

# 불연속이 있는 평판과 셸의 해석적 방법에 의한 연구

유 승 현

## Analytical Methods for Plates and Shells with Discontinuities

Seung-Hyun Yoo



- 유승현 (아주대 기계공학과)
- 1955년생.
- 판과 셸이론 및 전산역학을 전공하였으며, 구조물의 정·동적해석 및 최적화에 관심을 가지고 있다.

### 1. 머리말

평판과 셸은 그 하중 지지의 효율성 때문에 각종 구조물에 널리 사용되고 있다. 그러나 여러 종류의 불연속은 어쩔 수 없이 존재하게 된다. 대형 구조물의 출입을 위한 개구부의 존재나, 판과 노즐의 결합 부위 등 복잡한 형상을 가지면서 생기는 기하학적 문제, 재료에 원래 존재하는 균열이나 개재물(inclusion) 등의 문제가 그 예가 될 것이다. 집중하중이나 선하중 등은 넓은 의미의 불연속으로서 힘에 의한 것으로 볼 수 있으나, 보다 문제가 되는 것은 변위의 불연속으로 이해될 수 있는 균열의 문제일 것이다. 이 균열의 존재는 구조물의 안전성에 미치는 효과가 커서 중요한 연구 대상이 되어 있다. 또 해석적 방법으로 풀기도 까다로운데, 여기서는 이 문제를 다루는 해석적 방법들을 살펴보고, 또 효율적으로 계산할 수 있는 반해석적(semi-analytical) 방법을 도입한 후 대표적인 평판과 셸 문제를 예로 들어본다.

### 2. 불연속

판이나 셸에서의 불연속은 여러 형태로 나타날 수가 있다. 당장 이종재료(dissimilar material)의 접합부위는 불연속 부분이고, 기하학적 불연속은 그림 1에서처럼 여러가지 경우가 있다. 그림 1에서 (a)는 기울기 (b)는 곡률 (c)는 변위가 각각 불연속이 되는 경우이다. 또 (d)는 관(vessel)에 노즐(nozzle)이 결합되는 경우로 불연속 문제의 대표적인 예이다.

셸의 거동은 기본적으로 박막(membrane), 비신장(inextensional), 선단(edge effect)효과에 의한 해로 분류될 수가 있다. 유한요소법을 사용하기 위하여 요소분할을 할 때 이들 해중 어느 것이 중요한지 이해하면 효율적으로 계산할 수가 있을 것이다. 셸에서 불연속의 효과는 표 1로써 정리될 수 있다. 여기서  $u, v, w$ 는 각각  $r, \theta, z$ 방향의 변위이고,  $x$ 는 회전(rotation),  $N_s, N_\theta, N_{s\theta}$ 는 축방향, 원주방향의 응력과 전단응력 성분이고,  $M_s$

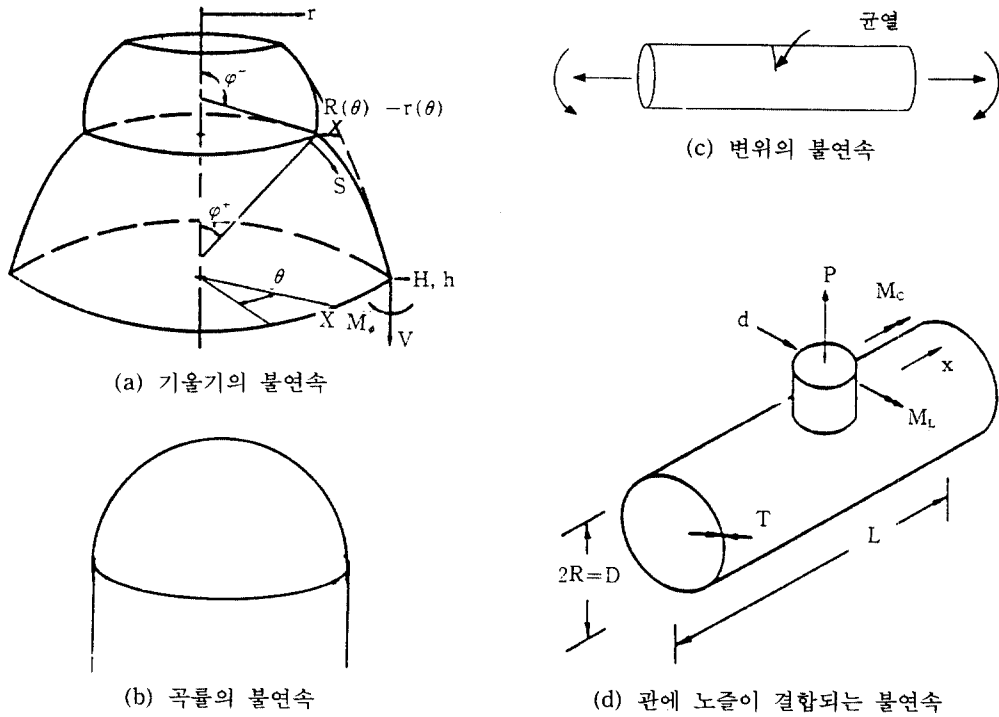


그림 1 기하학적 불연속의 예

표 1 변위와 응력 경계조건에 의한 셸의 영향

	변위 경계 조건			응력 경계 조건		
	박 막	비신장	선단 효과	박 막	비신장	선단 효과
$x$	1	1	$\lambda$	1	$\lambda^4$	$\lambda^3$
$w/R$	1	1	1	1	$\lambda^4$	$\lambda^2$
$u/R$	1	1	$\lambda^{-1}$	1	$\lambda^4$	$\lambda$
$v/R$	1	1	$\lambda^{-2}$	1	$\lambda^4$	1
$N_s/Et$	1	$\lambda^{-4}$	$\lambda^{-1*}$	1	1	$\lambda^*$
$N_\theta/Et$	1	$\lambda^{-4}$	1	1	1	$\lambda^2$
$N_{s\theta}/Et$	1	$\lambda^{-4}$	$\lambda^{-1*}$	1	1	$\lambda^*$
$M_s/Et^2$	$\lambda^{-2}$	$\lambda^{-2}$	1	$\lambda^{-2}$	$\lambda^2$	$\lambda$
$Q_s/Et$	$\lambda^{-4}$	$\lambda^{-4}$	$\lambda^{-1*}$	$\lambda^{-4}$	1	$\lambda^*$

는 축방향의 굽힘모멘트,  $Q_s$ 는 종전단응력 성분이다.  $\lambda = \sqrt{R/C}$ ,  $C = t/[12(1-\nu^2)]^{1/2}$ 이고  $R$ 은 반지름,  $t$ 는 두께,  $\nu$ 는 포아송비

(Poisson's ratio)로서  $\lambda$ 는 보통 큰 숫자가 된다. 표 1에서 "\*"표시는 주항목(leading term)

에 선형 종속(linearly dependent)인 양이다. 이 표에서 알 수 있듯이, 만약 변위가 경계조건으로 주어지면,  $0(1)$ 의 변위는  $0(1)$ 의 응력을 주고, 응력이 경계조건으로 주어지면  $0(1)$ 의 응력은  $0(\lambda^2)$ 의 굽힘응력과  $0(\lambda^4)$ 의 변위를 유발한다는 것이다. 균열이 존재하면, 균열부분에서는 응력 벡터의 전체해(total solution)가 0이 된다는 조건을 만족시키기 위해 보조해(complementary solution)가 특수해(particular solution)의 반대가 되어 응력경계조건을 주게 된다. 즉, 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma' = 0 = \sigma^c + \sigma^p \Rightarrow \sigma^c = -\sigma^p \quad (1)$$

따라서 균열의 존재는 높은 응력을 유발시키고 또 균열선단에서는 특이성(singularity)을 갖게 한다.

### 3. 해석적 방법

많은 경우에 판과 셸에 대한 과목에서 이들 문제를 다루는 방법이 두 가지로 나타나는 것을 볼 수 있다. 하나는 전통적인 역학 과목에서 판과 셸을 특수한 형태로 다루면서 기본적인 거동을 설명하는 것인데, 여기서는 유한요소법 같은 방법이 수치해석법의 하나로 도입되고 있다. 또 하나는 유한요소법을 위주로 하면서, 보다 까다로운 문제로서 판과 셸을 제시하는 경우이다. 전자의 경우는 대부분의 판각 교과서들이<sup>(1~3)</sup> 택하고 있는 방법으로, 주로 Kirchhoff 판이론, Kirchhoff-Love 가정에 의한 셸이론을 소개하고, 대변형이나 복합재료와 같은 기하학적, 재료적 비선형 문제를 고급주제로 제시한다. 이들은 해로서 푸리에 급수(Fourier series)를 도입하는데 Navier나 Levy의 이름으로 사용되고 있다. 이 방법은 각각 사용하는 푸리에 급수의 성질에 따라 경계조건에 제약을 받게 되는데, 이런 흐름하에서 최대한 이 제약을 벗어나고자 시도하는 유한판법(Finite Strip

Method)<sup>(4)</sup> 등도 등장하게 된다. 이런 전자의 방법은 미분방정식과 경계조건을 직접 만족시키는 강형(strong form)의 해석법이라고 하겠다. 후자의 방법으로 유한요소법은 약형(weak form)의 적분방정식을 도입하고 주로 Galerkin 근사법을 사용하여 근사해를 구하는 방법<sup>(5)</sup>이라고 하겠다. 유한요소법은 실제적인 복잡한 형상의 문제나 여러가지 비선형문제에도 적용가능한 범용 프로그램으로 개발되어 널리 사용되고 있으나, 이 방법의 타당성을 유지하기 위하여는 소위 해석해(exact or analytical solution)와의 비교검토가 따라야 한다. 따라서 이 해석적 방법에 의한 해는 가능한대로 많은 경우에 대하여 정확한 값을 줄 수 있어야 한다는 당위성을 갖는다. 최근에 Hutchinson<sup>(6)</sup>은 직방형 판에서 이 비교의 대상이 되는 푸리에 급수에 의한 해에 대하여 보다 정확도를 높여서 계산한 결과를 제시하고 있다. Timoshenko의 교과서<sup>(1)</sup>에 나오는 식대로는 수렴속도가 느리므로 정규화(normalization)를 통해서, 보다 많은 자리수의 정확도를 갖는 해를 제공함으로써 앞으로 이 결과를 비교의 대상으로 삼도록 권고하고 있는 것이다. 즉 많은 유한요소법 결과들이 그 정당성을 검토할 수 있는 해석해를 필요로 한다는 것이 사실이며, 또 이들 해석해는 그 나름대로 이상화된 경계조건을 갖는 문제에 대하여는 가능한대로 가장 먼저 적용되는 것이다.<sup>(7)</sup> 지금까지는 방법의 관점에서 살펴보았는데, 대상이 되는 문제의 성격에 대하여도 분류해 볼 수 있겠다. 하나는 전체적인(global) 문제이고 다른 하나는 국부적인(local) 문제일 것이다. 일반적인 응력해석이나 동적인 문제에서 고유진동수를 계산하는 등의 문제는 전체적인 문제이고, 균열 등의 불연속이 존재할 경우의 해석은 국부적인 문제이다. 균열의 존재는 응력 집중을 발생시키며, 이에 따른 구조물 전체의 강도에 미치는 효과의 정량적 산출은 파괴역학의 중요한 과제일 것이다. 중요한

파괴역학적 파라미터로 응력강도계수(stress intensity factor)를 계산하는 것이 필요한데, 흔히 다음의 방법을 쓰고 있다. 첫째는 해석적 방법으로, 많은 경우 적분방정식을 유도하여 풀고 그 결과로부터 응력 강도계수식을 수식으로 유도해내는 것이고 다른 하나는 유한요소법에 의한 것인데 여기서 응력강도계수를 얻는데도 두 가지 방법이 있다. 하나는 직접적인 방법으로 균열선단에 특이요소를 사용하거나 균열선단 부근에 대한 해로부터 외삽(extrapolation)하여 유추하는 것이고, 다른 하나는 간접적인 방법으로 에너지 방출률(energy release rate)과 직접 관련이 되는 경로 불변 적분값(path independent integral)을 이용하여 계산하는 방법이다. 흔히 J적분이라고 부르는, 경로에 무관한 표현식을 사용하여 균열선단의 특이성을 피해하는 것이다.<sup>(8)</sup> 이 마지막의 접근방법은 앞에서 논의한 고전적 해석방법과 접합하여 불연속을 포함하는 판과 셸에 대한 계산을 가능하게 하는 새로운 방법을 유도하게 된다. 균열 등 불연속이 있는 문제에 대하여는 일반적으로 국부적인 해석에 대하여 많은 관심이 기울어져 많은 해석이 수행되어 왔다.<sup>(9)</sup> 이들 균열의 국부적인 효과가 구조물 전체의 역학적 특성에 어떻게 미치나 하는 것이 연구 대상이 되어온 것이다. 일반적으로 평면 응력과 판의 굽힘문제에서 균열선단에서는 응력이  $1/\sqrt{r}$  ( $r$ 은 균열선단에서 임의의 점까지의 거리)의 특이성을 보이는 것으로 알려져 있다. 이러한 국부적인 효과를 정량적으로 파악하기 위하여 응력강도계수  $K$ 의 개념을 도입하고, 이를 앞에서 얘기한 J적분 같은 경로불변 적분값을 계산함으로써 알아낼 수 있게 된다. 즉 국부적인 문제와 전체적인 해석이 결합될 수 있는 것이다. 이와 같은 시도는 역문제(inverse problem)로서, 만약 전체적인 해석이나 측정이 이루어졌을 때 균열의 크기를 유추할 수 있는가 하는 문제와 연결된다. 즉 지금의 비파괴 검사법(non

destructive testing)의 문제가 되는 것이다. 기존의 전통적인 비파괴 검사기법 외에 최근에는 모드(mode) 파라미터를 사용하여 균열의 존재를 감지하고, 위치까지 결정하는 방법이 제안되고 있다.<sup>(10,11)</sup> 이 방법은 기존의 방법과 비교하여 어떤 복합재료든지 진동할 수 있는 물체면 모두 적용시킬 수 있고, 정확히 균열부위에서 측정되지 않아도 찾을 수 있고, 모드 파라미터를 계산하기 위하여는 그리 많지 않은 점에서의 측정도 충분하다는 등의 장점이 있으나, 기본모드(fundamental mode)는 정역학적 변형과 유사하고, 균열의 존재에 의한 효과는 저차 모드에서는 차이가 작고, 고차 모드에서 차이가 크므로 균열의 존재를 확인하기 위하여는 보다 높은 고유진동수와 그에 따른 진동형을 필요로 하게 된다. 따라서 이 방법의 타당성을 입증하기 위하여도 고차의 진동수와 진동형에 대한 해석해가 필요하게 된다.

#### 4. 불연속을 다룰 수 있는 해석적 방법

2차원의 구조물, 즉 판과 특히 셸에 불연속이 존재하면 이들을 효율적으로 다루는 기법이 점점 어려워진다. Steele은 관(vessel)에 노즐(nozzle)이 수직으로 결합되는 그림 1(d)와 같은 문제에 대하여 점근 해석(asymptotic analysis)을 도입하여 효과적으로 계산할 수 있음을 보였다.<sup>(12)</sup> 기존의 유한요소법과 비교하여 사용자가 입력 자료를 준비하는 전처리 시간을 며칠에서 몇분, 실제 중앙처리(CPU)시간은 500~1000배의 감소를 이루었음을 보고하고 있다. 이들 방법은 'FAST'라는 이름하에 패키지화되어 있고, 그 구체적인 적용으로는 WRC(Welding Research Council) 보고서 107<sup>(13)</sup>을 보강한 WRC 보고서 297<sup>(14)</sup>의 바탕이 된 것을 들 수 있다. 이 방법은 구조물을 해석이 잘 될 수 있는 몇 개의 극대요소로 나누어, 해석적 방법을 적용하고 이를 결합하는 것으로 Miler<sup>(15)</sup>

에 의해 처음으로 극대 유한요소법(VLFE-M; very large finite element method)이라고 불리워진 방법이다. 이 방법은 불연속의 가장 극단적인 경우인 균열을 갖는 물체에 대하여도 확장되었다.<sup>(16)</sup> 즉 선형균열을 갖는 경계선을 기준으로 판이나 셸을 극대요소로 나누고 이 경계에서의 복합경계조건(mixed boundary condition)을 균열 부분의 조건으로 변환시켜, 보다 작은 크기의 선형대수 방정식을 유도하는 방법이다. 탄성학에서 무한체에 균열이 있는 평면응력 등에 대하여 푸리에 적분식을 이용하여 푸는데, 이 방법에만 유한판이나 셸에서의 변환적용으로 이해될 수 있겠다. 판이나 셸에 사용되는 푸리에 급수는 불연속 선단에서의 특이성을 표현하는 데는 한계가 있다. 그러나 이 특이점에서 벗어난 부분에서는 빠른 수렴성을 갖고, 이 결과를 위해서 기술한 간접적 계산 방법을 이용하면 진동 및 파괴해석에 적용시킬 수가 있게 되는 것이다. 이 방법을 간략히 서술하여 본다. 자세한 설명은 참고문헌 (16)에 나와 있다.

4.1 확대행렬

그림 2와 같이 직선 균열( $\Gamma$ )을 포함하는 경계에서,  $\Gamma$ 에는 임의로 주어지고 나머지 부분( $\Omega - \Gamma$ )에서는 0인 함수가 있다면 다음 식과 같이 표현될 수 있을 것이다.

$$F_a = \begin{cases} \sum A_n \sin \frac{n\pi\xi}{b} : \Gamma \\ 0 : \Omega - \Gamma \end{cases}$$

$$= \sum B_m \sin \frac{m\pi x}{d} : \Omega$$

$$(d = a + b + c) \tag{2}$$

즉,  $\Omega$ 영역에 대한 푸리에 급수로 표현이 가능하다는 것이다. 이때 푸리에 급수의 계수들인  $A_n$ 과  $B_m$ 은 다음의 관계식으로 주어진다.

$$\{B_m\} = [E_{mn}] \{A_n\} \tag{3}$$

$m \times 1 \quad m \times n \quad n \times 1$

이 관계식인  $E_{mn}$ 의 행렬을 확대행렬(expansion matrix)이라고 부른다.

4.2 압축행렬

그림 2에서 역으로  $\Omega$ 에 임의로 주어진 함수를  $\Gamma$ 에서 푸리에 급수로 전개하는 것을 생각하자. 즉, 식 (4)와 같다.

$$F_r = \sum G_m \sin \frac{m\pi x}{d} : \Omega$$

$$= \sum H_n \sin \frac{n\pi\xi}{b} : \Gamma \tag{4}$$

여기서, 식 (5)의 관계가 성립되고, 이때  $C_{nm}$ 을 압축행렬(contraction matrix)이라고 부른다.

$$\{(H_n)\} = [C_{nm}] \{(G_m)\} \tag{5}$$

$n \times l \quad n \times m \quad m \times l$

이상의 두 행렬은 균열의 크기 및 위치에 따른 기하학적인 요소에 의해서 결정이 되고, 다음 식으로 공식화해서 풀 수 있다.

○ 정적인 문제

$$\{(F)\}^R = [C] [R] [E] \{(\Delta D)\}_r = -\{(F)\}_r^L$$

$\left\{ \begin{array}{l} \{(\Delta D)\}_a \\ \{F\}_a \\ \{F\}_r \end{array} \right.$

 $\tag{6}$

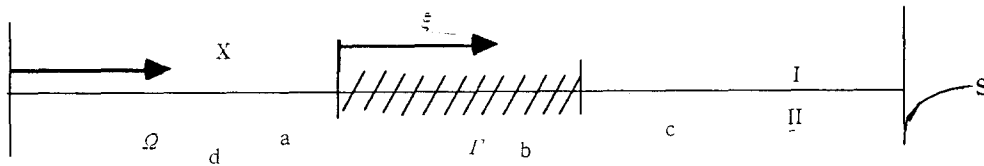


그림 2 직선균열을 포함하는 불연속선

○ 동적인 문제

$$\{F\}^T = [C][R][E]\{\Delta D\}_r = 0 \quad (7)$$

$$\det\{[C][R][E]\} = 0 \quad (8)$$

여기서,  $\{F\}^T$ 는 전체해에 들어가는 보조해이고,  $\{\Delta D\}_r$ 는  $\Omega - \Gamma$ 부분에서 0이 되도록 선택한 경계에서의 두 부분의 변위 차이이고,  $\{F\}^T$ 는 특수해이고,  $[R]$ 은 강성행렬이다. 특히 여기서 강성행렬  $R$ 은 변위, 응력 등 물리적인 양 그 자체가 아니고, 그것들의 푸리에 성분들의 관계식인 것이 일반적인 방법과 다른 점이다.  $[R]$  행렬은 대각선 행렬인데  $m$ 번째 항은  $m$ 이 커짐에 따라 점근적으로 무한 판이나 셀의 해석적인 결과를 바로 쓸 수가 있다.  $m, n$ 은 균열의 크기에 따라 정해지는데,  $n$ 은 풀어야 할 행렬의 크기로서 해의 수렴정도에 따라 결정되고,  $m$ 은 균열의 크기와 위치에 따라 각  $n$ 에 대하여 정해진다. 이와 같이 정·동적인 문제에 대하여 공히 적용할 수가 있는데, 다음에는 이 방법에 대한 해석을 판과 셀에 대하여 각각 예를 들어 보겠다.

### 5. 직선 균열을 갖는 직방형 판

그림 3과 같은 형상의 판통 균열을 갖는 직방형 판을 생각하자.

여기서,  $b$ 는 균열의 길이,  $d$ 는 변의 길이,  $e$ 는 한 변으로부터 균열이 떨어진 거리이다. 정적인 경우, 응력해석의 문제에 대하여 Williams<sup>(17)</sup>는 다음과 같이 균열선단의 응력과 변위를 계산하였다.

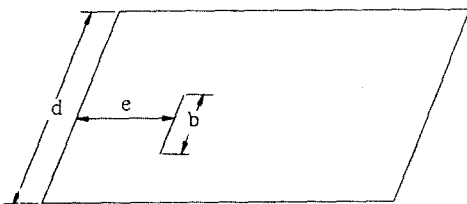


그림 3 직선 판통균열을 갖는 직방형 판

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{7+\nu}{2(3+\nu)} \frac{K_B}{\sqrt{2\pi r}} \frac{z}{h} \\ &\quad \left[ \frac{(3+5\nu)}{7+\nu} \text{Cos} \frac{\theta}{2} - \text{Cos} \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{7+\nu}{2(3+\nu)} \frac{K_B}{\sqrt{2\pi r}} \frac{z}{h} \\ &\quad \left[ \frac{(5+3\nu)}{7+\nu} \text{Cos} \frac{\theta}{2} + \text{Cos} \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{7+\nu}{2(3+\nu)} \frac{K_B}{\sqrt{2\pi r}} \frac{z}{h} \\ &\quad \left[ -\frac{(1-\nu)}{7+\nu} \text{Sin} \frac{\theta}{2} - \text{Sin} \frac{3\theta}{2} \right] \\ \omega &= \frac{7+\nu}{2(3+\nu)} \frac{r^{3/2}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{K_B}{h} \\ &\quad \left[ \text{Cos} \frac{3\theta}{2} - \frac{3(1-\nu)}{7+\nu} \text{Cos} \frac{\theta}{2} \right. \\ &\quad \left. + \theta_0(r \text{Cos} \theta) + \omega_0 \right] \quad (9) \end{aligned}$$

여기서,  $h$ 는 판의 두께,  $\nu$ 는 포아송 비,  $r$ 은 균열선단에서의 거리,  $z$ 는 판의 중립면으로부터 두께 방향 거리,  $\theta$ 는 균열선으로부터의 각도이다.  $K_B$ 는 굽힘응력강도계수이다. Keer와 Sve<sup>(18)</sup>는 고전적인 Kirchhoff판 이론을 사용하고, 해석적 방법으로 파괴해석을 수행하였다. 특수한 경우로 균열을 대칭인 곳에 위치시키고 균일분포하중이 작용하였을 때 제2종(2nd kind)의 Fredholm 적분 방정식의 꼴을 유도하여 응력강도계수를 계산하였다. 유사한 방법을 도입하여 Stahl과 Keer<sup>(19)</sup>는 균열을 갖는 판의 자유진동과 좌굴문제를 다루어 균열의 존재가 고유진동수 및 좌굴하중에 미치는 영향을 고려하였다. Solecki<sup>(20)</sup>는 이를 약간 일반화시켜 직선 균열이 대칭이 아닌 위치에 존재할 경우의 고유진동수를 구하였다. 이 방법은 최종적으로 3종 푸리에 급수를 계산하여야 하므로 수렴속도가 늦어 진동형을 구하지 못하였다. 이들 방법은 판에 적용하는 동적 의미의 해석해로 볼 수 있으나, 각각 적분방정식을 풀어야 하고, 다중 합(multiple summation)을 구해야 하는 등의 제약이 있다. 그 외에 기본 고유진동수를 구하기 위하여 Rayleigh-

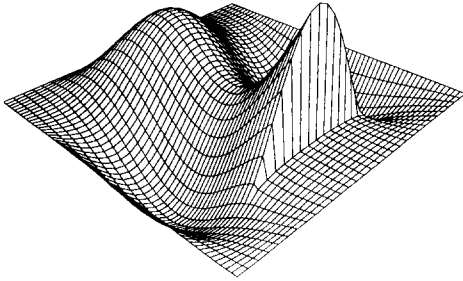


그림 4 한변에 평행한 균열을 갖는 정방형 판의 4번째 진동형

Ritz 방법을 사용하거나 유한요소법 등 수치해법을 이용한 계산들은 많이 발표되어 있다. 그러나 극대유한요소법에 의하여 작은 크기의 행렬을 사용하여 계산하면 정적인 문제에서는 응력강도계수, 동적인 문제에서는 고유 진동수 및 좌굴 하중, 진동형 등을 쉽

게 구할 수가 있다. 파괴역학적인 문제에서 응력강도계수는, 극대 유한요소법을 이용하여 응력 및 변위를 계산한 다음 경로불변적분인  $J$ 적분을 계산하여 바로 구할 수 있다. 그림 4에는 한 예로 정방형 판에서 균열의 길이가 한 변의 50%이고, 한 변으로부터 한 변의 길이가 20% 거리만큼 떨어져 위치하였을 때의 4번째 진동형을 보여준다.

이 방법은 그림 5와 같은 원호 균열을 갖는 원형판에 대하여 쉽게 확장될 수 있다.<sup>(21)</sup>

그림 6에  $\alpha=216^\circ$ 인 경우의 4차 진동형을 예로 들었다. 이 때 고유진동계수(Natural Frequency Factor)  $f=17.636$ 이고,  $f$ 는 다음식으로 주어지는 무차원 수이다.

$$f = \sqrt{\frac{\rho}{D}} \omega R^2 \quad (10)$$

여기서,  $\rho$ 는 밀도,  $D$ 는 굽힘 강성으로  $D=$

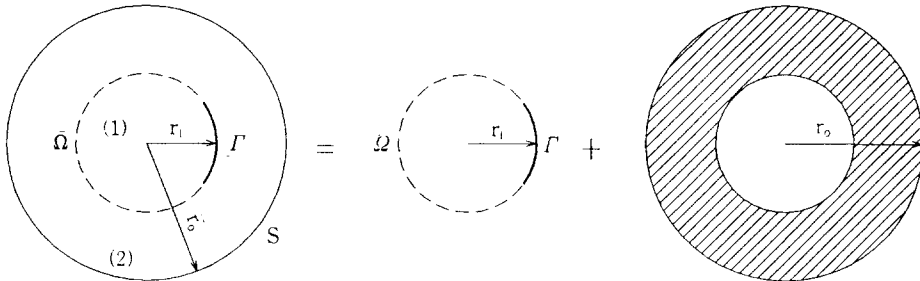


그림 5 원호 균열을 갖는 원형판

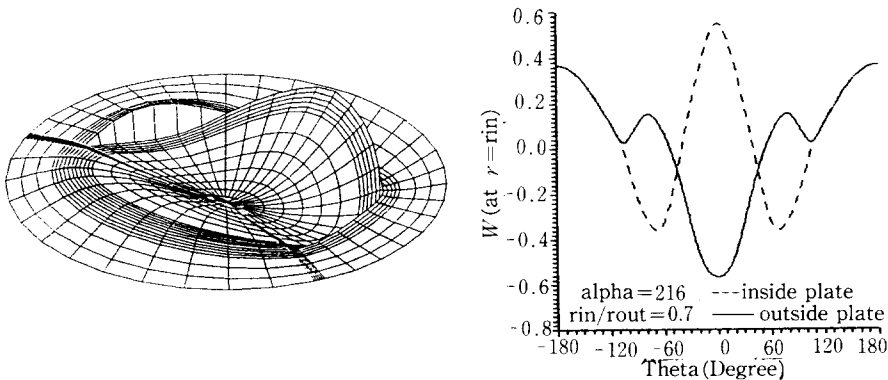


그림 6  $\alpha=216^\circ$ 의 원호 균열을 갖는 원형판의 4번째 진동형

$E l^3/12(1-\nu^2)$ ,  $\omega$ 는 고유진동수,  $R$ 은 판의 반지름이다.

### 6. 원주 방향의 균열을 갖는 원통형 셀

그림 7은 그림 1(c)의 그림을 좀더 자세히 보여준다. 역시 표면 균열이 아니고 관통 균열의 경우에 대하여 알아본다.

원통형 셀은 파이프를 비롯한 여러 구조물의 부재로 많이 사용되고 있고, 해석적인 모델링이 다른 일반적 형태의 경우보다 쉬워서 많은 연구가 수행되어 왔다. 그 중에서도 균열이 존재할 때의 해석은 1965년 Folias<sup>(22)</sup>의 연구로부터 시작되어졌다. 연속적으로 Folias는 원주방향으로 작은 균열이 존재하는 경우를 해석하였다.<sup>(23)</sup> 모두 만곡(shallow)셀에 적용시킬 수 있는 식을 사용하였고, 이는 주요 인자인  $\lambda(=[12(1-\nu^2)]^{1/4}a(R/h)^{1/2})$ 가 작은 영역에 대하여 해석하였음을 의미한다. 여기서  $\nu$ 는 포아송비,  $a$ 는 균열의 길이,  $R$ 은 셀의 반지름,  $h$ 는 두께를 의미한다. Erdogan<sup>(24,25)</sup> 등은 이  $\lambda$ 의 범위를 확장하였으나 계속 만곡식을 사용하였다. Erdogan과 Delale<sup>(26)</sup>은 종전단 변형도가 균열 선단에서의 특이성에 영향을 주는 사실을 밝혔으나, 아주 작은 균열의 범위에서는 파괴 강도의 계산에 큰 영향을 주지 않는 것으로 알려졌다.<sup>(27)</sup> Sanders와 Alabi<sup>(28-30)</sup>는 무한 또는 반무한의 원통형 셀에 대하여 해석하였는데 Sanders식을 이용하였다. Sanders식은 모든 텐서식의 적합조건을 만족시킨다는 의미에서 최선의 1차의 셀 방정식으로 알려져 있다.<sup>(31)</sup> 또 Sanders는 최근에 균열 선단에서의 소성효과를 고려하기 위하여 Dugdale 모델<sup>(32)</sup>을 사용하여 찢음 불안정성(tearing instability)<sup>(33)</sup>을 계산하는 해석적 방법을 도입하기도 하였다. Sanders는 에너지 방출률을 구하였는데, 극대 유한요소법을 이용한 결과도 상당히 근사한 값을 보여 주고 있다. 이 결과는 추후 발표될 예정이다. 그러나 이들 결과는

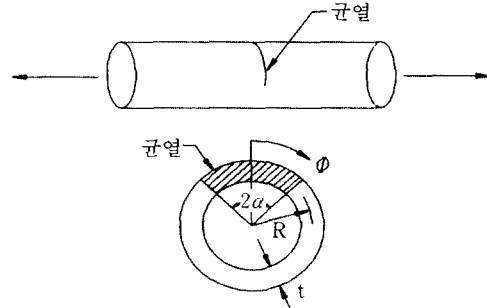


그림 7 원주방향의 관통균열을 갖는 원통형 셀

실험과 비교하면 균열개구영역(crack opening area)의 값이 적게 계산되는 문제점이 있다.<sup>(34)</sup> 특히 균열이 커지면 그 차이가 커지는 경향이 있다. 큰 이유중에 하나는 균열 선단의 소성효과를 고려하지 못하는 제약 때문이고, 공식 자체가 큰 균열에는 잘 맞지 않는 제한을 갖고 있어서도 그렇다. 반대로 극대 유한요소법은 큰 균열에 오히려 유리한 방법이므로, 균열의 작은 범위에서 큰 범위까지 포함하는 통괄적인 방법이 개발될 수 있을 것이다. 또 이 극대유한요소법은 푸리에 급수의 항으로 표시하는 물리적인 양 중에 변위가 가장 수렴이 빨라 제일 정확한 양인데, 이를 이용하여 변형 모드를 계산할 수 있다. 또 이들 변형 모드를 잘 비교하여 보면 균열의 크기에 관계없이 모두 포물선의 식으로 근사될 수가 있음을 알 수 있다.<sup>(35)</sup> 즉, 식 (11)과 같다.

$$\frac{U}{U_M} = 1 - \left[ \frac{\theta^2}{\alpha} \right] \quad (11)$$

여기서,  $\alpha$ 는 균열의 크기,  $U_M$ 은 최대 변위이다. 이 때 균열개구 영역( $A$ )은 다음식과 같이 계산된다.

$$A = \frac{8}{3} R^2 \alpha U_M \frac{\sigma}{E} \quad (12)$$

여기서,  $\sigma$ 는 작용 응력이고,  $E$ 는 영(Young) 계수이다.  $U_M$ 은 수식으로 표현될 수 있으므로, 쉽게 개구면적을 계산하고 또



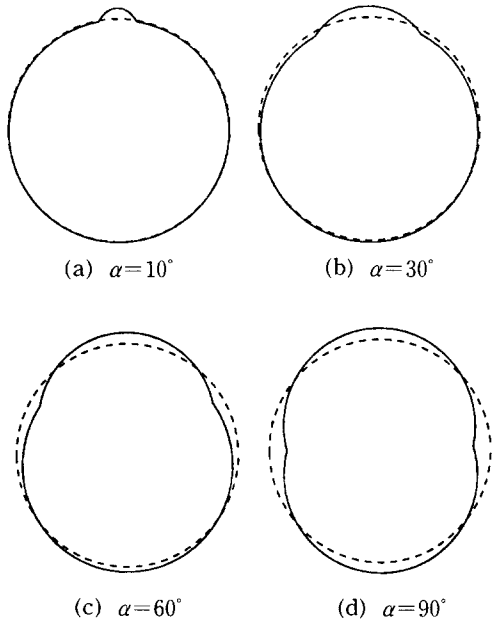


그림 8 굽힘을 받는 원주방향의 균열을 가진 원통형 셀의 변형모드

관속의 유체의 누설량을 예측할 수가 있게 된다. 그러나 이 결과는 실제 실험과 비교하면 탄성영역만을 다루었기 때문에 에너지 방출률의 값이 적게 계산되는 불완전한 값이긴 하다.<sup>(34)</sup> Gruter 등은 실험결과를 맞추기 위해 Sanders의 식을 자료맞춤(data fitting)한 식을 제시하고 있으나,<sup>(36)</sup> 앞으로 실험결과와 잘 맞는 해석적인 방법에 의한 결과가 나와야 할 것이다. 균열을 포함하는 단면의 변형을 보면 횡방향이 아닌 종방향의 난형화(ovalization)가 일어나는 것을 볼 수 있는데, 이것은 셀의 모멘트 전달능력에 영향을 주는 것으로 규명되어야 하는 문제이다.<sup>(37)</sup> 그림 8에는 굽힘을 받는 균열 가진 원통형 셀의 변형모드가 주어졌다. 균열이 커짐에 따라 난형화가 진행됨을 볼 수 있다.

### 7. 맺음말

위와 같은 해석적인 방법에 의한 해는 형

상이 단순하고, 특수한 경우에만 효율성을 갖는 제약을 갖는다. 하지만 그 결과는 비교의 대상으로 정확해(exact solution)로서 존재 가치가 있고 또 그 효율성으로 인하여 전문 프로그램으로서 개발되는 의미를 갖는다. 효율적인 유한요소법 개발을 위해 많은 노력이 기울여지고 있으나, 한편으로 이러한 해석해를 적용시킬 수 있는 범위를 넓혀 가는 것은 필요한 일이라 하겠다. 대변형에 대한 해석<sup>(38)</sup>이나 직방형이 아닌 복합도형에 대한 문제,<sup>(39)</sup> 고차의 판이론을 적용시키는 문제,<sup>(40)</sup> 탄성 지지를 받는 문제,<sup>(41)</sup> 복합재료<sup>(42)</sup> 등에 적용시키는 문제들에 대해 해석해들이 꾸준히 발표되는 것은 이런 노력의 일부로 사료되며, 이러한 해석해들은 판과 셀의 거동을 완전히 이해하는데 필요한 도구로서 그 의미가 크다고 할 것이다.

### 참고문헌

- (1) Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., 1959, "Theory of Plates and Shells," (2nd ed.), McGraw-Hill, New York.
- (2) Szilard, R., 1974, "Theory and Analysis of Plates," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- (3) Ugral, A. C., 1981, "Stresses in Plates and Shells," McGraw-Hill, New York.
- (4) Cheng, Y. K., 1968, "Finite Strip Analysis of Elastic Slabs," J. of Engineering Mechanics, Vol. 94, pp. 1365~1378.
- (5) Hughes, T. J. R., 1987, "The Finite Element Method," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- (6) Hutchinson, J. R., 1992, "On the Bending of Rectangular Plates with Two Opposite Edges Simply Supported," J. of Applied Mechanics, Vol. 59, pp. 679~681.
- (7) Sun, C. T., 1972, "Double Fourier Series

- Solutions to General Anisotropic Plates," J. of Math. Phys. Sci., Vol. 6, pp. 222~228.
- (8) Sosa, H. and Herrmann, G., 1989, "On Invariant Integrals of Cracked Plates," Int. J. of Fracture, Vol. 40, pp. 111~126.
- (9) Sih, G. C.(ed), 1977, "Plates and shells with Cracks," Noordhoff International, Leyden, The Netherlands.
- (10) Mannan, M. A. and Richardson, N. H., 1990, "Detection and Location of Structural Cracks Using FRF Measurements," 8th IMAC Proceedings, Kissimmee, Florida.
- (11) Richardson, M. and Mannan, M. A., 1993, "Correlating Minute Structural Faults with Changes in Modal Parameters," 11th IMAC Proceedings, Kissimmee, Florida.
- (12) Steele, C. R., 1989, "Asymptotic Analysis and Computation for Shells," Analytical and Computational Models of Shells, Noor, A. K., Belytschko, T. and Simo, J. C. (eds.), CED-Vol. 3, ASME.
- (13) Wichman, K. R., Hopper, A. G. and Mershon, T. L., 1979, "Local Stresses in Spherical and Cylindrical Shells Due to External Loadings," Welding Research Council Bulletin No. 107.
- (14) Mershon, J. L., Mokhtarian, K., Ranjan, G. V. and Rodabaugh, E. C., 1984, "Local Stresses in Cylindrical Shells Due to External Loadings on Nozzles-Supplement to WRC Bulletin No. 107," WRC Bulletin No. 297.
- (15) Miller, C. E., 1985, "VLFEM Analysis of A Two-Dimensional Cochlea Model," J. of Applied Mechanics, Vol. 52, pp. 743~751.
- (16) Yoo, S. H., 1989, "Fourier Series Methods for Plates and Shells with Cracks and Inclusions," Ph. D. Thesis, Stanford University.
- (17) Williams, M. L., 1961, "The Bending Stress Distribution at the Base of A Stationary Crack," J. of Applied Mechanics, pp. 78~82.
- (18) Keer, L. M. and Sve. C., 1970, "On the Bending of Cracked Plates," Int. J. of Solids and Structures, Vol. 6, pp. 1545~1559.
- (19) Stahl, B. and Keer, L. M., 1972, "Vibration and Stability of Cracked Rectangular Plates," Int. J. of Solids and Structures, Vol. 8, pp. 69~92.
- (20) Solecki, R., 1983, "Bending Vibration of A Simply Supported Rectangular Plate with A Crack Parallel to One Edge," Engineering Fracture Mechanics, Vol. 18, pp. 1111~1118.
- (21) 이재웅, 1992, "원호 균열을 갖는 원형판의 고유진동 해석," 석사 학위 논문, 아주대학교.
- (22) Folias, E. S., 1965, "An Axial Crack in a Pressurized Cylindrical Shell," Int. J. of Fracture Mechanics, Vol. 1, pp. 104~113.
- (23) Folias, E. S., 1967, "A Circumferential Crack in a Pressurized Cylindrical Shell," Int. J. of Fracture Mechanics, Vol. 3, pp. 1~11.
- (24) Erdogan, F. and Kibler, J., 1969, "Cylindrical and Spherical Shells with Cracks," Int. J. of Fracture Mechanics, Vol. 5, pp. 229~237.
- (25) Erdogan, F. and Ratwani, M., 1970, "Fatigue and Fracture of Cylindrical Shells Containing A Circumferential Crack," Int. J. of Fracture Mechanics, Vol. 6, pp. 379~392.
- (26) Erdogan, F. and Delale, F., 1979, "Transverse Shear Effects In A Circum-

- ferentially Cracked Cylindrical Shell," Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 37, pp 239~258.
- (27) Simmonds, J. G. and Duva, J., 1981, Thickness Effects Are Minor In the Energy-Release Rate Integral for Bent Plates Containing Elliptic Holes or Cracks," J. of Applied Mechanics, Vol. 48, pp. 320~326.
- (28) Sanders, J. L., Jr., 1982, "Circumferential Through-Cracks In Cylindrical Shells Under Tension," J. of Applied Mechanics, Vol. 49, pp. 103~107.
- (29) Sanders, J. L., Jr., 1983, "Circumferential Through-Crack In A Cylindrical Shell Under Combined Bending and Tension," J. of Applied Mechanics, Vol. 50, p. 221.
- (30) Alabi, J. A. and Sanders, J. L., Jr., 1985, "Circumferential Crack at the Fixed End of a Pipe." Engineering Fracture Mechanics, Vol. 22, No. 4, pp. 609~616.
- (31) Budiansky, B. and Sanders, J. L., Jr., 1963, "On the Best First-Order Linear Shell Theory," Progress in Applied Mechanics, the Prager Anniversary Volume, Macmillan.
- (32) Sanders, J. L., Jr., 1987, "Dugdale Model for Circumferential Through Cracks in Pipes by Bending," Int. J. of Fracture, Vol. 34, pp. 71~81.
- (33) Sanders, J. L., Jr., 1987, "Tearing of Circumferential Cracks In Pipes Loaded by Bending," Int. J. of Fracture, Vol. 35, pp. 283~294.
- (34) Rahman, S. and Brust, F., 1992, "Elastic-Plastic Fracture of Circumferential Through-Wall Cracked Pipe Welds Subjected to Bending," J. of Pressure Vessel Technology, Vol. 114., pp. 410~416.
- (35) Yoo, S. H. and Pan, J., 1992, "Approximate Crack Opening Displacement Solutions for Long Circumferential Cracks in Pipes Subjected to Bending and Tension," J. of Pressure Vessel Technology, Vol. 114, pp. 178~180.
- (36) Gruter, L., Setz, W., Bhandari, S., Deschanel, H. and Faidy, C., 1992, "Stress Intensity Factor Solution for Thin-Walled Straight Pipes DN 700 under Bending," Int. J. of Pressure Vessels and Piping, Vol. 52, pp. 379~390.
- (37) Yoo, S. H. and Pan, J., 1990, "Deformation Mode and Crack Opening Displacement for Circumferentially Cracked Pipes in Bending and Tension," Proceedings of the Seminar on Leak-Before-Break: Further Developments in Regulatory Policies and Supporting Research, Taipei, Taiwan, NUREG/CP-0109, U.S. Nuclear Regulatory Commission, Washington D.C., pp. 231~260.
- (38) Almeida, M. C. V., 1982, "The Application of the FFT to the Analysis of Large Deflection of Beams and Plates," Engineer Thesis, Stanford University.
- (39) Bird, M. and Steele, C. R., 1992, "A Solution Procedure for Laplace's Equation on Multiply Connected Circular Domains," J. of Applied Mechanics, Vol. 59, pp. 398~404.
- (40) Barrett, K. E., and Ellis, S., 1988, "An Exact Theory of Elastic Plates," Int. J. of Solids and Structures, Vol. 24, pp. 856~880.
- (41) Mahmoud, A. A., Abdel-Tawab, K. I. and Nassar, M., 1992, "The Bending of Elastically Supported Cracked Plates," Engineering Fracture Mechanics, Vol. 43, pp. 277~285.
- (42) Khdeir, A. A., Reddy, J. N. and Libres-

cu, L., 1987, "Analytical Solution of A Refined Shear Deformation Theory for Rectangular Composite Plates," Int. J. of

Solids and Structures, Vol. 23, pp. 1447 ~1463.

국제 학술대회 참가 안내

FEFG '94

International Symposium on Fracture and Strength of Solids

주 관 : FEFG (Far East Fracture Group)

일 시 : 1994년 7월 4일 ~ 7일 (4일간)

장 소 : Xi'an, China

분 야 : -Fracture and Damage

-Strength of Materials

-Micromechanics

-Plasticity

-Strength of Structures under Dynamic Loading

등의 응용분야를 포함한 재료 및 파괴 전분야

일 정 : 초록접수마감 : 1993년 10월 1일    채택여부통보 : 1993년 12월 1일

논문접수마감 : 1994년 3월 1일

관심있는 분은 영문 300~400자(1page) 초록을 작성하시어 아래 주소로 제출하시기 바랍니다.

연락처 : 한국해양대학교 기계공학과(부산시 영도구 동삼동 1번지 (우)606-791)

김 영 식    교수

전화 : (051)410-4351, 팩스 : (051)414-2475