

(技術論文)

부분구조 합성법을 이용한 배기계의 진동해석

임재문* · 김민수** · 이귀영**

(1992년 8월 24일 접수)

Vibration Analysis of an Exhaust System with Bellows Using the Component Mode Synthesis

Jae-Moon Lim, Min-Soo Kim and Kwi-Young Lee

Key Words : Component Mode Synthesis(부분구조 합성법), Idle Shake(공회전시 진동), Frequency Response Function(주파수 응답함수), Bellows(벨로우즈), Car Interior Noise(차실내소음)

Abstract

An efficient vibration analysis method, Component Mode Synthesis(CMS), for an exhaust system with bellows is presented. Analyses are performed for two types of bellows, where characteristics of vibration modes affecting idle shake and interior noise of a vehicle are examined. Also analyzed are the contributions of an exhaust and engine mounting system to the idle shake and interior noise. Comparison between the analysis and test is in good agreement, hence the CMS method is shown to be efficient and valid.

1. 서 론

최근의 승용차에 대한 고객의 요구품질의 하나로써, 차실내의 정숙성이 크게 대두되고 있다. 차실내 진동, 소음(騒音)은 이와 관련된 구동계, 현가계, 차체 등의 진동 특성 개선 효과에 관한 많은 연구들을 통해서도 그 중요성을 알 수 있다.⁽¹⁾ 진동, 소음에 대한 대책이 진척됨에 따라, 배기계(exhaust pipe system) 진동의 차실내 진동, 소음에 대한 영향은 상대적으로 주목을 받게되었고, 현재에는 차실내 진동, 소음을 저감시키기 위하여 배기계의 진동특성 개선 및 머플러의 소음(消音) 특성 개선이 중요한 과제로 대두되고 있다.⁽¹⁾⁽²⁾

배기계의 진동에 의한 차실내 진동 소음은, 차체

의 진동모드 및 차실내의 음향모드와 일치하는 진동입력이 행거(hanger)를 통하여 차체 플로어(floor)에 전달되어 발생한다. 따라서 그 대책으로서 배기계 공진주파수와 차체 및 차실내의 고유진동수가 일치하지 않도록 배기계의 공진특성을 개선하고, 행거의 위치는 가능하면 모드 형상(mode shape)의 절점(nodal point)으로 설계한다. 또한 행거의 스프링상수도 최적으로 설계되어야 한다.

배기계로 인한 진동, 소음을 저감하기 위하여, 최근 자동차업계에서는 벨로우즈를 많이 사용하고 있다.⁽²⁾ 벨로우즈가 장착된 배기계는 벨로우즈가 장착되기 전과는 동특성이 많이 달라지므로, 벨로우즈 단품 및 배기계의 동특성을 정확하게 파악할 필요가 있다. 벨로우즈가 장착된 배기계의 동특성 해석을 유한요소법으로 수행하는 경우, 벨로우즈의 형상으로 인해 상당히 많은 유한요소수가 필요하며, 경우에 따라서는 컴퓨터 시스템 사정상 해석이 불가능할 수도 있다. 이와 관련하여 현재까지는 주

*정회원, 한양대학교 기계설계학과

**정회원, 고등기술원 자동차 연구실

로 벨로우즈를 등가 스프링요소로 치환하여 배기계의 동특성을 해석하였다. 그러나 이 방법은 고유진동수 및 모드형상을 정확하게 구하기 위하여 많은 시행착오를 필요로 하기 때문에 벨로우즈가 장착된 배기계를 해석하기에는 곤란하였다.

본 연구에서는, 이상과 같은 문제점을 극복하고 벨로우즈가 장착된 배기계의 동특성을 정확하게 해석하기 위하여, 상용 소프트웨어인 SYSTAN(CAEDS 또는 I-DEAS)의 부분구조 합성법을 이용하였다.⁽³⁾ 이와같은 방법을 사용하므로써 상세한 유한요소 모델을 실용시간내에 해석할 수 있었으며, 동특성을 개선하기 위한 구조변경시에도 해석 시간을 단축할 수 있었다. 이는 변경된 부분구조만 재해석하여 이미 해석된 부분구조와 합성하여 전체 시스템의 동특성을 해석할 수 있기 때문이다.

본 논문에서는, 배기계에 파워플랜트(power plant)와 엔진마운트(engine mount)를 추가한 모델링으로, 길이가 다른 벨로우즈가 장착된 배기계의 동특성을 검토하였다. 또한, 엔진 공회전시 진동(idle shake) 및 차실내소음(car interior noise)에 영향을 미칠 수 있는 모드에서 각 부분구조의 상대적인 기여도도 검토하였다. 부분구조 합성법을 이용한 해석의 타당성 검토를 위하여, 해석치와 시험치의 비교분석도 아울러 행하였다.

2. 부분구조 합성법

부분구조 합성법은 component mode synthesis (CMS), modal synthesis 및 building block approach(BBA) 등으로 불리우며, 크고 복잡한 구조물의 컴퓨터 실행시간, 경비절감 및 구조물의 부분적인 수정이 있을 경우 전체시스템을 재해석해야 하는 단점을 극복하기 위하여 개발되었다. 부분구조 합성법은 복잡한 구조물을 몇 개의 주요 요소 또는 부분구조로 나누어 유한요소법이나 시험을 통하여 독립적으로 고유진동수(natural frequency)와 모드형상(mode shape)을 구한 후, 이들 사이에 적절한 구속조건을 고려하여 합성한 전체구조물의 고유진동수와 모드형상 및 강제진동에 의한 응답(response) 등을 구하는 방법이다.⁽¹⁾⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾

SYSTAN에서 사용할 수 있는 부분구조 합성법에는 2가지가 있다.⁽³⁾ 첫번째 방법은 구속이 없는 상태에서 구한 자유모드(free mode)와 잔류역강성(residual flexibility)을 이용하는 방법이며, 두번째

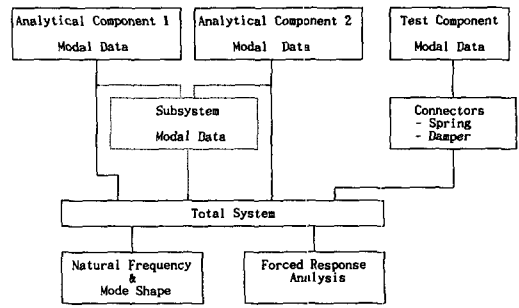


Fig. 1 Schematic diagram of component mode synthesis

방법은 구속모드(constraint mode)를 이용하여 합성하는 방법이다. 본 연구에서는 자유모드와 잔류역강성을 이용한 부분구조 합성법을 이용하였으며, 자세한 사항은 부록 A에 나타내었다.⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾ Fig. 1은 부분구조 합성법을 간략하게 도식화한 것이다.

3. 배기계의 유한요소 모델링 및 경계조건

배기계는 Fig. 2와 같이 파이프, 컨버터터(converter), 머플러 및 벨로우즈 등으로 구성되어 있다. 여기에서 부분구조는 그림에서 보는 것과 같이 편의상 FRT, BLWS, REAR로 구분하였으며, 다시 BLWS는 벨로우즈의 원통부분과 파형부분의 부분구조를 합친 부시스템(subsystem)이다. 파이프는 보요소(beam element), 컨버터터와 머플러는 간단한 솔리드요소(solid element), 벨로우즈는 4절점 셸요소(shell element)를 사용하였다. 컨버터터와 머플러를, 일반적으로 많이 사용하는 집중질량요소(lumped mass element)를 사용하지 않고

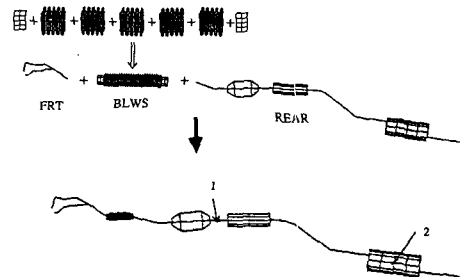


Fig. 2 Finite element model of exhaust pipe system (1,2:hanger positions)

솔리드요소를 사용하므로써, 관성모멘트를 측정할 필요가 없고,⁽⁸⁾ 전체시스템의 모드형상과 절점을 정확하게 시뮬레이션 할 수 있었다.

본 연구에 사용된 벨로우즈는 길이가 160 mm, 250 mm의 두가지이며, 160 mm 벨로우즈(파형 13개)는 파형을 2개의 부분구조로 분리하였고, 250 mm 벨로우즈(파형 25개)는 파형을 5개의 부분구조로 분리하였으며, 동일한 형상과 경계조건을 갖는 부분구조는 그중에서 하나의 부분구조만 해석하여 공통적으로 이용하였다.⁽³⁾ 파워플랜트, 엔진마운트와 배기계의 엔진 공회전시 진동 및 실내소음과의 상관관계를 검토하기 위하여 파워플랜트는 강체요소(rigid element), 엔진마운트는 스프링요소를 사용하여 모델링하였다. 파워플랜트의 관성모멘트와 엔진마운트의 스프링상수값은 시험으로 구한 값을 사용하였다.⁽⁹⁾ 전체시스템 결합시 셸요소, 솔리드요소를 보요소와 연결시키기 위하여 강체요소(rigid element)를 사용하였다.

시험치⁽¹⁰⁾와 비교검토하기 위하여 해석시 배기계의 경계조건은 부분구조 FRT의 전단(front end)을 고정하였다. 파워플랜트와 엔진마운트가 추가된 경우는 엔진마운트가 차체에 연결되는 곳을 고정하였다. 본 연구에서는 공회전시 진동, 차실내소음과 관련된 모드에서 길이가 다른 벨로우즈가 장착된 배기계의 행거위치에서 동특성을 비교검토하기 위하여, 행거의 경계조건은 제외하였다. Fig. 2에서 행거의 위치는 1, 2로 나타내었다.

4. 해석결과 및 토의

4.1 시험치와 해석치의 비교검토

본 연구에 사용된 해석방법의 타당성을 검토하기 위하여, 250 mm 벨로우즈가 장착된 배기계의 시험치와 해석치를 Fig. 3에 나타내었다. 그림에서 Case 1은 부분구조 합성법을 이용하여 1차 해석한 결과이며, 결합조건은 병진자유도(translational DOF)만 고려하였다. Case 2는 Case 1의 해석결과를 토대로 25-30 Hz에서 시험치에 더욱 근접시키기 위하여 부분구조의 결합조건을 회전자유도(rotational DOF)까지 고려한 것이다. 또한, 부분구조 REAR의 유한요소 모델은 Case 1에서 셸요소와 보요소로 모델링한 머플러의 관성모멘트를 효과적으로 처리하기 위하여, Case 2에서는 솔리드요소로 수정하였다. 그림에서 보는 것과 같이 시험

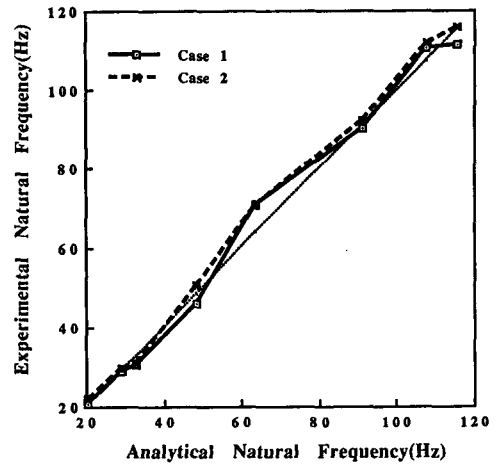


Fig. 3 Comparison of experimental and analytical natural frequencies of exhaust pipe system

치와 해석치가 잘 일치하는 것을 알 수 있으며, 64 Hz 부근의 모드만 다소 차이(오차 9%)가 나는 것을 알 수 있다.

시험치와 차이가 나는 모드는 각 부분구조의 기여도를 검토하여, 다른 모드에 영향을 주지 않는 범위내에서, 그 모드에서 기여도가 가장 큰 부분구조의 유한요소 모델을 수정하여 시험치와 해석치를 일치(correlation) 시켜야 할 것으로 생각된다. 그러나, 본 연구의 관심있는 영역(25~30 Hz, 80 Hz)에서는 잘 일치되었다고 생각되므로, 차후의 해석시 유한요소 모델을 수정하지 않아도 무방하리라고 생각된다.

4.2 파워플랜트와 엔진마운트를 추가한 배기계의 동특성 해석

서로 다른 벨로우즈가 배기계에 장착되었을 때, 공회전시 진동 및 차실내소음과 관련된 주파수영역에서 배기계의 동특성을 검토하기 위하여 파워플랜트와 엔진마운트를 추가하여 해석을 수행하였다. 해석한 결과를 Fig. 4에서 Fig. 8에 나타내었다. Table 1과 Table 2는 각 부분구조의 기여도를 분석한 것이다. 기여도를 계산하는 방법은 부록 B에 나타내었다.⁽³⁾ 내용전개의 편의상 250 mm 벨로우즈를 창작한 배기계를 시스템 A라고 하고, 160 mm 벨로우즈를 창작한 배기계를 시스템 B라고 정의한다.

Fig. 4와 Fig. 5는 행거의 위치 1과 2에서 시스템 A, B의 주파수 응답함수(frequency response

Table 1 Strain energy contribution of exhaust pipe system with 250 mm bellows (Unit:%)

MODES(Hz)	8	9	10	11	12	13
COMP.	19.5	29.6	30.2	48.8	69.3	80.6
FRONT PART	12.02	12.48	7.71	17.60	4.65	19.93
REAR PART	13.21	51.52	53.16	72.53	87.16	32.92
BELLOWS	50.07	33.57	35.18	1.38	2.20	17.10
RH MOUNT	2.92	0.91	0.62	3.49	1.41	4.43
LH MOUNT	6.85	0.09	1.39	4.51	0.54	22.26
RR MOUNT	14.93	1.41	1.94	0.49	3.99	3.36

Table 2 Strain energy contribution of exhaust pipe system with 160 mm bellows (Unit:%)

MODES(Hz)	8	9	10	11	12	13
COMP.	24.7	37.9	41.2	49.5	71.9	88.1
FRONT PART	21.76	27.58	14.40	25.12	8.88	16.56
REAR PART	18.87	53.42	62.27	59.06	78.41	46.31
BELLOWS	17.96	7.52	16.48	8.04	1.54	5.38
RH MOUNT	4.61	2.66	1.27	2.65	2.52	11.63
LH MOUNT	11.65	2.10	1.18	5.11	1.33	15.94
RR MOUNT	25.14	6.72	4.41	0.03	7.32	4.08

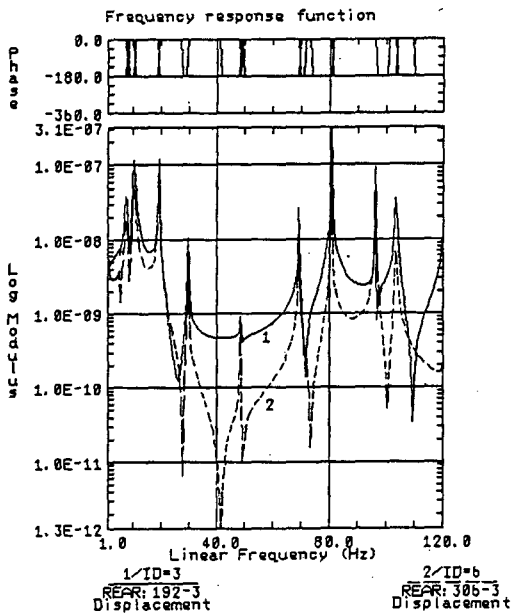


Fig. 4 Frequency response functions at position 1 and 2 of exhaust system with power plant and engine mount system(250 mm Bellows)

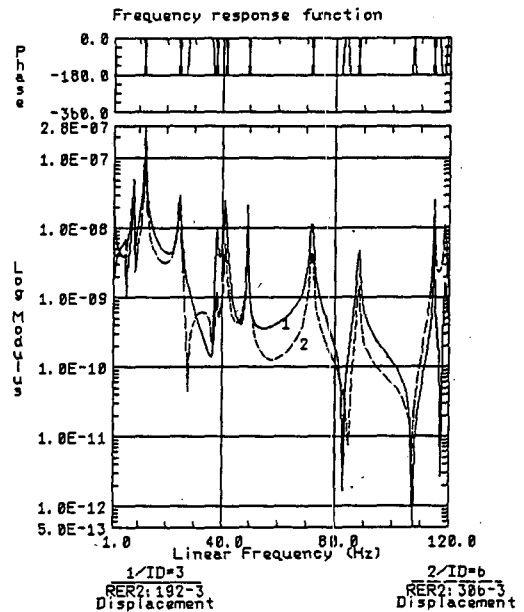


Fig. 5 Frequency response functions at position 1 and 2 of exhaust system with power plant and engine mount system(160 mm bellows)

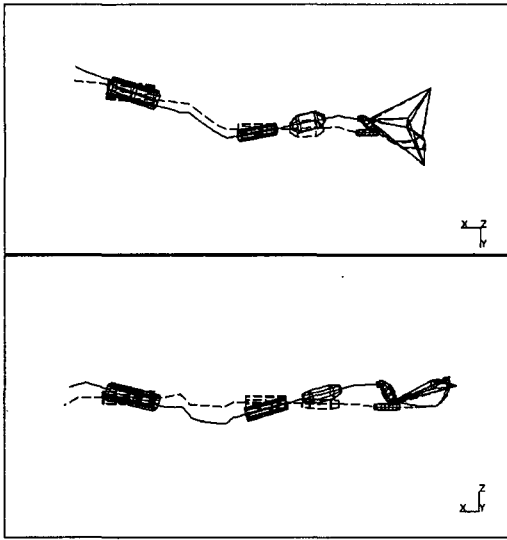


Fig. 6 Mode shape of exhaust pipe system with power plant and engine mount system(250 mm bellows, 29.6 Hz)

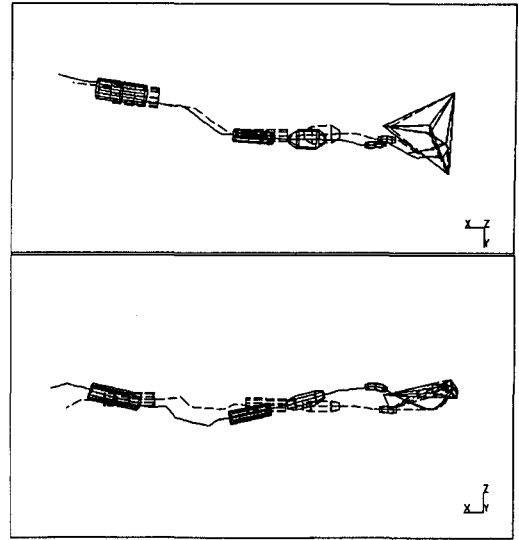


Fig. 8 Mode shape of exhaust pipe system with power plant and engine mount system(160 mm bellows, 24.7 Hz)

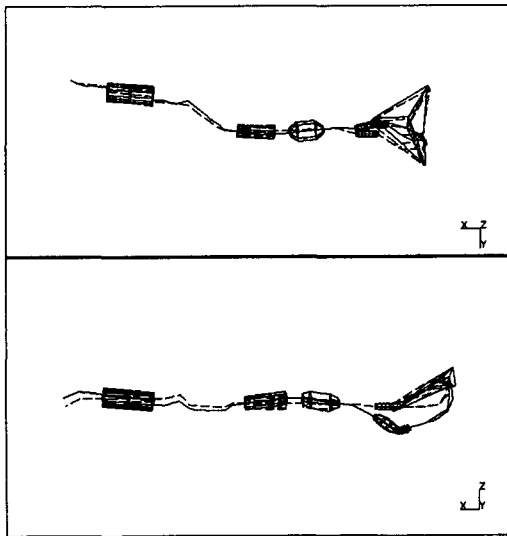


Fig. 7 Mode shape of exhaust pipe system with power plant and engine mount system(250 mm bellows, 80.6 Hz)

function)이다. 그림에서 보는 것과 같이 공회전시 진동과 관련된 주파수영역(25~30 Hz)과 차실내소음과 관련된 주파수영역(80 Hz 부근)에서 시스템 A와 시스템 B의 특성이 상이한 것을 알 수 있다.

Fig. 6은 공회전시 진동과 관련된 진동수인 29.6 Hz에서 시스템 A의 모드형상이다. 그림에서 보는

것과 같이 절점이 행거의 위치와 잘 일치한다. 또한 그림에서 보는 것과 같이 벨로우즈가 파워플랜트로부터 변형을 흡수하여 동흡진기(dynamic damper)의 역할을 수행한 것을 알 수 있다. 그러나 이 모드는 엔진의 공회전시에 공진영역에 포함되므로 공진을 피할 수 있도록 설계변경이 요구되며, 벨로우즈 및 배기계의 내구성을 검토하기 위하여 피로시험과 해석을 수행할 필요가 있다고 생각된다.

Fig. 7은 차실내소음과 관련이 있는 80.6 Hz에서의 시스템 A의 모드형상이다. 이는 차실내의 고유진동수와 공진이 발생하여 실내소음을 증가시킬 것으로 생각된다. 따라서 이 모드와 관련된 차실내소음을 줄이기 위해서는, Table 1에서 볼 수 있는 것과 같이 상대적으로 기여도가 큰 LH(left) 엔진마운트의 강성을 변경시키고,⁽⁹⁾ 또한 공간상(package design)의 제약이 없다면 머플러의 위치를 뒷쪽으로 약간 이동시키는 것이 효과적인 것으로 생각된다. 이는 머플러 위치의 설계민감도 해석⁽⁹⁾에 의한 것이다.

Fig. 8은 공회전시 진동과 관련된 시스템 B의 모드형상이다. 그림에서 볼 수 있는 것과 같이 RR(rear) 엔진마운트의 변위가 크고, Table 2에서 볼 수 있는 것과 같이 상대적으로 기여도가 큰 것을 알 수 있다. 따라서 RR 엔진마운트의 강성값을

크게하고, ⁽⁸⁾ 행거 1의 위치를 원래 위치보다 약간 뒤로 이동시키면 시스템 B의 공회전시 진동과 관련된 동특성을 개선시킬 수 있다.

이상에서 살펴본 것과 같이 모드형상과 기여도분석을 통하여 시스템의 동특성을 개선시킬 수 있을 것으로 생각되며, 구조변경의 제약이 있을 경우는 양자를 적절하게 조합하면 보다 나은 결과를 얻을 수 있을 것이다.

5. 결 론

벨로우즈가 장착된 배기계를 부분구조 합성법을 이용하여 해석한 결과 다음과 같은 결론을 구하였다. 첫째로 시험치와의 상대비교를 통해 부분구조 합성법을 이용한 배기계의 진동해석의 타당성을 입증하였다. 두번째로 벨로우즈의 파형과 같이 동일한 형상과 경계조건을 갖는 부분구조가 여러개 있을 경우, 그중 하나의 부분구조만 해석하여 이것의 모달 데이터(modal data)를 다른 부분구조에 동일하게 이용할 수 있으므로, 전체 해석시간을 줄일 수 있었으며 컴퓨터 용량도 효율적으로 이용할 수 있었다. 셋째로 공회전시 진동의 관점에서는 250 mm 벨로우즈를 장착한 배기계의 동특성이 보다 나은 것을 알 수 있었고, 차실내소음 관점에서는 160 mm 벨로우즈를 장착한 배기계의 동특성이 보다 좋은 것을 알 수 있었다. 마지막으로 각 부분구조의 기여도분석을 통하여, 250 mm 벨로우즈를 장착한 배기계의 80 Hz 근처의 차실내소음을 개선하기 위하여 LH 엔진마운트의 강성을 변경시키고, 머플러의 위치를 뒷쪽으로 약간 이동시켜야 할 것으로 생각된다.

참고문헌

- (1) 三浦登, 福田水穂, 1990, “自動車設計と解析シミュレーション,” 培風館, 東京.
- (2) 三輪智明, 1981, “排氣系の振動について,” 日本自動車技術, Vol. 35, No. 4, pp. 374~378.
- (3) SYSTAN User's Guide in CAEDS V3R1 Manual (Available from SDRC Korea).
- (4) Craig, R. R., 1985, “A Review of Time-Domain And Frequency-Domain Component Mode Synthesis Method,” in Combined Experimental/Analytical Modeling of Dynamic Structural

Systems(eds Martinez, D.R. and Miller, A.K.), The Joint ASCE/ASME Mechanics Conference, Albuquerque, New Mexico, AMD-Vol. 67, pp. 1~30.

- (5) Martinez, D. R., Miller, A.K. and Carne, T.G., 1985, “Combined Experimental/Analytical Modeling of Shell/Payload Structures,” in Combined Experimental/Analytical Modeling of Dynamic Structural Systems(eds Martinez, D.R. and Miller, A.K.), The Joint ASCE/ASME Mechanics Conference, Albuquerque, New Mexico, AMD-Vol. 67, pp. 167~194.
- (6) Nishioka, M. and Tomita, T., 1985, “Method of Large-scale Vibration Analysis of Vehicle Body Structure,” 日本自動車技術會論文集, No. 3, pp. 68~75.
- (7) Jee, S.H., Lee, J.Y. and Lee, K.Y., 1992, “Dynamic Analysis of Body-In-White Using Component Mode Synthesis,” CAEDS/I-DEAS User's Conference, Korea(Available from SDRC Korea).
- (8) Kim, M.S., 1990, “Vibration Analysis and Optimum Design of an Exhaust Pipe System,” CAEDS/I-DEAS User's Conference, Korea(Available from SDRC Korea).
- (9) Kim, M.S., Kim, H.S. and Choi, D.H., 1990, “전륜구동형 승용차의 엔진마운팅 시스템 최적설계,” 대한기계학회 춘계학술대회논문집.
- (10) Lee, Y.S. and Choi, W.D., 1991, “Test Report of an Exhaust Pipe System,” Internal Report, NVH, Technical Center, DWMC.

부록 A

본 연구에서 적용한 자유모드와 잔류역강성을 이용한 부분구조 합성법의 이론은 다음과 같으며, 이 방법은 2단계의 변환으로 구성되어 있다. 제1단계의 변환은 Ritz 변환으로, 이 변환의 결과는 일반화된 좌표계(generalized coordinate)로 표현되는 부분구조물의 행렬이다. 이러한 형태로 표현하면 생략된(truncated) 모드의 영향을 쉽게 알 수 있다. 제2단계의 변환은 잔류 모드와 관련된 일반화된 좌표계를 경계 자유도에 관련된 물리 좌표계로 변환하는 것이다. 이런 변환을 통하여 합성이 단순

해지므로 전체 시스템의 합성이 용이해진다.

(1) 제 1 단계 변환

$$M\ddot{x} + Kx = F \quad (A1)$$

$$x = \begin{Bmatrix} x_I \\ x_B \end{Bmatrix}, F = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_B \end{Bmatrix} \quad (A2)$$

여기서, M 은 질량 행렬, K 는 강성 행렬, x 는 변위 벡터, F 는 힘 벡터이고 I 는 내부, B 는 경계, f_B 는 인접한 부분구조물에 의한 경계에서의 힘 등이다.

(A1)식의 고유치 해석을 수행하여 구한 고유벡터들은 x 에 대하여 다음과 같은 근사 변환으로 사용된다.

$$x = \phi_k \cdot q_k + G_B \cdot q_B = [\phi_k \ G_B] \begin{Bmatrix} q_k \\ q_B \end{Bmatrix} = T_1 \cdot q \quad (A3)$$

여기서, ϕ_k 는 동적 모드(강제모드와 탄성모드), G_B 는 잔류역강성 행렬의 일부분이며, q_k, q_B 와 q 는 일반화된 좌표계의 벡터이다.

G 의 정의는

$$G = \sum_{i=n_k+1}^N \left[\frac{\phi_i \cdot \phi_i^T}{\omega_i^2} \right] \quad (A4)$$

이며, 여기서 ϕ_i 는 i 번째 제거된 모드이고 고유벡터는 단위 모달질량으로 정규화되었다.

$$G = \begin{bmatrix} G_{II} & G_{IB} \\ G_{BI} & G_{BB} \end{bmatrix} \quad (A5)$$

이 변환을 상세하게 쓰면

$$x = \begin{Bmatrix} x_I \\ x_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{kI} & G_{IB} \\ \phi_{kB} & G_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_k \\ q_B \end{Bmatrix} = T_1 \cdot q \quad (A6)$$

G 는 단지 제거된 탄성모드 만을 사용하여 계산하였기 때문에 ϕ_k 와 G 는 M 에 관하여 직교성을 알 수 있다. (A3)을 (A1)에 대입하면

$$M^R \ddot{q} + K^R q = F^R \quad (A7)$$

여기에서 $M^R = T_1^T \cdot M \cdot T_1$, $K^R = T_1^T \cdot K \cdot T_1$, $F^R = T_1^T \cdot F$ 이다.

(A7)식을 확장하고 직교성을 이용하면,

$$K^R = \begin{bmatrix} \phi_k^T \cdot K \cdot \phi_k & \phi_k^T \cdot K \cdot G_B \\ G_B^T \cdot K \cdot \phi_k & G_B^T \cdot K \cdot G_B \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \Omega_{kk}^2 & 0 \\ 0 & G_{BB} \end{bmatrix}$$

$$M^R = \begin{bmatrix} I_{kk} & 0 \\ 0 & H_{BB} \end{bmatrix}, F^R = \begin{bmatrix} \phi_{kB}^T \\ G_{BB} \end{bmatrix} f_B \quad (A8)$$

여기서 $\Omega_{kk}^2 = \phi_k^T \cdot M \cdot \phi_k$, $I_{kk} = \phi_k^T \cdot M \cdot \phi_k$, $H_{BB} = G_B^T \cdot K \cdot G_B$ 이다. (A7)식과 (A8)식을 풀어 쓰면 아래와 같으며 이러한 정식화 기법은 Consistent Ritz기법이다.

$$\begin{bmatrix} I_{kk} & 0 \\ 0 & H_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_k \\ q_B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_{kk}^2 & 0 \\ 0 & G_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_k \\ q_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{kB}^T \\ G_{BB} \end{bmatrix} f_B \quad (A9)$$

Ω_{kk}^2 는 동적 특성을 갖는 대각 행렬이고 I_{kk} 는 동적 변위 형태에 관계되는 단위 모달 질량 행렬이다. G_{BB} 와 H_{BB} 는 잔류 역강성 모드에 의한 정적 변위 형태에 관계되는 일반화된 강성 행렬과 질량 행렬이다. 위식에서 축약된 부분구조물은 비연성화(decouple)되었으며, 제거된 모드에 의한 잔류항의 영향은 각각 잔류 질량 행렬과 잔류 강성 행렬로 고려되었다.

(2) 제 2 단계 변환

부분구조물 사이의 간단하고 일반적인 합성을 위하여 수식의 형태를 변경하는 것이 편리하다. (A6)식의 아래 부분($x_B = \phi_{kB} \cdot q_k + G_{BB} \cdot q_B$)을 분리하면 다음과 같다.

$$q_B = G_{BB}^{-1} (x_B - \phi_{kB} \cdot q_k) \\ = -G_{BB}^{-1} \cdot \phi_{kB} \cdot q_k + G_{BB}^{-1} \cdot x_B \quad (A10)$$

$$q_2 \text{를 다음과 같이 정의하면 } q_2 = \begin{Bmatrix} q_k \\ x_B \end{Bmatrix}$$

$$q = \begin{Bmatrix} q_k \\ q_B \end{Bmatrix} = T_2 \cdot q_2 \\ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -G_{BB}^{-1} \cdot \phi_{kB} & G_{BB}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_k \\ x_B \end{Bmatrix} \quad (A11)$$

($K_2^R = T_2^T \cdot K^R \cdot T_2$, $M_2^R = T_2^T \cdot M^R \cdot T_2$, $F_2^R = T_2^T \cdot F^R$)를 사용하면 부분구조물의 방정식은 다음과 같다.

$$M_2^R \cdot \ddot{q}_2 + K_2^R \cdot q_2 = F_2^R \quad (A12)$$

여기서,

$$K_2^R = \begin{bmatrix} \Omega_{kk}^2 + \phi_{kB}^T \cdot G_{BB}^{-1} \cdot \phi_{kB} & -\phi_{kB}^T \cdot G_{BB}^{-1} \\ \text{Symmetry} & G_{BB}^{-1} \end{bmatrix} \quad (A13)$$

$$M_2^R = \begin{bmatrix} I_{kk} + \phi_{kB}^T \cdot J_{BB} \cdot \phi_{kB} & -\phi_{kB}^T \cdot J_{BB} \\ \text{Symmetry} & J_{BB} \end{bmatrix} \\ F_2^R = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_B \end{Bmatrix} \quad (A14)$$

$$J_{BB} = G_{BB}^{-1} \cdot H_{BB} \cdot G_{BB}^{-1} \text{이다.}$$

(A12)식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} I_{kk} + \phi_{kB}^T J_{BB} \phi_{kB} - \phi_{kB}^T J_{BB} \\ \text{Symmetry} & J_{BB} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_K \\ x_B \end{Bmatrix} \\ & + \begin{Bmatrix} \Omega_{kk}^2 + \phi_{kB}^T G_{BB}^{-1} \phi_{kB} - \phi_{kB}^T G_{BB}^{-1} \\ \text{Symmetry} & G_{BB}^{-1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_K \\ x_B \end{Bmatrix} \\ & = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_B \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

이제는 x_B 가 물리좌표계로 명백하게 나타났으므로 (A13), (A14)식을 이용하여 합성된 시스템의 방정식을 행렬을 직접 결합하여 얻을 수 있다. 그러나 (A8)식에서는 명백하던 K_2^R , M_2^R 의 물리적 의미는 잃어 버린다. 이 방법에서 역행렬을 계산해야 할 행렬은 결합 자유도에 관계된 분해된 잔류 역강성 행렬 G_{BB}^{-1} 뿐이다. 따라서 전체 변환은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T_{tot} &= T_1 \cdot T_2 \\ &= \begin{bmatrix} \phi_{KI} & G_{IB} \\ \phi_{KB} & G_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -G_{BB}^{-1} \cdot \phi_{KB} & G_{BB}^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \phi_{KI} - G_{BB} \cdot G_{BB}^{-1} \cdot \phi_{KB} & G_{IB} \cdot G_{BB}^{-1} \\ \phi_{KB} - G_{BB} \cdot G_{BB}^{-1} \cdot \phi_{KB} & G_{BB} \cdot G_{BB}^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \phi_{KI} & G_{IB} \\ 0 & I_{BB} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A16})$$

부록 B

전체 시스템의 모드에 대한 각 요소(compo-

nent)의 모드의 기여도는, 에너지의 계산을 통하여, 파악할 수 있다. 식(A1)에서 $x = X e^{j\omega t}$ 로 정하면, 운동에너지와 변형에너지는 다음과 같다.

$$KE = \Sigma \left[-\frac{1}{2} \omega^2 m X^2 \right] \quad (\text{B1})$$

$$SE = \Sigma \left[\frac{1}{2} k X^2 \right] \quad (\text{B2})$$

여기서, m 은 질량, k 는 강성이다. 모달 파라미터(modal mass, modal stiffness)를 이용하여 전체 시스템의 r 번째 모드의 에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$KE_r = -\frac{1}{2} \omega_r^2 m_r \quad (\text{B3})$$

$$SE_r = \frac{1}{2} k_r \quad (\text{B4})$$

전체시스템의 r 번째 모드에 대한 각 요소의 에너지 기여도는 전체시스템의 r 번째 모드형상 행렬(mode shape matrix) 중에서 요소의 자유도에 해당하는 부분행렬과 요소의 질량과 강성을 이용하여 표현할 수 있다.

$$KE_{cr} = -\frac{1}{2} \omega_r^2 x_{cr}^T [M]_c x_{cr} \quad (\text{B5})$$

$$SE_{cr} = \frac{1}{2} x_{cr}^T [K]_c x_{cr} \quad (\text{B6})$$

본문의 Table 1과 2의 각 부분구조의 변형에너지는 (B4)식에 대한 (B6)식의 비를 의미한다.