

〈論 文〉

비병치 유연계의 시간지연 이산제어에서 한스텝선행 미분제어기의 특성

강 민 식*

(1992년 10월 29일 접수)

Characteristics of One Step Advanced Discrete Time D-Control with Time Delay in Noncolocated Flexible System

Min Sig Kang

Key Words : Flexible System(유연계), Colocated Control(병치제어), Noncolocated Control(비병치제어), Time Delay Control(시간지연제어), Discrete Time Control(이산시간제어), Nyquist Sampling Theorem(Nyquist 샘플링이론), Robustness(강인성), Sensitivity(민감도), One Step Advanced Discrete Time D-Control(한스텝선행 이산시간 미분제어)

Abstract

This paper considers a time delay control of noncolocated flexible mechanical systems in discrete time domain. A stability criterion suggested in the previous paper is extended in the consideration of infinite mode property of flexible systems and finite control sampling frequency. Based on the stability criterion, the one step advanced discrete time derivative control is suggested, which can stabilize infinite number of modes of a flexible system. The sensitivity analysis shows the robustness of the one step advanced control to the system parameter uncertainties and time delay errors. Application to a simply supported beam verifies the extended stability criterion and the effectiveness of the one step advanced D-control.

기 호 설 명

$C(z)$: 제어기 전달함수
 d : 제어기 시간지연스텝
 d^* : 오차가 있는 시간지연스텝
 $D_{ci}(z)$: 폐회로 전달함수 분모
 $f_c(x, t), f_e(x, t)$: 제어력, 외란
 K_d/T : 미분제어기의 게인
 S : 제어기 위상설계영역
 T : 샘플링 간격
 $T_d, \pm \Delta T$: 지연시간, 지연시간 오차

$\nu_k(x)$: k -번째 모드 특이함수
 $W(x, \xi, z)$: z -평면(z -domain) 개회로 전달함수
 x_s, x_a : 센서와 액츄에이터 위치
 $y(x, t), \bar{y}(x, z)$: 변위와 변위의 z -변환
 δ : Dirac-Delta 함수
 μ, μ_{cr} : 제어기게인과 계인의 폐회로 안정한계 값
 $\Phi(a)$: 위상함수
 ω_k : k -번째 고유진동수(rad/sec)
 ω_s : 샘플링 주파수(rad/sec)
 Ω : 유연계

*정회원, 국방과학연구소

1. 서 론

유연계 (flexible system) 의 진동제어에서 병치제어 (colocated control) 는 폐회로 안정성을 보장하고 제어성능이 좋기 때문에 많이 적용되고 있다.⁽¹⁾ 그러나 센서와 액츄에이터를 동일한 위치에 설치할 수 없는 경우에 적용되는 비병치제어는 개회로가 비최소위상계가 되어 폐회로 안정성을 보장하는 제어기의 설계가 어렵다. 이러한 문제를 해결하고 무한모드를 갖는 유연계의 폐회로 안정성을 보장할 수 있는 제어방법으로 제어기 입력과 출력간에 시간지연을 주는 시간지연제어 (time delay control) 가 제시되었다.^(2,3,4) 이 제어방법은 이산시간영역으로 확장되었으며 주파수-위상평면에서 제어기 설계방법이 제안되었다.^(5,6) 그러나 참고문헌 (5)에서는 샘플링주파수가 제어하고자 하는 유연계의 최고차모드의 고유진동수보다 최소 2배이상 빠른 경우, 즉, Nyquist 샘플링이론이 만족되는 경우에 대한 해석으로 실제 유연계가 갖는 무한모드 특성이 고려되지 못했다.

본 논문에서는 참고문헌 (5)에서 제시된 제어기 설계방법을 확장하여 샘플링주파수보다 고유진동수가 높은 모드가 존재하는 유연계의 제어시 폐회로 안정성을 만족하는 제어기설계방법을 제시하였으며 진동제어시 널리 사용되는 미분제어기의 특성을 고찰하였다. 또한 이산시간 미분제어기가 갖는 한계성을 극복하고 폐회로 안정성을 보장할 수 있는 한스텝선행 이산시간 미분제어기를 제안하고, 이 제어기의 계의 파라미터 오차, 지연시간 오차에 대한 민감도해석을 통해 강인성을 증명하였다. 제안된 제어기 설계방법 및 민감도해석의 타당성을 입증하기 위해 단순지수 Euler-Bernoulli보를 대상으로 모의시험을 수행했다.

2. 유연계의 비병치 시간지연 이산제어

다음의 편미분방정식으로 표현되는 선형유연계를 고려하면,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t) + G \frac{\partial}{\partial t} y(x, t) + Ky(x, t) = fc(x, t) + fe(x, t), \quad x \in \Omega, t > 0 \quad (1)$$

여기서 $y(x, t)$ 는 유연계 (Ω) 에 존재하는 점 x 에

서의 변위이며 $fc(x, t)$ 와 $fe(x, t)$ 는 각각 제어력과 외란이다. G 는 Coriolis 가속도 관련된 역대칭 (skew-symmetric) 미분연산자이며 K 는 양한정 (positive definite) 대칭 미분연산자이다. 이 연속제어어는 Homogeneous 경계조건을 갖는다면 이 유연계의 k -번째 고유값 (eigen value) λ_k , 고유진동수 ω_k 와 특이함수 (eigen function) $\nu_k(x)$ 는,⁽²⁾

$$\lambda_{\pm k} = \pm i\omega_k, \quad \nu_{\pm k}(x) = \nu_k^e(x) \pm i\nu_k^o(x), \quad i \equiv \sqrt{-1}, \quad k=1, 2, \dots \quad (2)$$

본 논문에서는 ω_k 가 서로 다른 경우를 고려한다.

이 유연계의 이산시간 개회로응답은 다음 식으로 주어진다.

$$\bar{y}(x, z) = \int_{\Omega} W(x, \xi, z) \{ \bar{f}_c(\xi, z) + \bar{f}_e(\xi, z) \} d\xi, \quad \xi \in \Omega \quad (3)$$

여기서 $W(x, \xi, z)$ 은 $\xi (\in \Omega)$ 위치에 가해지는 입력과 $x (\in \Omega)$ 위치에서 측정된 출력간의 관계를 나타내며 D/A 변환기를 0차 홀딩장치로 가정할 경우⁽⁶⁾

$$W(x, \xi, z) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{i k T}}{z - e^{i k T}} \nu_k(x) \nu_k^*(\xi), \quad \xi \in \Omega, x \in \Omega \quad (4)$$

이며 상첨자 $-$ 는 각 변수의 Z -변환이고 T 는 샘플링 간격이며 $*$ 는 공액복소수를 나타낸다.

이 유연계를 $x=x_s$ 에 센서와 $x=x_a$ 에 있는 액츄에이터를 이용해서 케환제어하면, 즉

$$\bar{f}_c(x, z) = \gamma \delta(x - x_a) C(z) \bar{y}(x_s, z) \quad (5)$$

여기서 센서와 액츄에이터의 위치는 각각 가관측성 (observability) 와 가제어성 (controllability) 을 만족한다고 가정하며 γ 는 상수로 1 또는 -1의 값을 갖는다. 이산시간 케환제어기 $C(z)$ 가 시간지연 시스템 d 를 갖도록 설계하면,

$$C(z) = \mu z^{-d} \frac{N(z)}{D(z)} = \mu z^{-d} \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}, \quad n \geq m \quad (6)$$

여기서 μ 는 게인이며 분자항 $N(z)$ 는 유연계의 극점을 상쇄시키지 않는다. 식 (3), (4), (5) 로부터 얻은 폐회로응답은

$$\bar{y}(x, z) = \int_a \frac{N_{ci}(x, \xi, z)}{D_{ci}(z)} \bar{f}e(\xi, z) d\xi \quad (7)$$

식(7)에서

$$N_{ci}(x, \xi, z) = D(z) W_0(x, \xi, z) + \mu N(z) z^{-d} \times [W_0(x, x_a, z) W_0(x_s, \xi, z) - W_0(x, \xi, z) W_0(x_s, x_a, z)] \quad (8a)$$

이며 폐회로 특성방정식은

$$D_{ci}(z) = D(z) - \mu \gamma N(z) W(x_s, x_a, z) z^{-d} = 0 \quad (8b)$$

참고문헌 (5)에 유도된 바와 같이 이 폐회로는 제어기가 다음 식을 만족하면,

$$Re \left[\frac{N(z)}{D(z)} \frac{(z-1)}{(z+1)^2} z^{-d} \gamma \nu_k(x_s) \nu_k^*(x_a) \right]_{z=e^{i\omega_k T}} > 0 \quad (9)$$

for $k=1, 2, \dots$

제어게인이 $\mu \in (0, \mu_{cr} > 0)$ 범위에서 안정하다. μ_{cr} 는 z -평면상에서 폐회로 극점들 중 어느 하나라도 단위원상에 존재할 때의 μ 중 최소값이다.

식(1)의 유연계가 다음의 시간지연 관계를 만족한다고 가정하자. (2,3)

$$\nu_k(x_a) = -\gamma \nu_k(x_s) e^{-i\omega_k T_d} \quad (10)$$

여기서 γ 는 식(5)에서 정의한 바와 같으며 T_d 는 모드번호 k 와 관계없이 일정한 지연시간이다. 아래의 식처럼 d 가 양의 정수가 되도록 샘플링 간격 T 를 정하면,

$$T_d = dT \quad (11)$$

식(10)과 (11)을 식(9)에 대입하여 구한 폐회로 안정조건은

$$Re \left[\frac{N(z)}{D(z)} \frac{(z-1)}{(z+1)^2} \right]_{z=e^{i\omega_k T}} < 0 \quad (12)$$

for $k=1, 2, \dots$

따라서 식(10), (11)을 만족하는 유연계는 식(12)를 만족하는 제어기를 이용하여 식(5), (6)과 같이 비병치 시간지연 제어하면 $\mu \in (0, \mu_{cr})$ 에서 안정하다. 식(10)과 같은 시간지연관계를 만족하는 유연계는 스트링, 보 및 판의 진동에서 찾아볼 수 있다. (2,3,4)

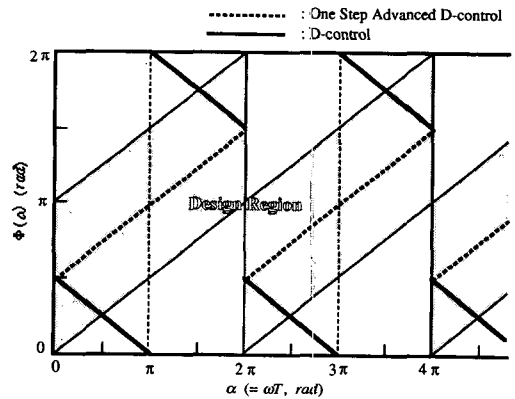
일반적으로 진동의 이산제어시 샘플링주파수 ω_s 는 Nyquist 샘플링이론에 의거 제어하고자 하는 모드의 최고차 모드 고유진동수 ω_n , N 은 고려하는 최고차모드 수, 보다 최소한 2배 빠른 값을 취하며

대개의 경우 6~10배 정도의 값을 선택한다. (7) 참고문헌 (5)에서는 위의 Nyquist 샘플링이론을 만족하는 경우 즉, $\omega_n \leq \omega_s/2$ 일 때의 제어기 설계방법을 제시한 바 있다. 그러나 유연계는 무한개 모드를 갖고 있으며 그 고유진동수가 무한대가 되므로 샘플링이론을 만족하는 샘플링주파수의 실현은 불가능하다. 따라서 한정된 샘플링주파수로 제어하는 유연계에서 Nyquist 샘플링주파수 이상의 모드에 대한 안정성 해석은 필수적이지만 아직 논의된 바 없다. 본 논문에서는 Nyquist 샘플링주파수보다 높은 고유진동수를 갖는 유연계의 제어시 안정성문제를 논의코저한다.

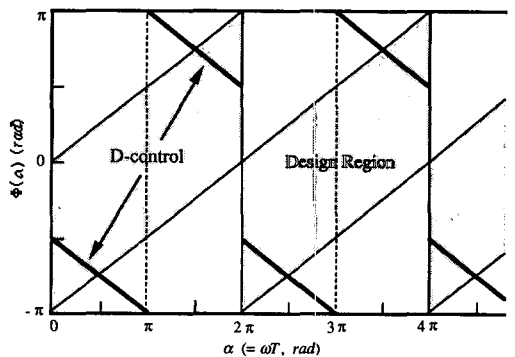
(1) 비병치 시간지연제어에서 안정화조건

식(12)를 주파수-위상평면에서 해석하기 위해 다음과 같이 위상함수를 정의하자.

$$\Phi(\alpha) \triangleq \arg \left[\frac{N(e^{i\alpha})}{D(e^{i\alpha})} \right], \quad \alpha = \omega T \quad (13)$$



(a) Noncollocated control with time delay



(b) Colocated control without time delay

Fig. 1 Phase plot of controller in design region

식(13)을 이용하여 식(12)에서 주어진 안정화 제어기의 위상영역을 구하면 Fig. 1(a)의 빗금친 부분에 해당되며 이를 S 라하면 다음과 같다.

$$S = \{(\alpha, \Phi(\alpha)) \mid 2j\pi < \alpha < 2j\pi + 2\pi, \frac{\alpha}{2} - j\pi < \Phi(\alpha) < \frac{\alpha}{2} - j\pi + \pi, j=0, 1, 2, \dots\} \quad (14)$$

즉, 제어기의 위상 $\Phi(\alpha)$ 가 설계영역 S 에 존재하면 유연계의 폐회로 응답은 제인이 $0 < \mu < \mu_{cr}$ 의 범위에서 안정하다. Fig. 1(a)와 식(14)에서 보듯이 이산시간계의 주파수 특성은 Aliasing 때문에 $\omega_s T$ 를 주기로 한 주기함수로 나타난다.⁽⁷⁾ 이 설계영역 S 는 참고문헌 (5)의 Fig. 1(b)와 비교 무한대 주파수 영역까지 확장되었으며, 따라서 한정된 샘플링주파수로 제어시 Nyquist 샘플링주파수에 비해 높은 고유진동수를 갖는 모드도 안정화시키는 제어기의 설계영역이 존재함을 알 수 있다.

(2) 병치제어에서 안정화조건

위의 비병치 시간지연제어의 경우에 대한 해석은 시간지연이 없는 병치제어의 경우도 유사하다. 즉, 시간지연이 없는 병치제어는 식(5), (6)에서 $x_s = x_a$, $d=0$, $\gamma=1$ 인 경우에 해당하며 이 조건을 식(9)에 대입하여 얻은 폐회로 안정조건은,

$$\operatorname{Re} \left[\frac{N(z)}{D(z)} \frac{(z-1)}{(z+1)^2} \right]_{z=e^{st} \omega^k T} > 0 \quad \text{for } k=1, 2, \dots \quad (15)$$

식(15)는 식(12)와 비교 부호만이 차이가 있으므로 안정화제어기 설계영역은 Fig. 1(b)의 빗금친 부분과 같다. 이 사실은 유연계의 제어에서 식(10)과 같은 시간지연관계가 성립하면 병치제어에 사용 가능한 제어기는 비병치 시간지연제어에도 적용될 수 있음을 보여준다. 이상의 설계영역을 만족하는 제어기의 예를 보면 다음과 같다.

2.1 미분제어기

연속 시간제어에서 미분제어기는 무한개모드를 갖는 유연계의 대표적인 제어기로 폐회로 안정성을 보장하며 강인성을 갖고 있다.⁽⁸⁾ 그러나 이런 특성은 이산시간제어에서는 유지되지 못한다.^(5,9) 다음 식으로 표현되는 미분제어기의 위상 특성은

$$\mu \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{K_d z - 1}{T z} \quad (16)$$

$0 \leq \alpha \leq \pi$ 에서 $K_d > 0$ 일 때 $\Phi(\alpha) = (\pi - \alpha)/2$, $K_d < 0$ 일 때 $\Phi(\alpha) = -(\pi + \alpha)/2$ 가 되며 2π 를 주기로 한 주기함수이다. 따라서 비병치 시간지연제어나 시간지연이 없는 병치제어에서 저주파수 영역에 설계영역이 존재토록 제어기 제인을 선택하면, $K_d > 0$ 일 때 Fig. 1(a)의 실선, $K_d < 0$ 일 때 Fig. 1(b)의 실선과 같다. 따라서 고려하는 모든 모드의 고유진동수가 빗금친 안정영역중 미분제어기의 위상과 겹치는 부분 즉, $0 < \omega_k T < 0.5\pi$, $1.5\pi < \omega_k T < 2\pi$, $2\pi < \omega_k T < 2.5\pi$, \dots 에 존재하면 폐회로를 안정화시킬 수 있다. 그러나 이와같은 조건을 만족시키는 샘플링주파수의 선정은 제약적이어서 실제 적용에는 문제가 많다.

2.2 한스텝선행 미분제어기

$$\mu \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{K_d}{T} (z-1), \quad K_d > 0 \quad (17)$$

이 제어기는 식(16)에 주어진 미분제어기에 z 를 곱한꼴로 모든 주파수 영역에서 위상을 ωT 만큼 선행시키므로 $\Phi(\alpha) = (\pi + \alpha)/2$, $0 \leq \alpha \leq \pi$ 이며 Fig. 1(a)에 보인 바와 같이 2π 를 주기로 하며 특히, 전 주파수 영역에서 설계영역의 중심선을 지나게 된다. 따라서 이 제어기는 어떠한 샘플링주파수에 대해서도 유연계의 폐회로 안정성을 보장한다. 이 제어기는 한스텝선행된 유연계 출력을 이용해야 되므로 시간지연이 없는 제어에서는 Noncausal이 되어 실현 불가능하지만 식(6)에 주어진 시간지연 제어방법을 응용할 경우 d 대신 $d-1$ 을 사용하는 경우와 일치하므로 실현가능하다. 이 제어기는 식(4)에 주어진 것처럼 연속계를 이산계로 변환할때 발생하는 입력과 출력간의 한스텝 시간지연을 보상하는 역할을 하여 식(16)에 주어진 미분제어기에 비해 연속계의 미분제어기 특성에 더 근접한 제어기로 볼 수 있다. 이 제어기는 다음에 논의된 바와 같이 제어계의 파라미터 불확실성이나 오차에 강인한 특성을 갖는다.

3. 한스텝선행 미분제어기의 민감도해석

3.1 지연시간 오차에 대한 강인성

유연계의 파라미터 불확실성은 고유진동수와 특이함수에 대한 오차를 유발하게 되는데 실제문제에서 보면 특이함수의 오차는 고유진동수의 오차에

비해 매우 작다. 비병치 시간지연제어에서 센서와 액츄에이터의 위치는 특이함수에 의해 결정되며 지연시간 T_d 는 고유진동수에 의해 결정되는데 오차를 가진 고유진동수로부터 계산된 지연시간을 T_d^* 라하고 이때 발생된 지연시간 오차를 $\pm \Delta T$ 라하면, 즉,

$$T_d = T_d^* \pm \Delta T \quad (18)$$

폐회로 안정조건은 식(9)와 (10)서

$$\text{Re} \left[\frac{N(z)}{D(z)} \frac{(z-1)}{(z+1)^2} e^{\pm i\omega_k \Delta T} \right]_{z=e^{\pm i\omega_k T}} < 0 \quad (19)$$

for $k=1, 2, \dots$

이 되며 식(13)을 이용한 지연시간오차범위 $[-\Delta T, \Delta T]$, $\Delta T > 0$ 에서 안정화 영역 S^* 는

$$S^* = \{ (\alpha, \phi(\alpha)) \mid 2j\pi < \alpha < 2j\pi + 2\pi, \frac{\alpha}{2} - j\pi + \Delta\alpha < \phi(\alpha) < \frac{\alpha}{2} - j\pi + \pi - \Delta\alpha \} \quad (20)$$

$\Delta\alpha = \omega \Delta T, j=0, 1, 2, \dots$

이때 위상-주파수평면에서 보면 $T_d^* > T_d$ 인 경우 Fig. 1(a)의 설계영역 한계선의 기울기는 $\Delta T/T$ 만큼 감소하며 $T_d^* < T_d$ 인 경우는 한계선의 기울기가 $\Delta T/T$ 만큼 증가하므로 오차범위 $[-\Delta T, \Delta T]$, $\Delta T > 0$ 내에서 폐회로안정화 제어기 설계영역은 Fig. 2에서와 같으며 고유진동수가 높은 모드일수록 오차에 민감하다. 따라서 위상특성이 Fig. 2에서와 같이 설계영역의 중심을 지나는 한스텔선행 미분제어기는 임의의 모드를 안정화시킬 수 있는 허용오차 범위 $[-\Delta T, \Delta T]$ 가 가장 크며, 한스텔선행 미분제어기의 위상특성과 동일한 특성을 갖는

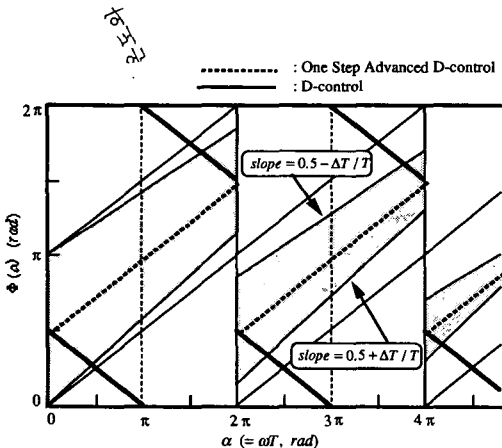


Fig. 2 Design region for a control system with time delay error $\pm \Delta T$

제어기는 존재하지 않으므로 한스텔선행 미분제어기는 파라미터 불확실성 또는 지연시간 오차에 가장 강인한 특성을 갖는다.

3.2 샘플링간격 오차에 대한 강인성

샘플링간격 T 는 식(11)에서 d 가 양의 정수가 되도록 정하여야 하는데 실제 이산제어에서 T 의 최소분해능(resolution)은 사용하는 타이머에 따라 다르므로 다음과 같이 오차를 수반한 식으로 표현된다.

$$T_d = d^* T \pm \Delta T, |\Delta T| < T \quad (21)$$

여기서, d^* 는 양의 정수로 제어식(6)에서 d 대신 사용된다.

식(21)을 (10)에 대입하여 얻은 식을 다시 d 대신 d^* 를 대입한 식(9)에 대입하여 구한 안정화 조건은 식(19)와 동일한 형태를 갖게 되므로 식(20)과 Fig. 2의 빗금친 안정화 설계영역을 갖는다. 따라서 한스텔선행 미분제어기는 3.1에서 논의한 바와 같이 샘플링간격 오차에 대해서도 가장 강인한 특성을 갖는다.

4. 균일단면 단순지지보의 시간지연제어

앞에서 제안된 제어기 설계방법을 입증하기 위해 균일단면 단순지지 Euler-Bernoulli보의 진동제어를 고려하자. 이 보의 길이 L , 굽힘강성 EI , 단위질량 m 이고 횡방향 변위를 $y(x, t)$ 라 하면

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t) + c^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x, t) = f_c(x, t) + f_e(x, t), x \in (0, L) \quad (22)$$

식(22)와 경계조건으로부터 k -번째 고유진동수와 특이함수는⁽¹⁰⁾

$$\omega_k = c^2 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}, \nu_k(x) = A_k \sin \frac{k\pi x}{L}, k=1, 2, \dots \quad (23)$$

제시된 제어기 설계방법은 무한대 모드까지 대상으로 하지만 모의시험의 편의성을 위해 처음 3개 모드만 고려기로 한다. 세 모드의 고유진동수는 식(23)으로부터 $\omega_1, 4\omega_1, 9\omega_1$ 이다.

4.1 시간지연이 없는 병치제어에서 미분제어기의 특성

Fig. 1(b)에 보인 제어기 설계영역의 타당성을

입증하기 위해 $x=0.85L$ 의 위치에 센서와 액츄에이터를 설치한 병치제어에서 미분제어기의 특성을 살펴보자. 센서와 액츄에이터의 위치는 고려하는 세 모드의 가제어성과 가관측성을 만족한다. 외란은 $x=0.45L$ 의 위치에 가해지는 단위 임펄스를 가정하였다.

만일 제어 샘플링주파수를 $\omega_s=12\omega_1$ 로 선정하면 Fig. 1(b)에서 각 모드의 위치는 $\alpha=0.176\pi, 0.67\pi, 1.5\pi$ 가 되어 첫번째 모드는 설계영역내에 존재하지만 두번째와 세번째 모드는 설계영역밖에 존재하여 미분제어기로 안정화시킬 수 없다. 이 경우 폐회로 응답은 Fig. 3(a)에 보인 바와 같이 첫번째 모드는 안정하지만 나머지 두 모드는 불안정하다. 여기서 응답은 $96\omega_1$ 속도로 샘플링하였다. 적용된 미분제어기 계인은 $k_d=-0.4$ 이지만 $k_d=0$ 일 경우도 폐회로는 불안정함을 확인하였다.

만일 제어 샘플링주파수를 $\omega_s=4.7\omega_1$ 로 선정할

경우 각 모드의 위치는 Fig. 1(b)에서 $\alpha=0.426\pi, 1.702\pi, 3.83\pi$ 가 되므로 세 모드 모두 설계영역내에 존재하여 폐회로를 안정화시키는 미분제어기 계인이 존재함을 알 수 있다. Fig. 3(b)은 $k_d=-4$ 일 때의 폐회로 응답으로 안정하다. 응답은 $94\omega_1$ 의 속도로 샘플링하였다. 응답의 감쇠가 작은 이유는 고려하는 모드의 고유진동수에 비해 제어 샘플링주파수가 너무 낮기 때문이다.

4.2 비병치 시간지연제어에서 한스텝선행 미분제어기의 특성

식(23)의 특성을 갖는 보는 다음의 시간지연 관계를 만족한다.

$$\nu_k(x_a) = -\nu_k(x_s) e^{-i\omega_k T_d}, k=1, 2, \dots \tag{24a}$$

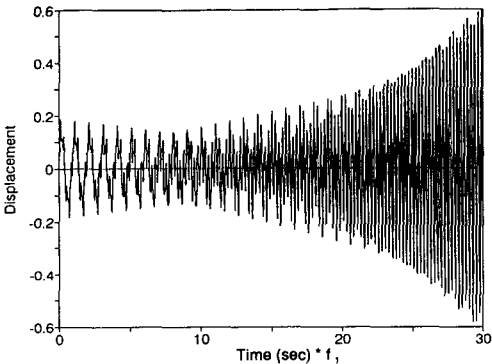
$$x_s + x_a = L, T_d = \frac{L^2}{c^2 \pi} = \frac{\pi}{\omega_1} \tag{24b}$$

따라서 지연시스템은 식(11)과 (24b)에서

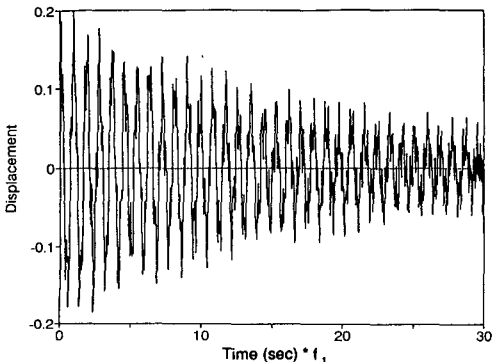
$$d = \frac{\omega_s}{2\omega_1} \tag{25}$$

앞서 논의한 바와같이 한스텝선행 미분제어기에서는 ω_s 의 값에 관계없이 모든 모드를 안정화시킬 수 있다. 이를 입증하기 위해 4.1에서 불안정성을 보였던 경우, 즉 $\omega_s=12\omega_1$ 일 때를 살펴보자. 이 경우 Fig. 1(a)에서 세개의 모드 모두가 설계영역내에 존재하므로 안정화 계인이 존재한다. 이를 시간응답으로 확인하기 위해 모의시험을 수행하였다. 센서와 외란의 위치는 4.1에서와 동일하며 액츄에이터 위치와 지연시스템은 식(24b)와 (25)에서 $r=0.15L, d=6$ 이다. 제어기 계인이 $k_d=4$ 일때 임펄스 외란에 대한 제어응답은 Fig. 4와 같이 안정하다. 초기의 큰 진동은 d 스텝 동안 제어하지 않기 때문이다. 응답은 $96\omega_1$ 속도로 샘플링하였다. 이상 4.1과 4.2에서 얻은 결과로부터 Fig. 1(a)와 Fig. 1(b)에 보인 무한대 주파수영역까지 확장된 제어기 설계영역의 타당성을 증명할 수 있다.

3절에서 논의한 한스텝선행 미분제어기의 민감도 해석의 타당성을 확인하기 위해 다음과 같은 유연계 파라미터의 불확실성이 있는 경우를 고찰해보자. 식(23)에서 파라미터 c 가 오차를 갖고 있다고 가정하고 이 c 값을 이용해 계산한 오차를 포함한 고유진동수 ω_k^* 가 $\omega_k^* = k^2 \omega_1 + k^2 \Delta \omega_1, k=1, 2, \dots$ 이라면 이 고유진동수로부터 결정된 지연시간 T_d^* 는 식(24b)로부터



(a) When the sampling frequency is $\omega_s=12\omega_1$



(b) When the sampling frequency is $\omega_s=4.7\omega_1$

Fig. 3 Closed-loop responses of collocated system with D-control

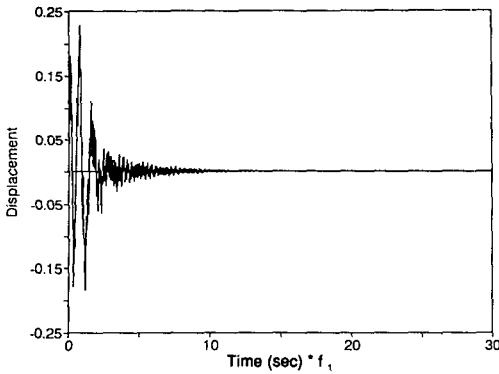


Fig. 4 Closed-loop response with one step advanced D-control of noncolocated system when the sampling frequency is $\omega_s=12\omega_1$

$$T_d^* = \frac{\pi}{\omega_1 + \Delta\omega_1} \quad (26)$$

따라서 시간지연 오차는 식(18)로부터

$$\Delta T = T_d - T_d^* = \pi \frac{\Delta\omega_1}{\omega_1(\omega_1 + \Delta\omega_1)} \quad (27)$$

만일 $\Delta\omega_1 = p\omega_1$ 이라면

$$\Delta T = \frac{p}{1+p} T_d \quad (28)$$

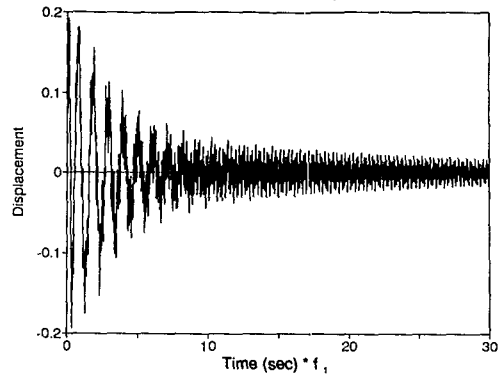
고려하는 최고차 모드를 N 이라 하고 N -번째모드까지 안정화가 가능한 지연시간 오차범위는 Fig. 2에서 구할 수가 있다. 즉, $\alpha = \omega_N T$ 에서 두 한계선과 제어기 위상인 점선이 만나는 때의 ΔT 가 오차범위 한계에 해당하므로,

$$|\Delta T| < \pi/2\omega_N \quad (29)$$

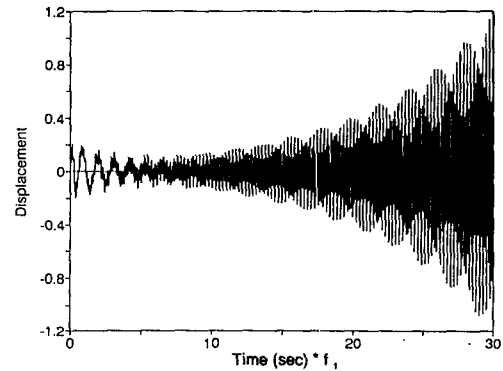
이며 식(28)을 이용해 p 의 범위를 구하면

$$-1/(2N^2+1) < p < 1/(2N^2-1) \quad (30)$$

즉, 3번째 모드까지 안정화시키기 위해선 p 의 범위가 $-1/19 < p < 1/17$ 영역 내에 있어야 한스텝선행 미분제어기로 안정화가 가능하며 이 범위를 벗어난 오차에 대해서는 안정화가 불가능하다. 모의시험을 위해 $N=3$, $p=1/20$ 로 선택하면 식(30)에서 3개의 모드 모두 오차범위내에 존재하므로 폐회로를 안정화시킬 수 있다. Fig. 5(a)는 이 경우에 대한 시간응답으로 안정함을 알 수 있다. 그러나 오차가 없는 경우의 응답인 Fig. 4에 비해 상대적으로 불안정하다. 이때 $K_d=1.4$ 이다. 만일 $p=1/10$ 으로 선택하면 식(30)에서 첫번째와 두번째는



(a) when $p=1/20$



(b) when $p=1/10$

Fig. 5 Closed-loop responses with one step advanced D-control

안정화가 가능하지만 세번째 모드는 안정화가 불가능하다. Fig. 5(b)는 이 경우에 대한 시간응답으로 불안정함을 확인할 수 있다. 응답은 $96\omega_1$ 속도로 샘플링하였다. 이상의 결과를 통해 Fig. 2에 보인 제어기설계영역이 타당함을 확인하였다.

5. 결론

이산시간영역에서 유연계의 비병치 시간지연제어시 제시된 안정화 제어기 설계방법을 실제 유연계가 갖는 무한모드의 특성까지 고려한 설계방법으로 확장, 제시하였으며 이 설계방법을 기본으로 이산시간 미분제어가 갖는 문제점을 분석하고 이 문제점을 충분히 보완할 수 있는 한스텝선행 미분제어기를 제안하였다. 한스텝선행 미분제어기는 미분제어기가 갖는 샘플링주파수에 대한 제약을 제거할 수 있으며 샘플링주파수에 관계없이 유연계의 모든

모드를 제어할 수 있다. 또한 이 제어기는 실제 적용시 발생하는 계의 파라미터 불확실성, 지연시간 오차 등에 가장 강인한 특성을 갖고있다. 제시된 설계방법 및 민감도해석을 위해 단순지지된 Euler-Bernoulli보의 진동문제를 고려했으며 모의시험을 통해 그 타당성이 입증되었다.

참고문헌

- (1) Joshi, S. M., 1986, "Robustness Properties of Colocated Controllers for Flexible Spacecraft," AIAA Journal of Guidance, Vol. 9, No. 1, pp. 85~91.
- (2) Yang, B. and Mote, C. D. Jr., 1990, "On Time Delay in Noncolocated Control of Flexible Mechanical Systems," Proceedings of the 111th ASME Winter Annual Meeting, Dallas, Texas, November 25~30.
- (3) Yang, B. and Mote, C. D., Jr., 1991, "Active Vibration Control of the Axially Moving String in the s-Domain," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 58, pp. 189~196.
- (4) Yang, B., 1991, "Noncolocated Control of a Damped String Using Time Delay," Proceedings of the 1991, American Control Conference, Vol. 3, pp. 2445~2448.
- (5) 강민식, 1992, "비병치유연계의 시간지연 이산 제어," 대한기계학회논문집 제16권 제6호, pp. 1089~1098.
- (6) Kang, M. and Yang, B., "Discrete Time Noncolocated Control of Flexible Systems Using Time Delay: Part I-Theory," 1992 American Control Conference, pp. 2760~2764.
- (7) Ogata, K., 1987, Discrete Time Control Systems, Prentice-Hall.
- (8) Balas, M. J., 1979, "Direct Velocity Feedback Control of Large Space Structures," AIAA Journal of Guidance and Control, Vol. 2, No. 3, pp. 252~253.
- (9) McClamroch, N. H., 1984, "Sampled Data Control of Flexible Structures Using Constant Gain Velocity Feedback," AIAA Journal of Guidance, Vol. 7, No. 6, pp. 747~749.
- (10) Meirovitch, L., 1971, Analytical Methods in Vibration, MacMillan, New York.