

응력해석에 이용되는 유한요소법의 이해

민옥기 · 김용우

Understanding of Finite Element Method for Stress Analysis

Oak-Key Min · Yong-Woo Kim



- 민옥기(연세대 기계설계학과)
- 1947년생.
- 응용역학 및 유한요소해석을 전공하였으며, 실험해석 및 유한요소이론과 충격역학에 관심이 있다.



- 김용우(순천대 기계공학과)
- 1958년생.
- 고체역학 및 수치해석을 전공하였으며, 유한요소법의 이론 및 응용과 진동분해에 관심이 있다.

1. 머리말

유한요소법은 구조공학분야에서 발전하여 과학기술 전반에 통용되는 수치해석의 한 방법 또는 기술로서 각광받고 있다. 이 기법은 변분원리에 수학적 기초를 두는 미분방정식의 수치해법의 하나라고 할 수 있다. 이 글에서는 고체역학 부문에 한정하여 유한요소법의 기본체계, 응력계산과 관련하여 중요 수치현상, 그리고 최근 국내외학계의 연구동향 및 상용 패키지 사용시 주의사항에 관하여 언급한다.

2. 유한요소법의 기본 체계

유한요소법의 수학적 배경이 되고 있는 변분법은 그림 1에서 예시한 바와 같이 현상계를 연구하는 여러 학문 분야에서 널리 응용되고 있다. 그 이유는 대부분의 현상계가 범함수의 정류상태(stationary condition)에서 거동하기 때문이다.

계의 물리적현상(변형)의 거동에 관한 이

론적 수식화는 지배방정식 또는 (변분원리를 적용한) 에너지 범함수에 의해 표현된다. 그러므로 계의 물리적현상을 묘사하는 이론적 지배방정식 또는 에너지 범함수를 수학적 모델이라 볼 수 있다. 물리적현상계에 대한 이론적 해석은 바로 이 수학적 모델로부터 출발한다. 이 수학적 모델의 해가 물리적현상계의 거동을 정확히 묘사한다면 수학적 모델의 해(변위, 변형률, 응력 등)를 구하는 것이 바로 물리적현상을 예측하는 작업이 된다. 이 수학적 모델을 푸는 방법은 해석적 방법과 직접해법으로 분류할 수 있다.⁽¹⁾ 해석적 방법에서는 미분방정식을 미분·적분론, 함수론 등을 사용하여 해를 구한다. 이러한 해석적 방법은 이론 탄성학의 중심 과제이기도 하며 이에 대한 연구는 이미 17세기 이래 많은 수학자, 물리학자에 의해 훌륭한 이론적 체계가 완성되었다. 그러나 일반적으로 미분방정식을 해석적으로 이론해를 구할 수 있는 경우는 극히 제한되어 있다. 변수가 많아지거나, 기하학적 형상이 복잡하거나, 경계조건이 복잡할수록, 차원이 높아질수록, 미분방정식의 이론해를 구하기 어려

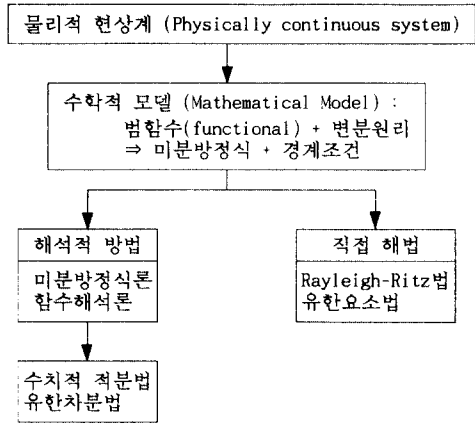


그림 1 물리적 현상계와 수학적 모델의 해법

워진다. 따라서 오래전부터 범함수에 변분원리를 적용하여 직접 근사해를 구하는 방법이 연구되어 왔다. 그 전형적인 방법의 하나가 Rayleigh-Ritz법이며, 유한요소법은 이 방법에 선형대수론을 사용하여 조직화한 방법으로 볼 수 있다.

일반적으로 수학적 모델에 대한 이론해를 구한다는 것은 연속체의 영역을 가상의 미소요소(infinitesimal element)의 집합체라고 간주하여 연속체의 물리적 양을 구하는 과정

인데 반하여, 근사해를 구할 때는 연속체의 영역을 가상의 유한요소(finite element)의 집합체로 간주한다. 따라서 근사해를 구하는 과정은 연속적인 수학적 모델을 ① 무한개의 자유도를 갖는 모델을 유한개의 자유도를 갖는 모델로 변환시키고, ② 미분 및 적분 연산자(operator)를 대수적 연산자로 변환시키는 과정을 포함하게 된다.

2.1 직접해법

범함수에 변분원리를 적용하여 근사해를 직접 얻는 직접해법은 그림 2와 같이 세 가지 방법으로 대별할 수 있다.⁽¹⁾

변위법은 직접해법의 대표적인 방법으로 가장 널리 사용되고 있다. 이 방법은 첫째 탄성체 내의 변위를 변형의 적합조건을 고려하여 가정한 다음, 변형률-변위 관계식 및 응력-변형률 관계식을 이용하여 변형률과 응력을 변위로써 표현한 후, 마지막으로 가상일의 원리를 적용하여 평형방정식이 근사적으로 만족되도록 변위의 미정계수에 관한 1차 연립방정식을 풀이하는 방법이다. 이에 반하여 응력법은 내력(응력)을 미지변수로 잡고 평형방정식을 이용하여 내력과 외력과

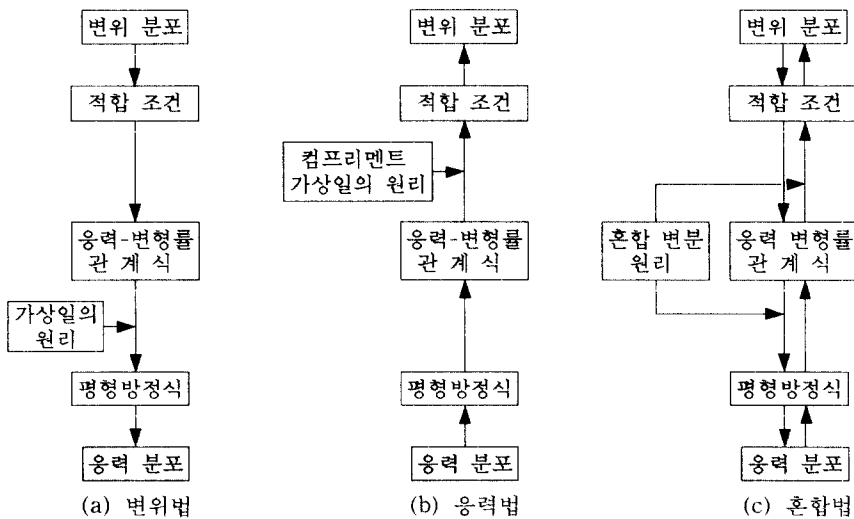


그림 2 유한요소법의 세 가지 해법

의 관계를 구한다. 다음으로 응력-변형률의 관계식을 이용하여 변형률을 외력과 미지의 내력으로 나타낸 다음, 마지막으로 변형의 적합조건이 만족되도록 컴프리멘트 가상일의 원리를 적용하여 미지내력에 관한 1차 연립 방정식을 풀이하는 방법이다. 혼합법은 변위와 내력을 미지변수로 잡아 적합조건과 평형 방정식이 근사적으로 만족되도록 Reissner의 변분원리와 같은 혼합변분원리를 적용하여 변위와 내력을 구하는 방법이다.

2.2 변분원리에 따른 유한요소 모델

2.1절에서 보인 바와 같이 유한요소 해법은 범함수의 종류와 그에 적용되는 변분원리

에 따라 여러 방법으로 분류할 수 있다.⁽²⁾ 이 글에서는 선형탄성론으로 다룰 수 있는 범위의 문제에 대해 유한요소 모델 분류의 기준이 되는 변분원리와 함께 유한요소 모델과 그 상호관계를 간략히 설명한다.

그림 3은 각 변분원리 간의 관계를 도식화한 것이다. 그림 3에서 보인 바와 같이 각각의 변분원리는 일반화 원리(Hu-Washizu원리)로부터 유도될 수 있다. 즉, 변위, 변형률, 응력 등이 변형의 적합조건, 평형방정식, 기학적 경계조건 및 역학적 경계조건을 만족시키도록 설정된 일반화 원리의 범함수로부터, 변위가 평형방정식과 역학적 경계조건을 만족시키도록 하는 최소 포텐셜 에너

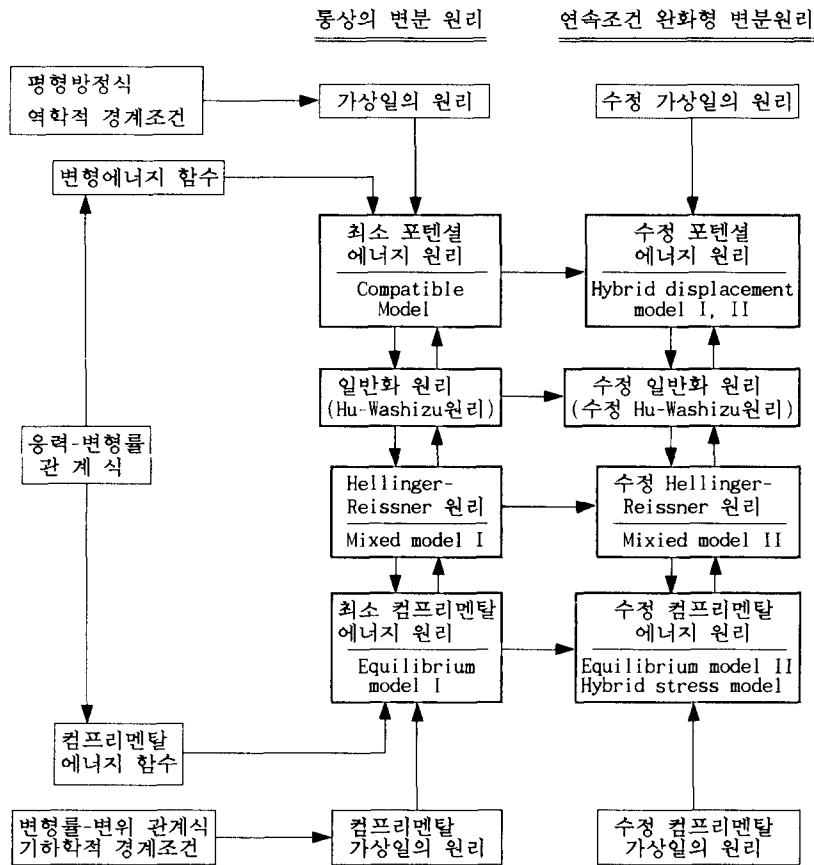


그림 3 미소변위 탄성론의 변분원리들

지 원리의 범함수를 유도할 수 있으며, 또한 적합조건과 기하학적 경계조건이 만족되도록 하는 최소 컴프리멘탈 에너지 원리를 유도할 수 있다는 것이다. 이러한 관점에서 그림 3의 각 변분원리는 일반화 원리의 특수한 경우로 간주할 수 있다. 통상의 변분원리들의 범함수는 각 요소 간의 인접부에서 변위 또는 응력의 연속성을 보장하지 않는다. 따라서 변위나 응력은 요소간 인접부에서 연속성이 만족되도록 가정하여야 한다. 이러한 부대 조건을 범함수에 포함시킴으로써 요소간 인접부에서 변위 또는 응력의 연속조건을 완화시킨 범함수를 갖도록 한 변분원리를 연속조건 완화형 변분원리라고 한다.

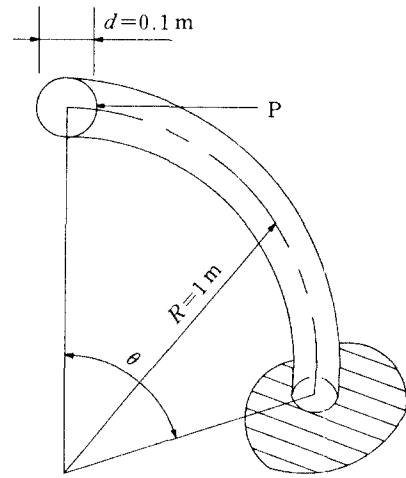
그림 3의 각 유한요소 모델들을 이용한 해법을 그림 2의 세 가지 해법과 관련하여 분류하면 ① 변위법 (compatible model, hybrid displacement model), ② 응력법 (equilibrium model, hybrid stress model), ③ 혼합법 (mixed model)으로 나눌 수 있다.

3. 수치해(변위 및 응력)의 정확도

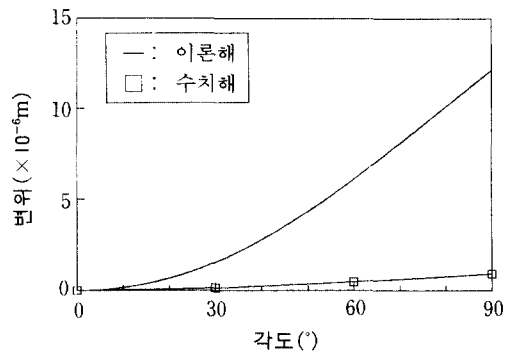
앞의 2장에서 세 가지 해법 중 변위법이 적용성이 유연하여 (즉, 정적변형, 진동, 좌굴, 대변형 문제 등 적용 범위가 넓어서) 가장 널리 사용되고 있으며, 변위법 중에서도 전통적인 내삽함수 (conventional interpolation function; 예를 들면, Lagrangian, serendipity, Hermite polynomials)를 변위함수로 채용하는 변위법이 가장 널리 보편화되어 있다. 따라서 본장에서는 전통적인 내삽함수를 사용하는 변위법을 위주로 수치해의 정확도에 관한 최근의 국내외 연구를 참고하여 수치해의 정확도와 관련한 수치적 현상들에 대해 살펴본다.

3.1 가성구속에 의한 강성과잉현상

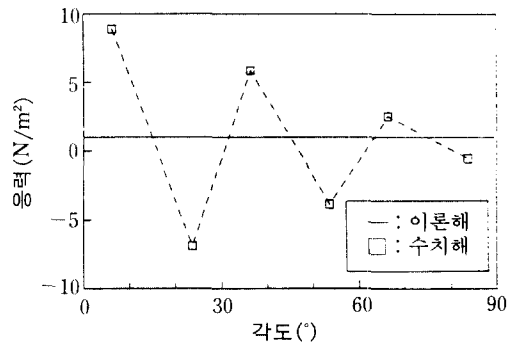
강성과잉현상 (locking phenomenon)에 의해 손상된 변위 및 응력은 그림 4와 같이 실



(a) 모델 ($R=1\text{ m}$, $d=0.1\text{ m}$, $\theta=90^\circ$, $P=1\text{ N}$)



(b) 변위(처짐)



(c) 전단응력

그림 4 강성과잉현상에 의해 손상된 선형 변의 변형 곡선 보의 변위 및 응력

제의 값과 비교해 볼 때 심각한 오차를 동반하고 있음을 알 수 있다. 즉, 변위는 실제의 값보다 훨씬 작게 계산되고, 응력분포는 실제 값을 중심으로 큰 폭으로 흔들린다. 이러한 현상은 강성(stiffness)이 실제의 것보다 훨씬 크게 계산되는 데 연유한다. 강성이 크게 계산되는 것은 변형의 적합조건을 만족시키지 못하는 가성구속이 존재하기 때문이다.^(4~7) 결국 강성과잉현상은 가성구속의 존재에 말미암은 것이나, 가성구속이 존재한다고 해서 반드시 강성과잉현상이 발생하는 것은 아니다. 참고로 강성과잉현상이 발생하는 필요 조건들에 관한 일반적인 연구는 없으나 필자의 경험과 최근의 연구^(4~13)를 토대로 그 필요조건들을 열거하면 다음과 같이 요약할 수 있다.

① 가성계수(spurious coefficient)가 존재할 것.

② 페널티 파라미터가 가성에너지모드(가성구속을 포함하는 에너지)와 결합되어 있을 것.

③ 이론적 적분(analytical integration) 또는 완전 적분을 사용할 것.

④ 저차의 변위함수를 사용할 것.
따라서 강성과잉현상이 발생하지 않도록 하기 위해서는 위의 네 가지 조건을 피하면 된다. 그러나 네번째의 조건 때문에 고차의 변위함수를 사용한다면, 계산효율(computational efficiency)의 측면에서 문제가 된다. 따라서 가성구속이 나타나지 않도록, 즉 변형의 적합조건을 만족하도록 변위함수를 가정하거나, 또는 감차적분법을 사용함으로써 강성과잉현상을 피할 수 있다.

강성과잉현상에 관련한 연구는 지난 20년간 학자들의 주요 연구 소재의 하나가 되어왔다. 이에 따라 많은 성과를 거두고 있으나 교과서에서 체계적으로 다루기에는 다소 미진한 측면도 있는 것으로 사료된다. 그 동안 강성과잉현상을 완화 또는 피할 수 있는 여러 방법들이 제안되었는데 이를 열거하면 다

음과 같다.

- 선별적감차적분 또는 일괄적감차적분^(14~18)
- Anisoparametric Interpolation^(19,20)
- 장의 일관성(field consistency)^(5~7)
- 변형률가정법(assumed strain method)^(21,22)
- 혼합법(mixed formulation), 하이브리드 법(hybrid formulation)^(23~25)
- Mode-decomposition Approach⁽²⁶⁾
- Free-formulation^(27,28)
- Discrete Kirchoff Theory⁽²⁹⁾

3.2 최적 응력점^(30~33)

가정한 변위함수가 실제 변위를 정확히 묘사할 수 있을 정도의 자유도를 갖고 있지 않는 한, 근사 변형률은 실제 변형률과 요소내의 모든 점에서 동일한 값으로 계산될 수 없고 다만 유한한 갯수의 위치에서만 동일한 값으로 계산된다. 그 위치와 갯수는 가정한 변위함수의 차수, 실제 변형률의 차수, 변위-변형률의 관계, 적분 차수 등에 따라 다르다. 그러나 요소내에는 특정한 지점에서 변

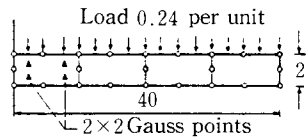
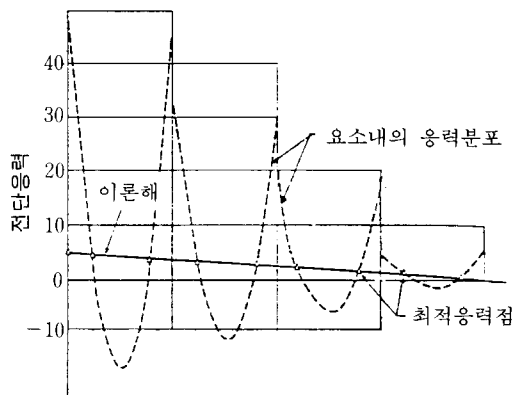


그림 5 외팔보 요소(8절점 요소)의 최적 응력점⁽³⁰⁾

형물을 채취할 경우, 요소의 크기가 작아짐에 따라서 수치해를 이론해에 가장 빨리 수렴시키는 특정한 위치가 존재한다. 이 위치 역시 요소의 크기가 작아짐에 따라서 특정한 점으로 수렴한다. 바로 이 수렴 위치를 최적 응력점이라 부른다. 외팔보에 대한 최적 응력점을 그림 5에 예시하였다. 일반적으로 최적 응력점의 위치는 “(가정한 변위함수의 차수) - (변형률의 미분 차수)” 개의 적분점을 취하는 수치적분점과 일치한다. 따라서 감차적분을 사용하는 것은 바로 이러한 이유에서 비롯되는 측면도 있다. 또한 가성구속이 존재하는 경우에도 최적 응력점은 여전히 유효하며 좀더 중요한 의미를 갖는다. 즉, 최적 응력점에서 변형률을 채취하면 가성구속이 사라지는 결과를 낳게 되어 가성구속에 의한 오차를 방지할 수 있게 된다. 바로 이러한 이유로 감차적분법은 강성과잉현상을 해결하는 한 방법으로 일반화되어 있다. ^(14~18)

3.3 단일 요소의 가성모드 ^(14~36)

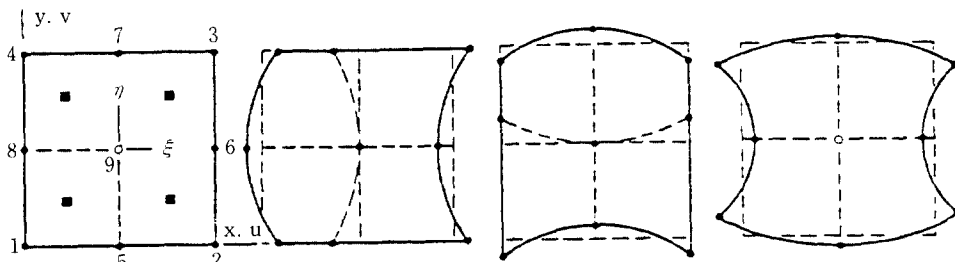
가성구속에 의한 오차발생을 방지하고, 정확한 수치해를 얻기 위해서 최적 응력점에서 변형률(또는 응력)을 채취해야 한다. 이를 위해서는 감차적분방법을 사용하게 된다. 감차적분은 이러한 이유 외에 계산의 효율성 측면에서도 중요하다. 왜냐하면 대부분의 계산시간이 강성행렬을 계산하는데 소요되기 때문이다. 그러나 무조건적인 감차적분의 사

용은 삼가해야 한다. 유한요소 수식화에 대한 검토 없이 감차적분을 사용하면 요소에 부과되는 구속조건의 부족을 초래하여 그림 6에 보인 바와 같이 제로 에너지 모드라 부르는 또 다른 오차발생의 요인이 될 수 있기 때문이다.

제로에너지 모드란 수치현상의 하나로, 물체가 변형이 되었음에도 불구하고 그 변형 에너지는 영으로 계산되는 현상이다. 물론 이러한 결과는 실제현상과는 전혀 다른 수치 해석상의 오차인 것이다. 이러한 모드를 제로에너지 모드(zero-energy mode), Kinetic Mode, 가성 강체운동(spurious rigid body motion) 등의 다양한 이름으로 불리우고 있다. 가성모드가 존재하는 경우 고유해석을 해보면 강체운동모드가 실제보다 더 많이 계산된다.

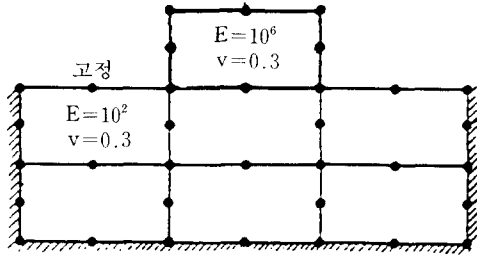
3.4 가성모드의 전파

메쉬(mesh)에 제로에너지 모드가 존재하지 않는 경우라 할지라도, 메쉬를 구성하는 단일 요소 자체가 제로에너지 모드를 갖고 있는 경우가 있다. 그림 7에 나타낸 바와 같이 메쉬는 제로에너지 모드와 관련된 비정상적인 거동을 하여 오차를 일으킬 수 있다. 따라서 일반적으로 단일 요소가 가성 에너지 모드를 갖는 경우에는 가성모드의 전파(propagation of spurious mode)에 의한 오차발생 가능성을 고려하여야 한다.

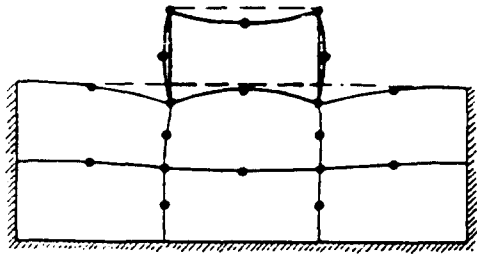


(a) 8절점/9절점 (b) 가성모드(9절점) (c) 가성모드(9절점) (d) 가성모드(8, 9절점)

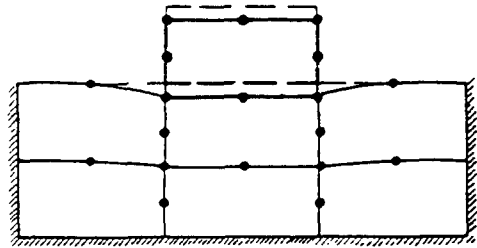
그림 6 일팔보 감차적분시의 8절점 및 9절점 요소의 가성모드⁽⁴⁾



(a) 모델



(b) 2×2 일괄적 감차적분



(c) 3×3 완전적분

그림 7 가성모드의 전파에 의한 수치해의 손상⁽⁴⁾

3.5 국내의 주목할만한 요소 개발

지금까지 유한요소법을 사용할 때 나타날 수 있는 수치적 현상에 대해 소개하였다. 정확한 수치해를 구하기 위해서는 이러한 수치적 현상들과 수치현상 간의 상호관계를 염두에 두고 요소의 선택에 신중을 기해야 한다. 그러나 각각의 수치적 현상에 관한 연구는 잘 되어 있는 편이나 이들의 상호관계에 대한 이론적 연구가 미흡한 관계로, 요소를 선택하는데 기준이 될 만한 이론이 미비한 형편이다. 최근 필자들은 가성구속, 최적 응력점, 적분방법들, 제로에너지 모드 및 메쉬의 제로에너지 모드 등은 상호간에 밀접한 관계가 있다는 사실을 이론적으로 설명할 수 있

는 통합적 이론을 개발하였다.⁽¹³⁾ 이 이론에 비추어 보아 이론적으로 결점이 거의 없으며 성능이 좋은 요소라 판단되는, 최근 국내에서 발표된 요소들을 소개한다.

(1) 강성과잉현상이 없는 곡률 보 및 평판 요소⁽³⁷⁾

곡률을 기초로 한 수정변위장 개념을 도입하고 Hermite Polynomial을 사용하여 개발된 티모센코 직선 및 곡선 보 요소와 민드린 판요소이다. 수렴성이 뛰어나고 정확도가 높을 뿐만 아니라, 특히 그 수식화 과정은 독창적인 것으로 새로운 시각에서 개발된 우수한 성능의 요소이다. 전통적인 내삽함수를 사용하고 있어 기존 패키지에의 적용이 유리할 것으로 사료된다. 이 요소가 강성과잉현상을 일으키지 않는 것은 곡률을 기초로 한 수정변위장 개념을 사용함으로써 범함수에서부터 가성계수⁽¹¹⁾의 발생 소지를 차단하였기 때문이다. 또한 강성행렬을 이론적으로 적분하여 계산, 정형화시켰기에 가성모드는 전혀 발생하지 않을 뿐만 아니라 적분으로 인한 계산시간이 단축된다.

(2) 전단효과를 고려한 곡선 보 요소⁽³⁸⁾

유한요소의 수렴조건 (강제운동묘사 조건 및 일정 변형률묘사 조건)에 충실한 요소로서 수렴성이 좋다. 특히 Day and Potts의 변형률-변위 관계식⁽³⁹⁾을 채용하였기에 곡률반경이 달라지는 모델에서도 정확도가 우수할 것으로 판단된다. 변위함수를 다항식으로 가정하지 아니하고 수렴조건에 충실하여 유도된 삼각함수의 다항식을 사용함으로써 가성구속 및 가성모드의 발생 소지를 차단하고 있다.

(3) 면의 변형이 가능한 링 요소⁽⁴⁰⁾

Kirkhope의 링 이론에 바탕을 두고 있으나 가성모드의 도입을 막기 위하여 새로운 변수를 사용하고 있다. 전통적인 내삽함수를 사용하면서도 감차적분을 유효적절히 배합하여 사용하는 선별적 감차적분을 채용함으로써 강성과잉현상과 가성모드의 발생을 차단

하고 있으며, 특히 이상강체운동(incorrect rigid body motion)이라는 새로운 수치현상의 발견이 이채롭다. 강성이 약한 링에 대해서도 강체운동을 정확히 묘사해내는 요소이다.

4. 적응적 유한요소 세분

유한요소법은 근사해법이기에 앞의 3장에서 소개한 수치현상에 의한 오차를 제외하더라도 수치해는 크고 작건 간에 반드시 오차를 동반한다. 그러나 수렴성이 확보된 요소라면 유한요소 모델을 세분화할수록(h ·세분; h refinement) 또는 가정한 변위함수의 차수를 증가시킬수록(p ·세분; p refinement) 그 오차는 감소한다. 따라서 적절한 오차측도(error norm)를 채용함으로써 오차의 정도를 알 수 있다면, 오차가 큰 요소에 대하여 h ·세분하거나 p ·세분하여, 또는 양자를 조합하여 세분하는 방식(h - p 세분, h - p refinement)으로 원하는 오차 정도 범위 내의 수치해를 얻을 수 있다. 이러한 기법을 적응기법(adaptive technique)이라고 부른다.^(3,4)

적응기법에서 취급되는 주요 문제는, 첫째 유한요소로 분할된 모델에 대한 오차를 효율적으로 계산하는 기법과 둘째 원하는 정확도의 수치해를 얻기 위한 경제적 세분화를 보다 빨리 달성하는 기법에 관한 것이다. 최근에 이에 관한 연구가 진행되면서 다양한 오차측도와 방법론이 개발되고 있다. 그러나 아직도 오차측도 계산에 소요되는 계산비용 및 적응기법에 사용되는 알고리즘(algorithm)의 효율성에 관한 연구가 계속되고 있다.

5. 상용 패키지 사용시 주의점

최근까지 개발되어 사용되고 있는 유한요소법을 응용한 패키지는 수십 종에 달하고 있다. 따라서 패키지를 선택할 때는, 첫째

사용자가 주로 다루는 해석대상 및 해결하고자 하는 문제에 대한 고려, 둘째 사용자가 보유하고 있는 하드웨어에 대한 고려가 선행된다. 이를 바탕으로 패키지에 대한 각종 특성 및 한계점을 조사하여 적절한 것을 선택하게 된다.

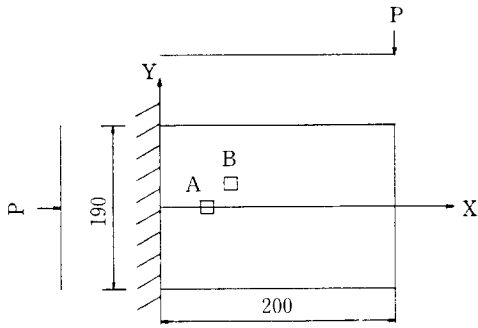
유한요소법에 관한 이론 또는 각종 유한요소의 성능에 정통해야만이 패키지를 사용할 수 있는 것은 아니다. 그러나 해석대상을 모델링하는 과정과 해석결과에 대한 검토를 할 때는 해석대상의 물리적현상에 정통할 필요가 있다. 왜냐하면 부정확한 모델링에 의한 수치해는 무의미하기 때문이다. 또한 근사한 모델링에 의한 시뮬레이션일지라도 수치해는 항상 오차를 동반하며 심지어는 실제의 현상과 전혀 다른 결과를 출력할 수 있기 때문이다.

수치해석 결과가 실제의 물리적현상과 거리가 있다고 판단될 때는 그 원인을 추적해볼 필요가 있다. 입력 데이터는 정확히 작성되었는가, 출력 데이터의 물리적 또는 이론적 의미는 제대로 알고 있는가, 사용한 유한요소의 선택은 적절한가, 그 유한요소의 성능 및 한계점을 제대로 파악하고 있는가, 요소분할이 적절한가, 경계조건에 대한 모델링에 착오는 없었는가 등에 대한 검토가 뒤따라야 한다. 이러한 검토 과정에서는 유한요소이론과 응용에 정통한 전문가의 도움이 필요하다.

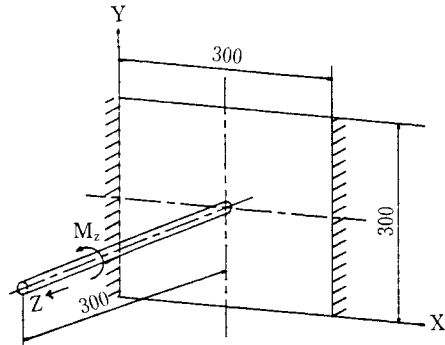
다음은 앞서 지적한 패키지 사용시 유의해야 할 점에 부주의하여 실수하기 쉬운 사례들이다.

(예 1) 얇은 판의 응력 계산^(41,42)

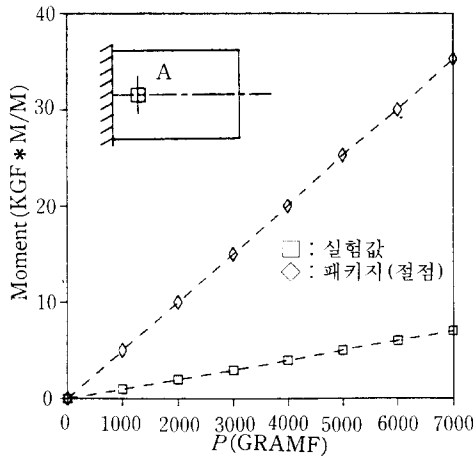
패키지는 무엇인가 의미가 있는 값이든 무의미한 값이든 간에 구별하지 아니하고 해석결과를 출력한다. 패키지를 이용하여 판의 응력을 계산한 결과를 실험값과 비교한 예를 그림 8에 도시하였다. 패키지의 계산결과가 실험값과 크게 다를 수도 있다는 예로부터,



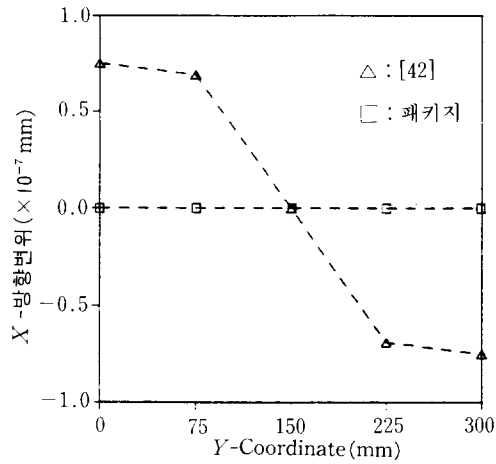
(a) 모델 (A(40,0)), B(48.5, -10)



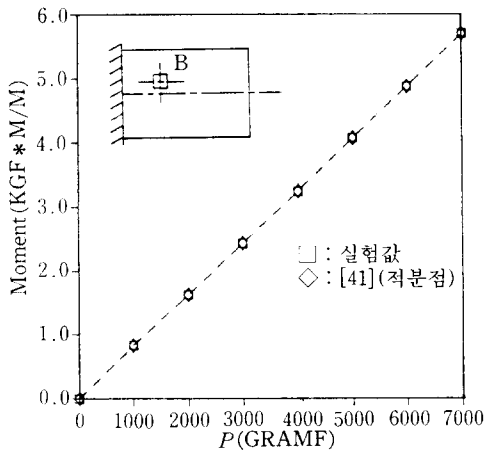
(a) 모델



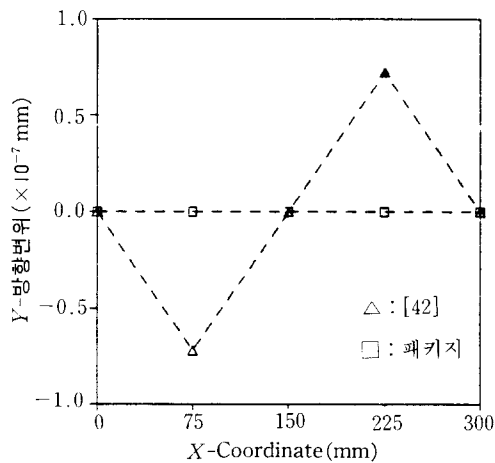
(b) 절점 A에서의 응력 (M_x)



(b) X=150 선상에서 판의 X-방향의 변위

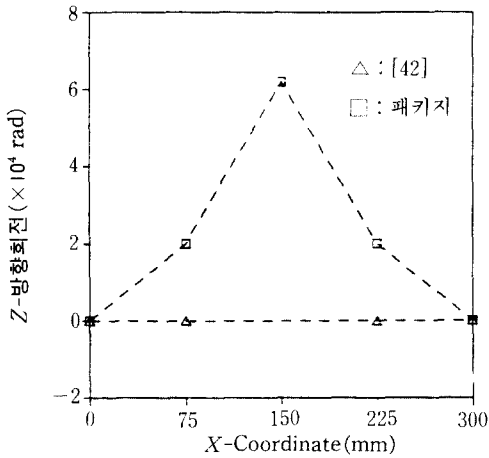


(c) 적분점 B에서의 응력 (M_x)

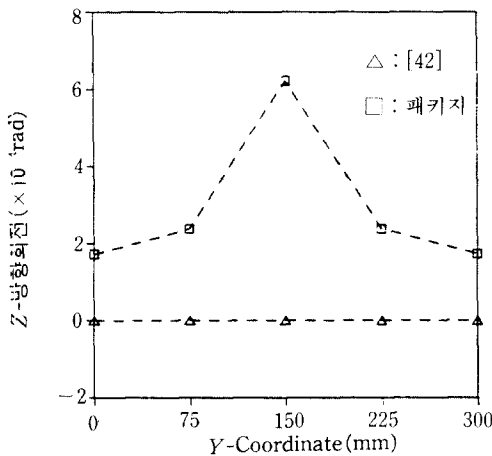


(c) Y=150 선상에서 판의 Y-방향의 변위

그림 8 판의 응력 계산값의 검토



(d) Y=150 선상에서 판의 Z-방향의 회전



(e) Y=150 선상에서 판의 Z-방향의 변위

그림 9 자유도 전달 성능 검토

엔지니어는 수치해의 의미를 정확히 파악하고 그 값의 물리적 타당성을 검토해야 한다.

(예 2) 자유도의 전달성능^(41,42)

요소의 성능을 정확히 파악하고 있어야 함을 보여주는 좋은 예이다. 요소가 6자유도를 갖고 있다고 하더라도 모든 자유도가 정확히 거동하도록 설계된 요소가 아닐 수 있다. 판과 보가 연결된 그림 9의 예에서 패키지의 판요소가 면에 수직인 회전 자유도를 충분히 표현하지 못하고 있음을 보여주고 있다. 따

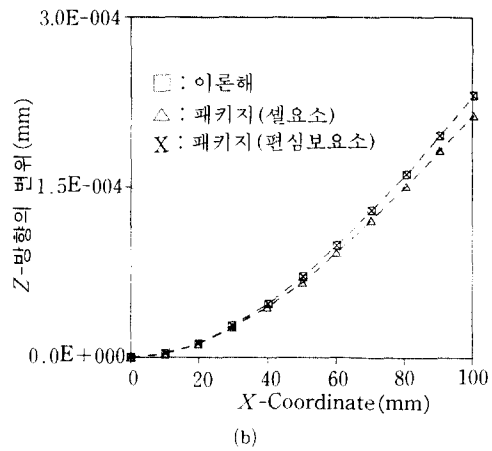
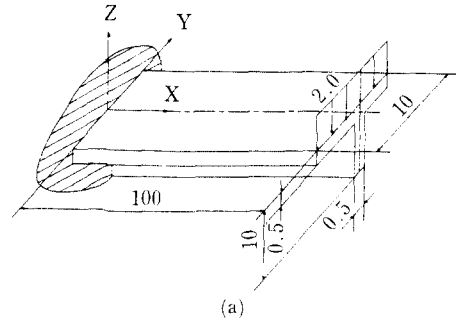
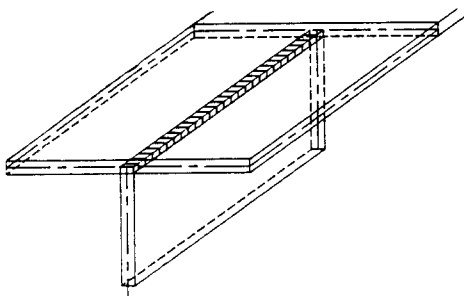


그림 10 (a) 모델 (b) Y=0 선상에서 Z-방향의 처짐 비교

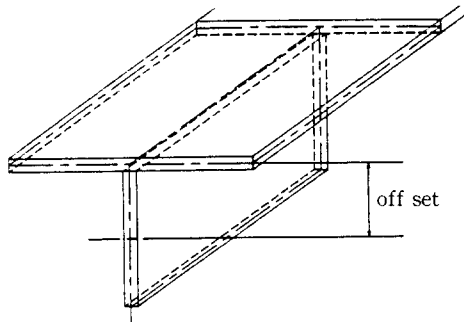
라서 사용자는 사용설명서를 정확히 숙지해야 하며, 처음 사용하는 요소에 대해서는 간단한 모델을 택하여 수치실험을 해보는 것이 바람직하다.

(예 3) 편심 강성강화 부재^(42,43)

그림 10의 모델과 같이 편심 보강재가 붙어 있는 경우를 모델링할 때, 셀 요소를 사용할 것인가, 편심 보 요소를 사용할 것인가에 대해 고민하게 된다. 그림 10에서 보는 바와 같이 편심 보 요소를 택하는 것이 보다 정확한 수치해를 준다. 또한 셀 요소를 사용하면 항상 이론해보다 작은 값의 변위를 얻게 된다. 이는 그림 11에서 보인 바와 같이 셀 요소를 사용하면 판과 강성강화부재와의 접치는 부분에서 강성이 이중으로 계산되기



(a) 셀 요소



(b) 편심 보 요소

그림 11 강성강화 부재의 모델링

때문이다.

위의 예들은 모두 정적인 문제에 관한 것들이다. 그러나 동적인 문제에 유한요소법을 적용할 때는 강성뿐만 아니라 질량 또는 점성도 고려의 대상이 된다. 따라서 정적 해석의 수치해가 정확하다고 해서 동적 해석의 수치해도 정확하다는 보장은 없다. 그러므로 동적 문제를 해석할 때는 정적해석, 고유해석(eigen analysis) 및 간단한 동적응답 해석을 통한 요소의 성능을 검토할 필요가 있다.

6. 맺음말

유한요소법은 컴퓨터의 급속한 발전과 더불어 구조해석 분야뿐만 아니라 다른 분야에서도 위력적인 기법으로 각광받고 있다. 그러나 아무리 위력적인 기법이라고 할지라도 공학적인 판단과 유한요소법에 대한 이해가 뒷

받침되지 않은 모델링은 틀린 해석 결과만을 줄 뿐이다. 유한요소법을 사용하여 올바르게 모델을 작성하기 위해서는 공학적인 판단과 유한요소법에 대한 이해가 필요하다.

지금까지 개발된 유한요소법은 그 종류를 모두 파악하기 어려울 정도로 다양하며,⁽⁴⁵⁾ 다양한 요소들의 성능을 근본적으로 이해하기 위하여 그 수식화 과정을 따져본다는 것은 결코 쉬운 일이 아닐 것으로 생각된다. 따라서 유한요소 모델 작성에 앞서, 사용하고자 하는 요소의 성능을 파악하기 위해서 간단한 모델을 택하여 다양한 수치실험을 하여 보는 것이 바람직하다. 또한, 신중한 검토 후에 작성된 모델의 수치해석 결과라 할지라도 수치해의 경향이 올바른 것이라고 간주해서도 안 된다. 왜냐하면 수학적 모델의 해석적 거동과 수치적 거동은 그 경향이 반드시 일치하는 것만은 아니기 때문이다. 비록 그 가능성은 적으나 우리가 지금까지 발견하지 못한 어떤 원인에 의해서 수치해의 거동은 수학적 이론해의 그것과 다를 수 있기 때문이다. 그러므로 수치해석 결과를 해석하는 과정 역시 충분한 검토가 뒤따라야 한다.

유한요소법에 의한 수치해는 근사해이기 때문에 항상 오차를 동반한다. 그러므로 수치해를 해석할 때는 가능한 한 오차의 원인을 추적하여 보는 것도 매우 의미있는 작업이다. 이 작업은 결코 손쉽게 행할 수 있는 작업은 아니지만 유한요소법을 전문으로 취급하는 이에게는 새로운 문제점의 발견 또는 새로운 요소 개발의 실마리가 될 수 있기 때문이다. 끝으로 모든 상용 패키지에는 수치해석 결과에 대해 책임을 지지 않는다는 단서를 명기하고 있음을 강조해 둔다.

참고문헌

- (1) 1981, “有限要素法 핸드ブック：I 基礎編,” 培風館.
- (2) Kyuichiro Washizu, *Variational Me-*

- thods in Elasticity and Plasticity*. Second Edition, Pergammon Press, New York.
- (3) 1987, *Finite Element Handbook*, McGRAW-HILL Book Company.
- (4) Zienkiewicz, O. C., 1989 "The Finite Element Method," 4th Edition, McGRAW-HILL.
- (5) Gangan Prathap, 1985, "An Additional Stiffness Parameter Measure of Error of the Second Kind in the Finite Element Method," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 21, pp. 1001~1012.
- (6) Babu, C. R. and Prathap, G., 1986, "A Linear Thick Curved Beam Element," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 23, pp. 1313~1328.
- (7) Prathap, G. and Babu, C. R., 1986, "Field-Consistent Strain Interpolation for the Quadratic Shear Flexible Beam Element," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 23, pp. 1973~1984.
- (8) Martini, L. and Vitaliani, R., 1988, "On the Polynomial Convergent Formulation of a C^0 Isoparametric Ske Beam Element," *Computers & Structures*, Vol. 29, No. 3, pp. 437~449.
- (9) 민옥기, 김용우, 유동규, 1990, "곡선보 요소의 강성과잉과 고유치에 관한 연구," *대한기계학회논문집*, 제14권, 제2호, pp. 310~323.
- (10) 김용우, 박춘수, 민옥기, 1991, "Mindlin 판의 강성과잉현상과 고유치에 관한 연구," *대한기계학회논문집*, 제15권, 제2호, pp. 445~454.
- (11) Kim, Y. W. and Min, O-K., 1991, "The Error Due to Spurious Coefficients in Isoparametric Quadratic Finite Element Analysis of Curved Beam Subjected to Out-of-Plane Loads," *Yonsei Nonchong*, Vol. 27, pp. 231~253.
- (12) 김용우, 문원주, 권해성, 민옥기, 1992, "면외변형이 가능한 선형 유한요소," *대한기계학회논문집*, 제16권, 제3호, pp. 419~429.
- (13) 김용우, 1991, "유한요소의 가성구속과 가성모드에 의한 오차유발에 관한 통합이론," *연세대학교 대학원, 박사학위논문*.
- (14) Pawsey, F. S. and Clough, W. R., 1971, "Improved Numerical Integration of Thick Shell Finite Elements," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 3, pp. 575~586.
- (15) Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. and Too, J. M., 1971, "Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 3, pp. 275~290.
- (16) Pugh, E. D. L., Hinton, E. and Zienkiewicz, O. C., 1978, "A Study of Quadrilateral Plate Bending Elements with Reduced Integration," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 12, pp. 1059~1079.
- (17) Hughes, J. R. T., 1980, "Generalization of Selective Integration Procedures to Anisotropic and Nonlinear Media," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, pp. 1413~1418.
- (18) Argiris Kamoulakos, 1988, "Understanding and Improving the Reduced Integration of Mindlin Shell Element," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 26, pp. 2009~2029.
- (19) Alexander Tessler and Spiridigliozzi, L., 1986, "Curved Beam Elements with Penalty Relaxation," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 23, pp. 2245~2262.
- (20) Alexander Tessler and Spiridigliozzi, L., 1988, "Resolving Membrane and Shear Locking Phenomena in Curved Shear-Deformable Axisymmetric Shell Elements," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 26, pp. 1071~1086.

- (21) Hinton, E. and Huang, H. C., 1986, "A Family of Quadrilateral Mindlin Plate Element with Substitute Shear Strain Fields," *Computers & Structures*, Vol. 23, No. 3, pp. 409~431.
- (22) Huang, H. C., 1987, "Implementation of Assumed Strain Degenerated Shell Elements," *Computers & Structures*, Vol. 25, No. 1, pp. 147~155.
- (23) Lee, S. W. and Pian, T. H. H., 1978, "Improvement of Plate and Shell Finite Elements by Mixed Formulations," *AIAA Journal*, Vol. 16, No. 1, pp. 29~34.
- (24) Noor, A. K. and Peters, J. M., 1981, "Mixed Models and Reduced/Selective Displacement Models for Nonlinear Analysis of Curved Beams," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 17, pp. 615~631.
- (25) Atluri, S. N., Gallagher, R. H. and Zienkiewicz, O. C., et. al., 1983, *Hybrid and Mixed Finite Element Methods*, John Wiley & Sons.
- (26) Belytschko, T., Stolarski, H. and Liu, W. K., 1985, "Stress Projection for Membrane and Shear Locking in Shell Finite Elements," *Comp. Meth. App. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 51, pp. 221~258.
- (27) Bergan, P. G. and Wang, X., 1984, "Quadrilateral Plate Bending Elements with Shear Deformations," *Computers & Structures*, Vol. 19, pp. 25~34.
- (28) Bergan P. G. and Felippa, C. A., 1985, "A Triangular Membrane Element with Rotational Degrees of Freedom," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 50, pp. 25~69.
- (29) Batoz, J. L., Bathe, K. J. and Ho, L. W., 1980, "A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 15, pp. 1771~1812.
- (30) Hinton, E. and Campbell, J. S., 1974, "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 8, pp. 461~480.
- (31) Jeyachandrabose, C. and Kirkhope, J., 1983, "Least Squares Strain Smoothing for the Eight-Node Serendipity Plane Stress Element," *Int. J. Num. Meth. Engng.*
- (32) Moan, T., 1973, "On the Local Distribution of Errors by Finite Element Approximations," in *Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis*, University of Tokyo Press.
- (33) Barrow, J., 1976, "Optimal Stress Locations in Finite Element Models," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 10, pp. 243~251.
- (34) Kosloff, D. and Frazier, G. A., 1978, "Treatment of Hourglass Patterns in Low Order Finite Element Codes," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 2, pp. 57~72.
- (35) Briassoulis, D., 1988, "The Zero Energy Modes Problem of the Nine-Node Lagrangian Degenerated Shell Element," *Computers & Structures*, Vol. 30, No. 6, pp. 1389~1402.
- (36) Bicanic, N. and Hinton, E., 1979, "Spurious Mode in Two-Dimensional Isoparametric Elements," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 14, pp. 1545~1559.
- (37) 이팔갑, 1992, "강성과잉현상이 없는 곡률보 및 평판 요소의 개발," 서울대학교 대학원, 박사학위논문.
- (38) 최종근, 임장근, 1991, "전단효과를 고려한 새로운 곡선 보 요소," 대한기계학회 논문집, 제15권 제3호, pp. 751~756.
- (39) Day, R. A. and Potts, D. M., 1990, "Curved Mindlin Beam and Axi-

- Symmetric Shell Elements-A New Approach," Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 30, pp. 1263~1274.
- (40) 민옥기, 김용우, 문원주, 1993, "면의 변형 링 요소를 이용한 고유 해석," 대한기계학회 심사증.
- (41) 민옥기, 1989, "기구 구조물의 강성 해석(중간보고서)," 연세대 산업기술연구소.
- (42) 김성일, 1990, "보-판 구조물의 변위 및 응력의 유한요소해석," 연세대학교 대학원, 석사학위논문.
- (43) 민옥기, 1989, "기구 구조물의 강성 해석(최종보고서)," 연세대 산업기술연구소.
- (44) 김용우, 박건순, 민옥기, 1991, "판 및 셀의 편심 보강 유한요소," 대한기계학회 논문집, 제15권, 제3호, pp. 771~788.
- (45) Hrabok, M. M. and Hrudey, T. M., 1984, "A Review and Catalogue of Plate Bending Finite Elements," Computers & Structures, Vol. 19, No. 3, pp. 479~495.

