

〈論 文〉

직교이방성 무한평판 내부의 두 원공사이에 존재하는 균열의 해석

정성균* · 홍창선**

(1992년 11월 24일 접수)

Analysis of a Crack Approaching Two Circular Holes in an Orthotropic Infinite Plate

S. K. Cheong and C. S. Hong

Key Words : Crack(균열), Hole(원공), Stress Intensity Factor(응력강도계수), Modified Mapping-Collocation(수정사상선점), Orthotropy(직교이방성), Complex Parameter(복소인자)

Abstract

This paper investigates the problem of a crack approaching two circular holes in an orthotropic infinite plate. The stress intensity factors were obtained by using the modified mapping-collocation method. The present results show excellent agreement with existing solutions for a crack approaching two circular holes in an isotropic infinite plate. In the numerical examples, various types of cross-ply laminated composites were considered. To investigate the effect of orthotropy and geometry(d/R and $a/(d-R)$) on crack tip singularity, stress intensity factors were considered as functions of the normalized crack length. It is expected that the modified mapping-collocation method can be applied to the analysis of various kinds of cracks existing around the stress-concentration region of composite laminate.

1. 서 론

어떤 구조물이 반복하중을 받고 있을 때 균열은 주로 응력집중부 주위에서 발생하고 성장한다. 예측하지 않은 구조물의 파괴를 피하기 위해서는 이와같은 응력집중부 근처에서의 파괴역학적 응력해석이 설계에 고려되어야 한다. 최근들어, 구조물의 효율성을 고려한 고강도 복합재료가 항공기 등에 널리 사용되고 있으나 미소 균열로 인한 파괴가 안전성에 위협을 주고 있다. 이처럼 파괴를 가져오는

균열의 크기와 균열 성장속도는 응력집중부의 기하학적 형상에 크게 의존함이 알려져 있다. 복합재료의 사용이 증가함에 따라서 이방성 탄성해석이 많이 이루어지고 있는데, 이방성체 내부 균열 선단부의 응력장에 대한 일반방정식이 복소변수를 이용하여 유도될 수 있음을 참고문헌(1)에서 볼 수 있다. Lekhnitskii⁽²⁾는 복소변수 해석함수를 이용하여 이방성 탄성론을 포괄적으로 다루었고, Savin⁽³⁾은 무한평판 내부의 원공 및 균열문제를 집중적으로 해석하였다. 응력집중부 주위의 균열문제 중에서도 등방성 평판내부의 원공주위 균열문제 해석에 관한 연구는 많이 보고되었다.⁽⁴⁻⁹⁾ 이러한 문제를 해석하기 위하여 등각사상법, 경계선점법 및 Mellin변

*정회원, 조선대학교 우주항공공학과

**정회원, 한국과학기술원 항공우주공학과

환법이 이용되었다. 그러나, 이방성 재료에 있어서 응력집중부^(10,11)나 파단강도^(12,13)에 관한 연구는 많지만 응력집중 부위에서 발생한 균열문제의 해석은 거의 없다. Waddoups 등⁽¹⁴⁾은 선형과곡역학을 이용하여 원공을 갖는 복합재료의 파단을 연구하였으나 등방성에 대한 Bowie의 결과를 해석 과정에서 적용하였다. Wang과 Yau⁽¹⁵⁾는 유한차원의 일방향 복합적층판 내부의 원공주위 균열문제를 유한요소 및 *J*-적분 개념을 이용하여 해석하였다. 복잡한 형상을 갖는 균열문제의 정확한 이론해는 구하기가 힘들다. 따라서, 여러가지 근사해법을 사용하게 된다. 저자는 참고문헌(16)과 (17)에서 등방성과 이방성에 각각 처음으로 제시한 수정사상선점법(modified mapping-collocation method)을 이용해서 직교이방성 무한평판 내부의 원공주위 균열문제에 대한 혼합모드 응력강도 계수를 구하였다.⁽¹⁸⁾

본 연구에서는 수정사상선점법을 이용해서 직교이방성 무한평판 내부의 두 원공사이래 존재하는 균열문제를 해석하고자 한다. 본 문제는 기하학적으로 복잡하고 재료의 이방성이 강하기 때문에 해가 아직 보고되어 있지 않다. 먼저 이론적 해석을 전개함으로써 균열 면에서의 무부하조건과 무한점에서의 경계조건을 완전하게 만족시킨다. 그 후 나머지 두 원공경계에 최소자승선점과정(least square collocation procedure)을 적용하여 근사해를 얻게 된다. 수치예로서 Cross-ply 적층판을 사용하였다. 균열선단 응력 특이성에 미치는 두 원공 경계 및 직교이방성의 효과를 알아보기 위해서 응력강도 계수를 무차원화된 균열길이의 함수로 나타내 보았다.

2. 이방성 재료의 이차원 탄성해석

본 장에서는 이방성 탄성해석의 기초가 되는 기본방정식을 간단하게 설명하고자 한다.⁽²⁾

체적력(body force)이 없는 경우의 평형방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

적합방정식(compatibility equation)은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2)$$

평면응력 상태에 있는 이방성 재료에 대한 응력-변형도 관계식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기에서 $a_{ij}(i, j=1, 2, 6)$ 는 컴플라이언스 성분으로서 재료상수이다.

다음과 같은 Airy 응력함수 $F(x, y)$ 를 도입하면 평형방정식은 자동적으로 만족된다.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

식(4)를 식(3)에 대입하고 다시 식(2)에 대입하면 미분방정식을 얻게 된다. 특성방정식의 근이 모두 다르다고 가정하면 응력함수의 일반화된 형태는 다음과 같다.

$$F(x, y) = 2Re[F_1(z_1) + F_2(z_2)] \quad (5)$$

여기에서

$$z_k = x + s_k y \quad (k=1, 2) \quad (6)$$

이며, F_1 과 F_2 는 각각 변수 z_1 과 z_2 의 해석함수이다. 복소인자(complex parameter) s_1, s_2 는 특성방정식의 근 중에서 허수부가 양수인 것으로 정의하였으며 특성방정식은 다음과 같다.

$$a_{11}s^4 - 2a_{16}s^3 + (2a_{12} + a_{66})s^2 - 2a_{26}s + a_{22} = 0 \quad (7)$$

식(5)를 식(4)에 대입하면 응력성분에 대한 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2Re[s_1^2 \phi_1'(z_1) + s_2^2 \phi_2'(z_2)] \\ \sigma_y &= 2Re[\phi_1'(z_1) + \phi_2'(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -2Re[s_1 \phi_1'(z_1) + s_2 \phi_2'(z_2)] \end{aligned} \quad (8)$$

여기에서 사용한 응력함수의 관계식은 다음과 같다.

$$\phi_k(z_k) = F_k(z_k) \quad (k=1, 2) \quad (9)$$

응력-변위 관계식과 식(3)을 이용하면 다음과 같은 변위식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} u &= 2Re[p_1 \phi_1(z_1) + p_2 \phi_2(z_2)] \\ v &= 2Re[q_1 \phi_1(z_1) + q_2 \phi_2(z_2)] \end{aligned} \quad (10)$$

여기에서 사용한 계수들의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p_k &= a_{11}S_k^2 + a_{12} - a_{16}S_k \\ q_k &= (a_{12}S_k^2 + a_{22} - a_{26}S_k) / S_k \quad (k=1, 2) \end{aligned} \quad (11)$$

Traction 형태의 경계조건 역시 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} f_1(s) + if_2(s) &= if^e(X_n + iY_n) ds \\ &= (1 + iS_1) \phi_1(z_1) + (1 + iS_2) \phi_2(z_2) \\ &\quad + (1 + i\bar{S}_1) \overline{\phi_1(z_1)} + (1 + i\bar{S}_2) \overline{\phi_2(z_2)} + c \end{aligned} \quad (12)$$

여기에서 X_n, Y_n 은 경계면을 따라서 작용하는 단위 면적당 힘의 x, y 성분이다. 여기에서 막대표시는 공액 복소수를 나타내는 부호이다.

3. 문제해석

Fig. 1에 나타낸 바와 같이 무한평판 내부의 두 원공 사이에 존재하는 균열문제를 해석하고자 한다. 기하학적 복잡성 및 재료의 큰 이방성때문에 이 문제의 해는 아직 보고되어 있지 않다. 이 문제를 해석하기 위하여 수정사상선점법을 이용하였다. 수정사상선점법은 원래 등방성 재료에 관한 문제를 해석함에 있어서 도입되었는데⁽¹⁶⁾ 그 후에 Bowie와 Freese가 직교이방성 경우에 대한 문제를 해석하는데까지 확장하였다.⁽¹⁷⁾ 함수의 해석 점속원리를 이용하면 균열 면에서의 무부하조건을 만족시킬 수 있다.

먼저 다음과 같이 단순한 사상을 도입한다.⁽¹⁷⁾

$$z = \omega(\zeta) = \frac{L}{2} \left\{ \zeta + \frac{1}{\zeta} \right\} \quad (13)$$

위의 사상함수는 ζ -평면에서의 단위원과 외부로 균열과 그 외부로 대응시킨다. z 평면에서 균열의 다른 경계에 대한 대응점은 다음 식으로 표시된다.

$$\zeta = \frac{z}{L} + \left[\left(\frac{z}{L} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \quad (14)$$

다음과 같은 두 복소평면의 사상함수를 고려한다.

$$z_k = \omega(\zeta_k) = \frac{L}{2} \left\{ \zeta_k + \frac{1}{\zeta_k} \right\} \quad (k=1, 2) \quad (15)$$

균열 면에서 z, z_1, z_2 가 같으므로 단위원 위에서 ζ, ζ_1, ζ_2 가 일치하게 되고, 그 외의 경계에 대한 대응

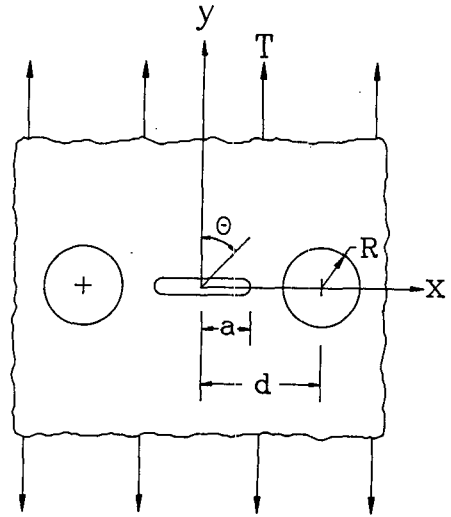


Fig. 1 Crack approaching two circular holes in an orthotropic infinite plate under uniform tensile stress

점은 다음과 같다.

$$\zeta_k = \frac{z_k}{L} + \left[\left(\frac{z_k}{L} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \quad (k=1, 2) \quad (16)$$

여기에서는 Fig. 1의 물리평면을 매개평면에 대응시키는 정확한 사상함수를 찾는 일을 피하고 단순한 사상함수를 이용하였다. 이것은 사상선점법의 장점 중의 하나이다.

편의상 매개평면에서의 응력함수를 다음과 같이 정의한다.⁽¹⁷⁾

$$\begin{aligned} \phi_k(z_k) &= \phi_k[\omega(\zeta_k)] = \phi_k(\zeta_k) \\ \phi'_k(z_k) &= \phi'_k(\zeta_k) / \omega'(\zeta_k) \quad (k=1, 2) \end{aligned} \quad (17)$$

위 식에서 사용한 미분식은 다음과 같다.

$$\omega'(\zeta_k) = \frac{L}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{\zeta_k^2} \right\} \quad (k=1, 2) \quad (18)$$

따라서 매개평면에서의 응력에 대한 식은 식 (8)과 (17)을 고려하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2Re \left[s_1^2 \frac{\phi'_1(\zeta_1)}{\omega'(\zeta_1)} + s_2^2 \frac{\phi'_2(\zeta_2)}{\omega'(\zeta_2)} \right] \\ \sigma_y &= 2Re \left[\frac{\phi'_1(\zeta_1)}{\omega'(\zeta_1)} + \frac{\phi'_2(\zeta_2)}{\omega'(\zeta_2)} \right] \\ \tau_{xy} &= -2Re \left[s_1 \frac{\phi'_1(\zeta_1)}{\omega'(\zeta_1)} + s_2 \frac{\phi'_2(\zeta_2)}{\omega'(\zeta_2)} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

변위에 대한 식은 식 (10)과 (17)로부터 다음과 같다.

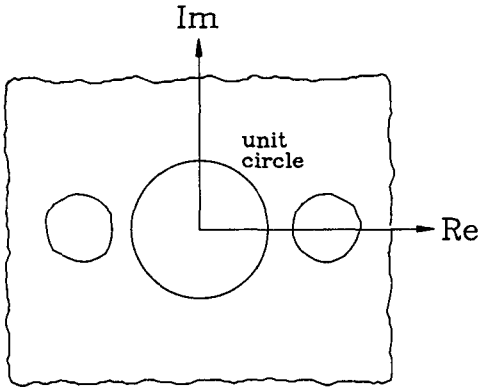


Fig. 2 ζ -transformed plane

$$\begin{aligned} u &= 2\text{Re}[p_1\phi_1(\zeta_1) + p_2\phi_2(\zeta_2)] \\ v &= 2\text{Re}[q_1\phi_1(\zeta_1) + q_2\phi_2(\zeta_2)] \end{aligned} \quad (20)$$

결과력 (resultant-force)에 대한 식은 식(12)와 (17)로부터 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_1(s) + if_2(s) &= (1 + is_1)\phi_1(\zeta_1) + (1 + is_2)\phi_2(\zeta_2) \\ &\quad + (1 + i\bar{s}_1)\overline{\phi_1(\zeta_1)} + (1 + i\bar{s}_2)\overline{\phi_2(\zeta_2)} + c \end{aligned} \quad (21)$$

ζ_1 과 ζ_2 에 해당하는 두 개의 매개영역을 $S\zeta_1^+$ 와 $S\zeta_2^+$ 로 표시하자. 그리고 Fig. 2에서 도시된 바와 같이 두 영역의 합을 $S\zeta^+$ 라고 하자.

응력함수들 사이에 다음과 같은 관계식을 도입한다.⁽¹⁷⁾

$$\phi_2(\zeta_2) = B\overline{\phi_1\left\{\frac{1}{\zeta_2}\right\}} + C\phi_1(\zeta_2) \quad (22)$$

여기에서 사용한 계수 및 정의 식은 다음과 같다.⁽¹⁷⁾

$$\overline{\phi_1\left\{\frac{1}{\zeta}\right\}} = \overline{\phi_1\left\{\frac{1}{\bar{\zeta}}\right\}} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} B &= (\bar{s}_2 - \bar{s}_1) / (s_2 - \bar{s}_2) \\ C &= (\bar{s}_2 - s_1) / (s_2 - \bar{s}_2) \end{aligned} \quad (24)$$

만약 $\phi_1(\zeta)$ 가 $S\zeta^+$ 와 단위평면에 관한 그 역 영역 (inverse region)에서 해석적이면 균열면에서의 무부하조건이 만족될 수 있다.⁽¹⁷⁾ 두 원공경계에서 단위두께당 작용되는 총 결과력이 영이라고 하면 해석함수를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_1(\zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_{1n} (\zeta - r)^{-n} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} (\zeta - 1/r)^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} (\zeta + r)^{-n} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} (\zeta + 1/r)^{-n} \quad (25)$$

여기에서 A_n, B_{1n} 및 C_{1n} 은 복소상수이며 r 의 식은 다음과 같다.

$$r = d/L + [(d/L)^2 - 1]^{1/2} \quad (26)$$

식(25)는 모든 이차원 이방성 재료의 경우에 대해 적용할 수 있는 응력함수이다.

응력의 대칭성을 고려하면 응력함수를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_1(\zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^c \frac{\zeta}{(\zeta^2 - r^2)^n} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^c \frac{\zeta}{(\zeta^2 - 1/r^2)^n} \end{aligned} \quad (27)$$

여기에서 A_n, B_n^c , 그리고 C_n^c 는 새로운 복소상수이다. 이제는 외부경계조건이 만족되도록 식(27)의 계수들 A_n, B_n^c, C_n^c 를 결정하는 문제로 바뀌었다. 다음과 같은 무한점에서의 경계조건을 대입하여 계수 A_n 은 직접 얻을 수 있다.

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = T, \tau_{xy} = 0 \quad (28)$$

무한점에서 응력성분들이 유한하고 두 원공경계 내부에 작용하는 총 결과력이 영이라는 점을 고려하면 z 가 클 경우에 응력함수를 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽²⁰⁾

$$\phi_1(z_1) \rightarrow Dz_1, \phi_2(z_2) \rightarrow (E + iF)z_2 \quad (29)$$

식(28)과 (29)를 식(8)에 대입하면 다음과 같은 연립방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} (s_1^2 + \bar{s}_1^2)D + (s_2^2 + \bar{s}_2^2)E + i(s_2^2 - \bar{s}_2^2)F &= 0 \\ 2D + 2E &= T \\ (s_1 + \bar{s}_1)D + (s_2 + \bar{s}_2)E + i(s_2 - \bar{s}_2)F &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

위 연립방정식을 풀게 되면 다음과 같은 결과를 얻게 된다.

$$\begin{aligned} D &= \{(a_2^2 + \beta_2^2)T\} / \mathcal{A} \\ E &= \{(a_1^2 - \beta_1^2 - 2a_1a_2)T\} / \mathcal{A} \\ F &= \{[a_2(a_1^2 - \beta_1^2) - a_1(a_2^2 - \beta_2^2)]T\} / \beta_2 \mathcal{A} \end{aligned} \quad (31)$$

$s_1 = a_1 + i\beta_1, s_2 = a_2 + i\beta_2$ 이며, 위에서 사용된 관계식은 다음과 같다.

$$\mathcal{A} = 2\{(a_2 - a_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)\} \quad (32)$$

식(15)와 (29)를 고려하면, 매개평판에서의 응력함수를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) &\rightarrow (LD/2)\xi \\ \phi_2(\xi_2) &\rightarrow \{L(E+iF)/2\}\xi_2 \end{aligned} \quad (33)$$

식(22)를 고려하고 식(27)과 (33)을 비교하면 계수를 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$\begin{aligned} A_0 &= LD/2 \\ A_{-1} &= L(E-iF-DC)/2\bar{B} \\ A_n &= 0 \quad (n \geq 1 \text{ 및 } n \leq -2) \end{aligned} \quad (34)$$

Cross-ply 적층판을 고려하면 복소인자(complex parameter)가 모두 순 허수이므로 식(25)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) &= (LD/2)\xi + (L/2\bar{B})(E-iF-DC)\frac{1}{\xi} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\xi}{(\xi^2-r^2)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\xi}{(\xi^2-1/r^2)^n} \end{aligned} \quad (35)$$

여기에서 계수 B_n 과 C_n 은 결정해야 할 실 상수이다. 결과적으로, 두 원공주위 경계조건이 만족되도록 계수들을 결정하는 문제로 단순화되었다. 수치 해석을 하기 위하여 식(35)의 급수에서 N 항을 잘라 내어 해석하여야 한다.

식(35)를 식(19)에 대입하면 응력의 x 성분에 대한 식은 다음과 같이 표현할 수 있다. 다른 성분들도 유사하게 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2Re \left[\frac{s_1^2}{\omega'(\xi_1)} \left\{ A_0 - \frac{A_{-1}}{\xi_1^2} \right\} + \frac{s_2^2}{\omega'(\xi_2)} \right. \\ &\quad \left. \left\{ A_0 \left(C - \frac{B}{\xi_2^2} \right) + \left(\bar{A}_{-1}B - \frac{A_{-1}C}{\xi_2^2} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^N S_{1n}B_n + \sum_{n=1}^N S_{2n}C_n \right] \end{aligned} \quad (36)$$

여기에서 사용한 계수들의 정의는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_{1n} &= \frac{s_1^2}{\omega'(\xi_1)} \left[\frac{(1-2n)\xi_1^2-r^2}{(\xi_1^2-r^2)^{n+1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{s_2^2}{\omega'(\xi_2)} \left[\frac{B\{(2n-1)\xi_2^{2n-2}-r^2\xi_2^{2n}\}}{(1-r^2\xi_2^2)^{n+1}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{C\{(1-2n)\xi_2^2-r^2\}}{(\xi_2^2-r^2)^{n+1}} \right] \right] \\ S_{2n} &= \frac{s_1^2}{\omega'(\xi_1)} \left[\frac{(1-2n)\xi_1^2-1/r^2}{(\xi_1^2-1/r^2)^{n+1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{s_2^2}{\omega'(\xi_2)} \left[\frac{B\{(2n-1)\xi_2^{2n-2}+\xi_2^{2n}/r^2\}}{(1-\xi_2^2/r^2)^{n+1}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{C\{(1-2n)\xi_2^2-1/r^2\}}{(\xi_2^2-1/r^2)^{n+1}} \right] \right] \end{aligned} \quad (37)$$

식(35)를 식(20)에 대입하면 변위성분 u 에 대한 식은 다음과 같이 표현할 수 있으며 성분 v 에 대

한 표현도 유사하게 할 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= 2Re \left[p_1(A_0\xi_1 + A_{-1}/\xi_1) + p_2\{A_0(B/\xi_2 + C\xi_2) \right. \\ &\quad \left. + \bar{A}_{-1}B\xi_2 + A_{-1}C/\xi_2\} + \sum_{n=1}^N D_{1n}B_n + \sum_{n=1}^N D_{2n}C_n \right] \end{aligned} \quad (38)$$

여기에서 사용한 계수들의 정의는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D_{1n} &= p_1 \left[\frac{\xi_1}{(\xi_1^2-r^2)^n} \right. \\ &\quad \left. + p_2 \left[B \frac{1}{\xi_2(1/\xi_2^2-r^2)^n} + C \frac{\xi_2}{(\xi_2^2-r^2)^n} \right] \right] \\ D_{2n} &= p_1 \left[\frac{\xi_1}{(\xi_1^2-1/r^2)^n} \right. \\ &\quad \left. + p_2 \left[B \frac{1}{\xi_2(1/\xi_2^2-1/r^2)^n} + C \frac{\xi_2}{(\xi_2^2-1/r^2)^n} \right] \right] \end{aligned} \quad (39)$$

식(35)를 식(21)에 대입하면 합력의 y 방향 성분에 대한 식은 다음과 같이 표현할 수 있으며 x 방향 성분도 유사하게 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} f_1 &= 2Re \left[(A_0\xi_1 + A_{-1}/\xi_1) + \{A_0(B/\xi_2 + C\xi_2) \right. \\ &\quad \left. + (\bar{A}_{-1}B\xi_2 + A_{-1}C/\xi_2)\} + \sum_{n=1}^N F_{1n}B_n \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^N F_{2n}C_n \right] + c_1 \end{aligned} \quad (40)$$

여기에서 사용한 계수들의 정의는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_{1n} &= \left[\frac{\xi_1}{(\xi_1^2-r^2)^n} \right. \\ &\quad \left. + \left[B \frac{1}{\xi_2(1/\xi_2^2-r^2)^n} + C \frac{\xi_2}{(\xi_2^2-r^2)^n} \right] \right] \\ F_{2n} &= \left[\frac{\xi_1}{(\xi_1^2-1/r^2)^n} \right. \\ &\quad \left. + \left[B \frac{1}{\xi_2(1/\xi_2^2-1/r^2)^n} + C \frac{\xi_2}{(\xi_2^2-1/r^2)^n} \right] \right] \end{aligned} \quad (41)$$

두 원공 경계조건이 충분히 만족되도록 식(35)의 계수를 잘라서 계산하면, 응력함수를 결정할 수 있게 된다. 본 연구에서는 참고문헌(16)에서 제시한 최소자승 선점과정을 따랐다. 여러 경계조건 중에서 결과력에 대한 경계조건이 잘 맞으면 좋은 결과를 얻을 수 있기 때문에^(16,17) 본 연구에서도 이 방법을 이용하였다.

응력강도 계수는 응력함수로부터 직접 계산할 수 있다. 응력강도 계수와 응력함수의 관계는 다음과 같다.⁽²¹⁾

$$K_I + \frac{K_{II}}{S_2} = 2\sqrt{2\pi} \left[\frac{S_2 - S_1}{S_2} \right] \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \sqrt{z_1 - z_0} \phi_1'(z_1) \quad (42)$$

사상함수를 고려하고 식(15)~(18)을 이용하면 다음과 같은 관계식을 얻게 된다.

$$K_I + \frac{K_{II}}{S_2} = 2\sqrt{\pi/L} \left[\frac{S_2 - S_1}{S_2} \right] \phi_1'(1) \quad (43)$$

식(35)를 식(43)에 대입하면 응력강도 계수를 다음과 같이 응력함수의 계수들로 표현할 수 있다.

$$K_I + \frac{K_{II}}{S_2} = 2\sqrt{\pi/L} \left[\frac{S_2 - S_1}{S_2} \right] \left[A_0 - A_{-1} + \sum_{n=1}^N \frac{(1-2n) - r^2}{(1-r^2)^{n+1}} B_n + \sum_{n=1}^N \frac{(1-2n) - 1/r^2}{(1-1/r^2)^{n+1}} C_n \right] \quad (44)$$

그러므로, 응력함수의 계수가 결정되면 응력강도 계수를 얻을 수 있게 된다.

4. 수치예

본 연구에서의 해석을 근거로 하여 컴퓨터 코드를 만들고, 이 프로그램을 이용해서 직교이방성 무한평판 내부의 두 원공 사이에 존재하는 균열에 대한 응력강도 계수를 계산하였다. 응력강도 계수는 여러가지 Cross-ply 적층판에 대하여 무차원 균열 길이 $a/(d-R)$ 의 함수로 도시하였다. 수치예에서 사용한 적층판은 Cross-ply 적층판이므로 복소인자 (complex parameter)가 순 허수이고 하중이 대칭이므로 선점법을 적용할 때에 두 원공경계의 4분의 1만을 고려하면 되고, 모드 I의 응력강도 계수만이 존재하게 된다. 본 연구에서는 응력강도 계수를 무한평판 내부에 존재하는 길이 $2a$ 의 균열에 대한 응력강도 계수로 무차원화 하였다. 본 연구에서 사용한 복합재료는 GI/E_p 이며, 일방향적층판(섬유방향이 하중방향과 일치할 때를 0° 로 함)에 대한 재료상수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_1 &= 53.74 \text{ GPa} (7.80 \text{ msi}) \\ E_2 &= 17.91 \text{ GPa} (2.60 \text{ msi}) \\ G_{12} &= 8.96 \text{ GPa} (1.30 \text{ msi}), \nu_{12} = 0.25 \end{aligned}$$

Fig. 3은 균열 인장응력을 받고 있는 등방성 평판에 대한 결과를 보여 주고 있는데 참고문헌(7)의 결과와 잘 일치하고 있다. 여기에서 등방성의 결과는 복소인자를 $s_1=1$, o_i 와 $s_2=0.995i$ 로 하여 얻었

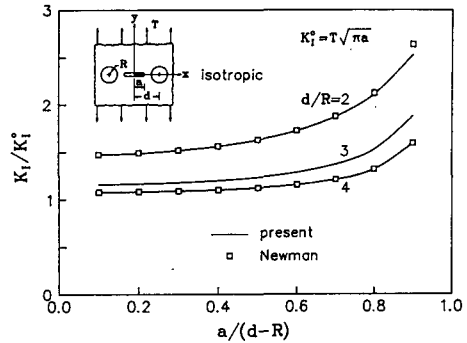


Fig. 3 Correction factors for a crack approaching two circular holes in an isotropic infinite plate under uniform tensile stress

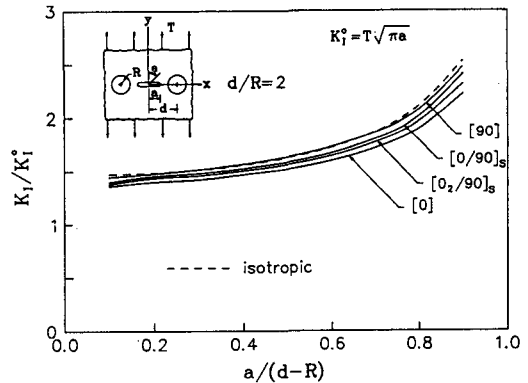


Fig. 4 Correction factors for a crack approaching two circular holes in cross-ply laminate $[0_n/90_m]_s$ under uniform tensile stress ($d/R=2$)

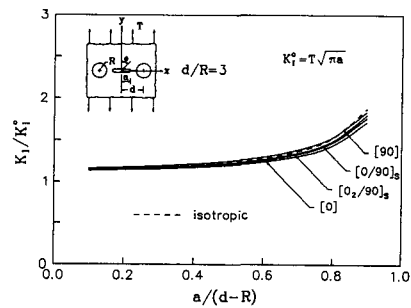


Fig. 5 Correction factors for a crack approaching two circular holes in cross-ply laminate $[0_n/90_m]_s$ under uniform tensile stress ($d/R=3$)

다. Fig. 4, 5, 6은 d/R 이 각각 2, 3, 4일 때 Cross-ply 적층판 $[0_n/90_m]_s$ 내부에 존재하는 두 원공 사이에 존재하는 균열에 대한 결과를 보여주고

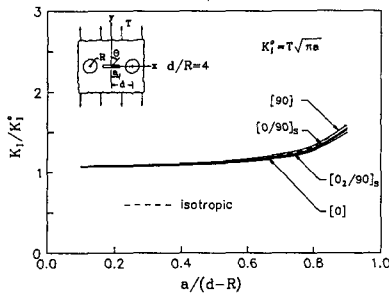


Fig. 6 Correction factors for a crack approaching two circular holes in cross-ply laminate $[0_n/90_m]_s$ under uniform tensile stress ($d/R=4$)

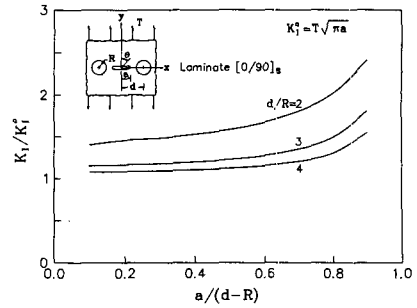


Fig. 9 Correction factors for a crack approaching two circular holes in laminate $[0/90]_s$ under uniform tensile stress

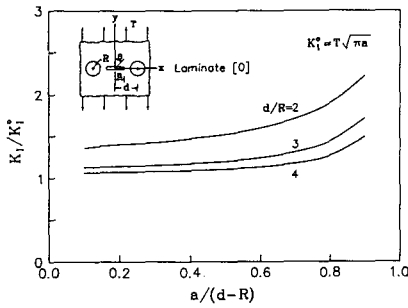


Fig. 7 Correction factors for a crack approaching two circular holes in laminate $[0]$ under uniform tensile stress

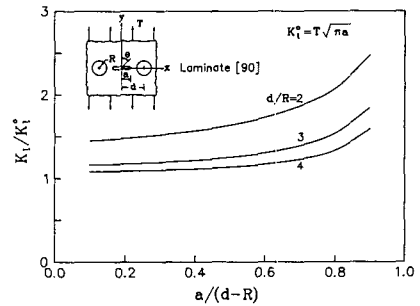


Fig. 10 Correction factors for a crack approaching two circular holes in laminate $[90]$ under uniform tensile stress

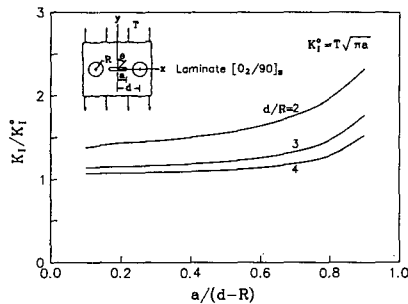


Fig. 8 Correction factors for a crack approaching two circular holes in laminate $[0_2/90]_s$ under uniform tensile stress

력을 받고 있는 $[0]$, $[0_2/90]_s$, $[0/90]_s$, $[90]$ 적층판 내부에 존재하는 두 원공 사이에 존재하는 균열문제에 대한 응력강도 계수를 각각 보여주고 있다. Fig. 7, 8, 9, 10 으로부터 응력강도 계수는 d/R 이 작을수록 크다는 것을 알 수 있다. 또한 d/R 값에 따른 응력강도 계수의 차이 값은 90° 층이 증가할수록 약간씩 커짐을 알 수 있다. 앞에서 언급하였듯이 섬유방향이 하중방향과 일치할 때를 0° 로 설정하였다.

5. 결론

수정사상선점법과 복소함수이론을 적용하여 직교 이방성 무한평판 내부의 두 원공 사이에 존재하는 균열문제를 해석할 수 있었다. 기존의 등방성 문제에 대하여 참고문헌의 결과와 비교 검토하여 봄으로써 본 해석방법이 잘 맞다는 것을 확인하였다.

$[0_n/90_m]_s$ 적층판 내부의 두 원공 사이에 존재하는 균열문제에서 응력강도 계수는 0° 와 90° 의 결과

있다. Fig. 4, 5, 6 으로부터 $[0_n/90_m]_s$ 적층판에 대한 모드 I 응력강도 계수는 0° 와 90° 의 결과 사이에 모두 존재하고 0° 층이 증가할수록 응력강도 계수는 작아짐을 알 수 있다. 또한 각 적층판의 종류에 따른 응력강도 계수 차이 값은 d/R 이 증가할수록 작아짐을 알 수 있다. Fig. 7, 8, 9, 10 은 균일응

사이에 모두 존재함을 알 수 있었고, 응력강도 계수는 0°층의 양이 증가할수록 작아진다는 것을 알 수 있었다. 균일응력을 받고 있는 $[0_n/90_m]_s$ 적층판 내부의 두 원공사이에 존재하는 균열문제에 있어서 응력강도 계수는 d/R 이 작을수록 크다는 것을 알 수 있었으며, d/R 값에 따른 응력강도 계수의 차이값은 90°층이 증가할수록 약간씩 커짐을 알 수 있었다.

본 해석방법은 복합적층판 내부의 응력집중부 주위에 존재하는 여러가지 형태의 균열문제 해석에 효과적으로 적용할 수 있다고 본다.

참고문헌

- (1) Sih, G. C., Paris, P. C. and Irwin, G. R., 1965, "On Cracks in Rectilinearly Anisotropic Bodies," *Int'l J. of Fracture Mechanics*, Vol. 1, No. 3, pp. 189~203.
- (2) Lekhnitskii, S. G., 1968, "Anisotropic Plates," Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., New York.
- (3) Savin, G. N., 1970, "Stress distribution Around Holes," NASA TT F-607, Washington, D. C.
- (4) Bowie, O. L., 1956, "Analysis of an Infinite Plate Containing Radial Cracks Originating at the Boundary of an Internal Circular Holes," *Int'l J. Math. and Physics*, Vol. 35, pp. 60~71.
- (5) Hsu, Y. C., 1975, "The Infinite Sheet with Cracked Cylindrical Hole under Inclined Tension or In-plane Shear," *Int'l J. of Fracture*, Vol. 11, No. 4, pp. 571~581.
- (6) Shivakumar, V. and Forman, R. G., 1980, "Green's Function for a Crack Emanating from a Circular Hole in an Infinite Sheet," *Int'l J. of Fracture*, Vol. 16, pp. 305~316.
- (7) Newman, J. C. Jr., 1971, "An Improved Method of Collocation for the Stress Analysis of Cracked Plates with Various Shaped Boundaries," NASA TND-6376.
- (8) Tweed, J. and Rooke, D. P., 1973, "The Distribution of Stress Near the Tip of a Radial Crack at the Edge of a Circular Hole," *Int'l J. of Engineering Science*, Vol. 11, pp. 1185~1195.
- (9) Tweed, J. and Rooke, D. P., 1976, "The Elastic Problem for an Infinite Solid Containing a Circular Hole with a Pair of Radial Edge Cracks of Different lengths," *Int'l J. of Engineering Science*, Vol. 14, pp. 925~933.
- (10) Konish, H. J. and Whitney, J. M., 1975, "Approximate Stresses in an Orthotropic Plate Containing a Circular Hole," *J. of Composite Materials*, Vol. 9, pp. 157~166.
- (11) Hong, C. S. and Crews, J. H. Jr., 1979, "Stress-Concentration Factors for Finite Orthotropic Laminates with a Circular Hole and Uniaxial Loading," NASA Technical paper 1469.
- (12) Chang, F. K., Scott, R. A. and Springer, G. S., 1984, "Failure of Composite Laminates Containing Pin Loaded Holes-Method of Solution," *J. of Composite Materials*, Vol. 18, pp. 255~278.
- (13) Nuismer, R. J. and Whitney, J. M., 1975, "Uniaxial Failure of Composite Laminates Containing Stress Concentrations," *Fracture Mechanics of Composite*, ASTM STP 593, pp. 117~142.
- (14) Waddoups, M. E., Eisenmann, J. R. and Kaminski, B. E., 1971, "Macroscopic Fracture Mechanics of Advanced Composite Materials," *J. of Composite Materials*, Vol. 5, pp. 446~454.
- (15) Wang, S. S. and Yau, J. F., 1980, "An Analysis of Cracks Emanating from a Circular Hole in Unidirectional Fiber-Reinforced Composite," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 13, pp. 57~67.
- (16) Bowie, O. L. and Neal, D. M., 1970, "A Modified Mapping-Collocation Technique for Accurate Calculation of Stress Intensity Factors," *Int'l J. of Fracture Mechanics*, Vol. 6, pp. 199~206.
- (17) Bowie, O. L. and Freese, C. E., 1972, "Central Crack in Plane Orthotropic Rectangular Sheet," *Int'l J. of Fracture Mechanics*, Vol. 8, No. 1, pp. 49~58.
- (18) Cheong, S. K. and Hong, C. S., 1988, "Analysis of Cracks Emanating from a Circular Hole in an Orthotropic Infinite Plate under Mixed Mode Deformation," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 31, No. 2, pp. 237~248.

- (19) Gandhi, K. R., 1972, "Analysis of an Inclined Crack Centrally Placed in an Orthotropic Rectangular Plate," J. of Strain Analysis, Vol. 7, No. 3, pp. 157~162.
- (20) Sih, G. C., 1973, "Mechanics of Fracture, Vol. 1, Ed. by Sih, G. C.," Noordhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands, pp. 13~20.
- (21) Sih, G. C. and Liebowitz, H., 1968, "Fracture, Vol. II, Ed. by Liebowitz, H.," Academic Press, New York, pp. 67~190.