Meas. and Control, pp. 372~380.  
 (9) Beaman, J.J. and Breedveld, P.C., 1988, "Physical Modeling with Eulerian Frames and Bond Graphs," ASME J. of Dyn. Sys. Meas. and Control, pp. 182~188.  
 (10) 김종식, 1988, 선형제어시스템 공학, 청문각.  
 (11) Takahashi, Y. and Rabins, M. J. and Auslander, D. M., 1972, Control and Dynamic Systems, Addison-Wesley Pub. Co.  
 (12) Brown, F. T., 1972, "Lagrangian Bond Graph," ASME J. of Dyn. Sys. Meas. and Control, pp. 213~221.  
 (13) Khulief, Y. A., 1991, "Constrained Lagrangian Formulation for Multibody Systems Using Bond Graphs," JSME Int. J. pp. 362-369.  
 (14) 김종식, 박전수, 1991, "자기부상 시스템의 본드선도 모델링 및 LQG/LTR 제어기 설계," 대한기계학회논문집 제15권 제5호, pp. 1620~1634.  
 (15) Karnopp, D., 1983, "Alternative Bond Graph Causal Patterns and Equation Formulations for Dynamic System," ASME J. of Dyn. Sys. Meas. and Control, pp. 58~63.