

〈論 文〉

## 대변형 탄소성 접촉문제에 관한 연구

전병희\* · 김동원\*\*

(1992년 10월 5일 접수)

### A Study on the Elastic-Plastic Contact Problem for Large Deformation

Byung Hee Jeon and Dong Won Kim

**Key Words :** Large Deformation(대변형), Large Displacement(대변위), Contact Problem(접촉문제), Contact Algorithm(접촉알고리즘), Elastic-Plastic Finite Element Method(탄소성 유한요소법)

#### Abstract

In this research, a numerical algorithm has been developed, which can be applied to the large deformation and large displacement contact problems between two deformable bodies. The contact conditions expressed in terms of the rate of angle change have been proposed considering the change in geometric shape and rate of contact force. A set of linear simultaneous equations is constructed by adding the geometric shape change and contact conditions to the original stiffness matrix. A new method to determine time increment has been proposed based on Euler method, in which the condition to prevent the contact bodies from penetrating and overrunning each other has been taken into consideration. Practical application to contact problem is extrusion in which bodies are sliding along the contact boundary.

#### 1. 서 론

금속성형이나 기능상의 이유로 인하여 운동을 전달하는 부분이나 금형 및 공구 등의 접촉부에서는 큰 응력이 발생되므로 소성변형이 일어날 가능성이 높다. 그러므로 정확한 설계를 하기 위하여 하중에 따른 형상의 변화, 소성변형이 시작될 때의 하중, 소성변형의 진행과정, 접촉부의 크기와 접촉압력의 분포형태, 재료의 기계적 성질 등에 대하여 자세히 알 필요가 있다. 변형과 변위가 큰 경우를 고려한 탄소성 접촉문제의 해석에서는 응력-변형률 관계를 나타내는 재료의 비선형성, 대변위 및 대변형률을

나타내는 기하학적인 비선형성, 마찰의 비선형성, 외력에 따라 접촉영역의 크기가 변하는 접촉문제의 비선형성을 가진 문제에 적용할 수 있는 수치해법을 개발하는 것이 필요하다.

접촉문제에 대한 연구는 역사적으로 오래되었음에도 불구하고, 실제적인 구조해석이나 설계에 대한 응용은 최근까지도 제한적인 수준에 머물러 있다. 탄성 접촉문제는 Hertz<sup>(1,2)</sup>에 의하여 처음으로 연구되었으며, 해석적으로 변위를 구할 수 있는 단순한 형상의 물체에 대하여 접촉압력의 분포를 가정하여 접촉영역과 접촉압력을 구하였다. 그후 여러 엄밀해들을 이용하여 접촉문제를 적분 방정식으로 수식화하여 해를 구하는 연구<sup>(3,4,5)</sup>가 이루어졌으나, 이 방법은 적용 가능한 물체의 형상이 매우 단순하기 때문에 실제적인 문제에 있어서의 응용은

\*정회원, 인덕전문대학 기계설계학과

\*\*정회원, 서울대학교 기계설계학과

극히 힘들었다. 최근에 전자계산기의 발달로 인하여 유한요소법을 이용한 많은 연구가 있다. Lee<sup>(6)</sup>은 미소변형 이론을 사용하여 선형탄성 해석을 탄소성 문제에 확장하여 해석하였다. 또한 Dumas<sup>(7)</sup>은 실린더의 압입문제에 대하여 외력에 따른 변위를 구하고, 각 접촉점에서 불침투 조건이 만족될 때까지 반복 수행하여 해를 구하였으며, Lee<sup>(8)</sup>은 물체의 일부에서 접촉압력이 감소하는 경우에 대하여 해석이 가능하도록 각 증분 시작시의 초기 응력을 고려하여 수식화 하였다.

Bathe<sup>(9)</sup>와 Endo 등<sup>(10)</sup>은 대변형과 대변위를 고려한 탄성 접촉문제를 연구하였다. Bathe는 접촉조건을 무시하였을 때 평형방정식으로 유도되는 범함수에 접촉력에 의하여 결정되는 범함수를 포함시켜, 이를 변분전개하여 유한요소 방정식을 만들고 반복적인 방법으로 해를 구하였다. Endo는 벌칙함수법을 이용하여 기하학적으로 결정되는 접촉조건을 범함수에 포함하여 해를 구하였으며, Cheong<sup>(11)</sup>은 Endo의 방법을 확장시켜, 접촉하는 두 물체 중 하나가 강체이며, 그 표면경계가 함수로 표시되는 대변형과 대변위를 고려한 탄소성문제를 해석하였다. 또한, Makinouchi 등<sup>(12)</sup>은 접촉면에 대한 적합 조건식으로서, 변위속도 및 표면응력 변화율을 도입하여 Bathe<sup>(9)</sup>가 제안한 방법에 적용하였고, 탄성접촉 해석에서 제안된 증분형 변분원리식<sup>(10)</sup>을 updated Lagrangian 수식을 이용하여 두 물체가 탄소성체인 경우에 대하여 해석한 바가 있다.

본 연구의 목적은 마찰이 있고, 대변형과 대변위가 발생하는 접촉문제를 해석할 수 있는 알고리즘을 개발하기 위하여 접촉물체가 변형체인 경우에 있어서 두 물체사이의 접촉조건을 제안하였다. 접촉조건은 기하학적인 형상변화를 회전각 변화율로 표시한 지배방정식과 경계조건, 접촉조건을 가지는 경계치문제로 수식화하였고, 접촉하는 두 물체의 강성행렬에 접촉조건을 포함하여 선형 연립방정식을 구성하였다. 접촉이론으로는 벌칙함수법을 시간적분은 Euler법을 사용한다. 또한 물체의 접촉표면에서 고착과 미끄럼이 일어날 수 있고 접촉 물체는 변형중에 접촉면에서 분리가 가능하며, 이로 인한 제하(unloading)도 고려할 수 있도록 하였다. 이러한 해석법을 위하여 Green 변형률 텐서와 2nd Piola-Kirchhoff 응력텐서를 사용하는 updated Lagrange 수식을 채택하였다. 소성변형은 유동이론에 따라 일어나고, 항복 여부는 von Mises 항복

조건식으로 판정되며, 가공경화는 등방적으로 일어난다고 가정하였다. 또한 접촉면에서는 제안된 변위속도와 접촉압력의 적합조건식을 이용하였으며 Coulomb 마찰법칙을 적용한다.

제안된 접촉조건의 타당성을 검증하기 위하여 이를 이용한 탄소성 유한요소 프로그램을 개발하여 마찰이 있는 압출문제에 적용한 결과 무마찰인 경우의 가공력은 기준과 양호한 일치를 보였으며, 마찰계수가 0.1, 0.2인 경우는 무마찰보다 각각 2~3배 크게 나타났고, 잔류응력은 50~60%정도 크게 나타났다.

## 2. 탄소성 경계치 문제

### 2.1 구성식의 시간적분법

탄소성 구성식의 시간적분법에는 mean normal technique,<sup>(13)</sup> radial return technique,<sup>(14,15)</sup> Euler법<sup>(16)</sup> 등이 있다. 본 논문에서는 알고리즘이 간단하여 가장 널리 사용되고 있는 방법이며, 시간증분을 이용하여 접촉문제에 응용할 수 있는 Euler법을 사용하였고 시간증분  $\Delta t$ 는 식(1)과 같이 표시된다.

$$\Delta t = \frac{-A + [A^2 - C(B - \sigma_v)^2]^{1/2}}{C} \quad (1)$$

여기서,

$$A = \frac{3}{2}(\sigma'_{xx} \sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} \sigma'_{yy} + \sigma'_{xy} \sigma'_{xy} + \sigma'_{zz} \sigma'_{zz}),$$

$$B = \bar{\sigma}\bar{\sigma},$$

$$C = \bar{\sigma} \dot{\bar{\sigma}}$$

이며,  $\sigma_{ij}$ 는 Cauchy응력,  $\dot{\sigma}_{ij}$ 는 그의 속도,  $\sigma'_v$ 는 편차응력,  $\bar{\sigma}$ 는 상당응력,  $\dot{\bar{\sigma}}$ 는 상당응력속도를 나타낸다.

### 2.2 탄소성 경계치 문제

표면력과 물체력의 변화를 받는 경우, 응력속도  $\dot{\pi}_{ij}$ 와 변위속도  $v_i$ 가 만족해야 할 기초식은 다음과 같다. 아래식에서  $S_{ij}$ 는 Kirchhoff응력,  $\hat{S}_{ij}$ 는 그의 Jaumann rate,  $D^p_{ijk}$ 는 응력-변형률 관계를 나타내는 메트릭텐서,  $n_j$ 는 법선방향 벡터를 나타낸다.

(1) 평형방정식

$$\dot{\pi}_{j,i,j} = 0 \quad (2)$$

(2) 변형률속도-변위속도 관계식

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}[v_{i,j} + v_{j,i}] \quad (3)$$

(3) 구성방정식

$$\hat{S}_{ij} = D^p_{ijk1} \dot{\epsilon}_{k1} \quad (4)$$

(4) 경계조건

· 하중이 주어진 영역

$$\dot{P}_i = \dot{t}_i = \dot{\pi}_{ji} n_j \quad \text{on } A_t \quad (5)$$

· 변위가 주어진 영역

$$V_i = v_i \quad \text{on } A_u \quad (6)$$

(6) 접촉경계조건

$$\left. \begin{aligned} U_n - d &\leq 0 \\ s_n &\leq 0 \end{aligned} \right\} \text{on } A_c \quad (7)$$

$$s_n(U_n - d) = 0$$

여기서  $U_n$ 은 접촉표면에 대한 법선변위,  $d$ 는 접촉간극,  $s_n$ 은 법선방향의 접촉압력을 나타내며, 식(7)을 Kuhn-Tucker조건<sup>(17)</sup>이라 부른다. 식(7)은 물체가 서로 침투하지 않는다는 가정으로부터 접촉간극은 항상 영(zero)보다 커야 한다는 조건, 접촉면이 고착되어 있지 않다는 가정으로부터 접촉압력은 반드시 압축력이어야 한다는 조건을 의미한다. 또한, 접촉압력과 접촉간극 중에서 적어도 하나는 영(zero)이어야 한다는 조건을 나타낸다. 이러한 기초식에 의하여 탄소성 경계치 문제가 표시되고, 분기(bifurcation)가 생기지 않는 경우에서 유일한 해를 가진다.

### 3. 탄소성 접촉이론에 의한 강성 행렬의 구성

유한요소법의 적용을 위하여 물체를 유한요소화 하여, 그에 따른 접촉경계에서의 접촉조건을 유한개로 분할된 접촉점에 대하여 고려한다.

#### 3.1 접촉면에 있어서의 적합조건식

(1) 변위속도의 관계

Fig. 1에서 접촉상태는 물체 1의 표면에 있는 절점  $k$ 가 물체 2의 표면에 위치한 2개의 절점  $i, j$ 를 연결하는 선상에 위치한 것으로 생각한다. 시간  $t$ 에서  $i, j$  및  $i, k$ 의 거리를  $d$ 와  $d'$ 으로 두고 그 비를 다음과 같이 정의한다.

$$d' = \beta d \quad (0 \leq \beta \leq 1) \quad (8)$$

그러면 3개의 절점 좌표  $x^i, x^j, x^k$ 의 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\beta(x^j - x^i) = x^k - x^i \quad (9)$$

식(9)를 시간  $t$ 에 대하여 미분하고,  $\dot{x}^i = v^i$  등의

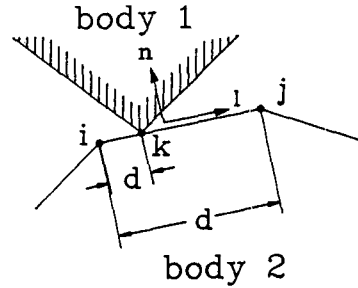


Fig. 1 Definition of variables for contact nodes

관계를 사용하고,  $(x^j - x^i)$ 에 따라  $l$ 축을, 그에 따른 직각 방향으로  $n$ 축을 취하며  $k$ 점의 속도는 다음과 같이 성분으로 나타낼 수 있다.

$$v_n^k = (1 - \beta)v_n^i + \beta v_n^j \quad (10)$$

$$v_l^k = (1 - \beta)v_l^i + \beta v_l^j + \dot{\beta}(x^j - x^i) \quad (11)$$

절점  $k$ 가  $\Delta t$  시간 이후에도 직선  $ij$ 와 접촉을 유지한다면,  $\dot{\beta}$ 는  $\beta$ 의 변화속도이다.

(2) 접촉표면에서의 절점력 변화율의 관계

Fig. 1에 나타낸 세 절점  $i, j, k$ 의 절점력 사이에는 다음의 관계가 성립한다고 가정한다.

$$f^i = -(1 - \beta)f^k \quad (12)$$

$$f^j = -\beta f^k \quad (13)$$

식(12), (13)을 시간에 대하여 미분하면 다음식들로 표시된다.

$$\dot{f}^i = -(1 - \beta)\dot{f}^k + \dot{\beta}f^k \quad (14)$$

$$\dot{f}^j = -\dot{\beta}f^k - \beta\dot{f}^k \quad (15)$$

(3) 마찰법칙

접촉면 상에 있어서 Coulomb 마찰법칙을 만족할 때, 마찰계수를  $\mu$ 라 하고, 속도형으로 표시하면 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} |f^i| &= \mu |f_n^k| \text{ 미끄러짐전,} \\ |f^j| &< \mu |f_n^k| \text{ 고착조건} \end{aligned} \quad (16)$$

#### 3.2 적합조건을 포함한 유한요소의 강성방정식

Fig. 2에 나타낸 것처럼 탄소성 물체 1, 2가 시간  $t$ 에서 공간  ${}^1V, {}^2V$ 를 차지하고, 표면  ${}^1A_c$ 와  ${}^2A_c$ 가 서로 접촉하고 있다고 하자. 경계조건으로는  ${}^1A_u$ 와  ${}^2A_u$ 에서 변위속도가,  ${}^1A_t$ 와  ${}^2A_t$ 에서는 표면 응력 변화율이 주어지며, 물체력은 무시하고 접촉력을 생각하지 않을 경우 물체 1, 2에 대한 강성방정식은 식(17)과 같이 쓸 수 있다.

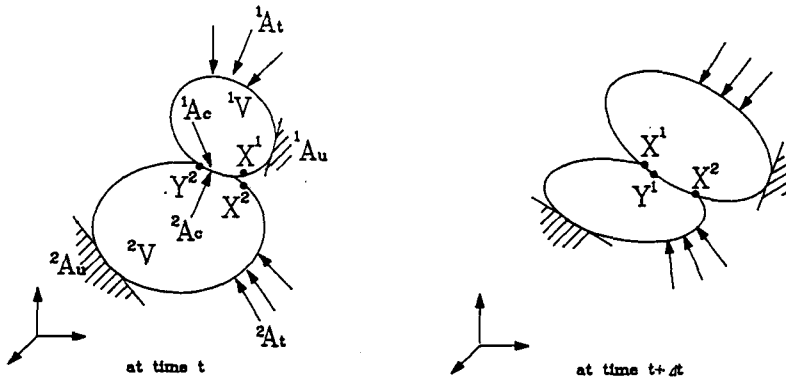


Fig. 2 Schematic model for two body contact problems

$$[{}^N K] \{ {}^N v \} = \{ {}^N f \} \quad N=1,2 \quad (17)$$

여기서 물체  $N$ 의 강성행렬  $[{}^N K]$ 는 문헌(18)에서와 같이 정의되고, 물체 1,2의 강성방정식 식(17)과

접촉면에서의 구속조건식 (11), (12), (14), (15), (16)을 이용하면 적합조건을 포함한 유한요소의 강성방정식은 다음으로 표시된다.(12)

$$\begin{bmatrix} {}^1 K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & & (1-\beta)I & -f^k & \\ 0 & 0 & {}^2 K & \beta I & f^k & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & \\ 0 & -I & (1-\beta)I & \beta I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\mu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^1 v \\ v^k \\ v^i \\ v^j \\ {}^2 v \\ f^k \\ \hat{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^1 f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ {}^2 f \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

여기서  ${}^1 v, {}^2 v, {}^1 f, {}^2 f$ 는 물체 1,2에서 접촉절점  $i, j, k$ 를 제외한 부분의 모든 절점속도 및 절점력 변화율,  $I$ 는  $2 \times 2$ 인 단위행렬,  $\hat{\mu}$ 는  $[1, -\mu]^T$ 인 행렬을 나타낸다.

$$\begin{Bmatrix} \dot{f}_x^k \\ \dot{f}_y^k \\ \dot{\cdot} \end{Bmatrix} = [p^k] \begin{Bmatrix} \dot{f}_i^k \\ \dot{f}_n^k \\ \dot{\cdot} \end{Bmatrix}$$

### 3.3 경계조건 대입법

(1) 임의의 형상을 가진 다이에 대한 강성행렬의 회전

일반적인 소성가공 문제에서는 다리와 접촉하는 소재는 곡선 경로를 이루고, 접촉쌍 사이에는 고착이나 미끄럼이 발생하게 된다. 이 경우 곡선경계에 위치한 가공물의 강성방정식은 식(18)로 표시되고 시간  $t$ 에서 Fig. 3과 같이 소재와 다리가 위치한다고 하자. 식(18)의 강성행렬은 기준좌표계에 대하여 구성되었기 때문에 임의의 형상을 가진 다이에 적용할 수 있도록 국소 좌표계로 변환하여야 한다. 그러므로 물체 2의 강성행렬을 물체 1의 접촉면에 대한 접선 및 법선방향으로 회전하여 표시하면

$$\begin{Bmatrix} \dot{v}_x^k \\ \dot{v}_y^k \\ \dot{\cdot} \end{Bmatrix} = [p^k] \begin{Bmatrix} \dot{v}_i^k \\ \dot{v}_n^k \\ \dot{\cdot} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

이 된다. 여기서,

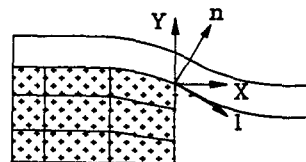


Fig. 3 Rotation of surface node along two bodies



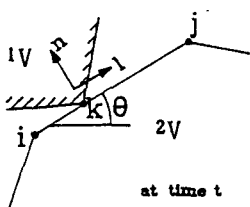
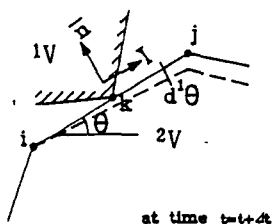


Fig. 5 A simple discretized contact model at Ac



미끄럼방향 경계조건은 다음의 세 가지로 분류한다. 첫번째는 Fig. 5와 같이 물체 1의 절점  $k$ 가 물체 2의 절점  $i, j$ 를 따라 미끄러질 때이며, 이는 물체 2의 절점  $i, j$ 가 변형하여 이룬 기울기 변화량을 포함하며 다음식으로 표시한다.

$${}^{t+\Delta t}\theta = {}^t\theta + {}^t\dot{\theta}\Delta t \quad (28)$$

두번째는 Fig. 5에서 물체 1의 절점  $k$ 가 물체 2의 절점  $j$ 와 일치하였을 경우이며, 이는 Fig. 4와 같고 다음으로 정의된다.

$${}^{t+\Delta t}\theta = {}^t\theta + {}^t\dot{\theta}\Delta t + {}^t\ddot{\theta}\Delta t^2 \quad (29)$$

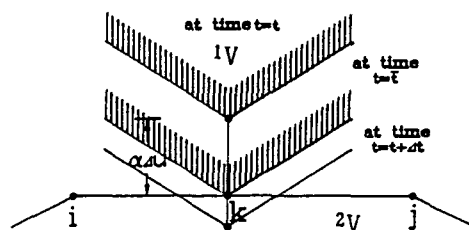
세번째는 물체 1의 절점  $k$ 가 양(+)의 절점력이 될 때, 이 절점은 접촉면에서 분리되므로 시간  $t + \Delta t$ 에서 마찰이 작용하지 않는다. 그러므로 절점  $k$ 는 다음 조건을 만족하게 된다.

$${}^{t+\Delta t}\theta = 0 \quad (30)$$

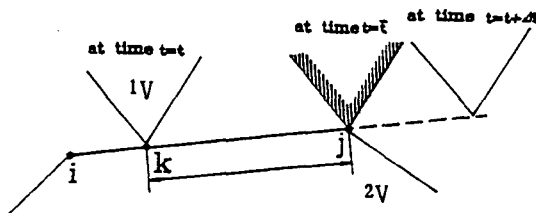
(2) 증분절점변위 제어조건

Fig. 6에 나타낸 것처럼 물체 1의 절점  $k$ 가 시간  $t$ 에서 물체 2의 외부에 위치하고, 시간  $t + \Delta t$ 에서는 물체 2의 내부에 존재하게 될 때, 이를 물체 2의  $i, j$  선상에 위치하도록 시간증분  $\Delta t$ 를 결정한다. 우선 시간  $t + \Delta t$ 에서 절점  $k$ 의 변위증분은 다음 식으로 표시된다.

$${}^{t+\Delta t}u^k = \Delta t {}^{t+\Delta t}v^k \quad (31)$$



(a) Correction of penetration



(b) Correction of overrun

Fig. 6 Geometry of displacement from time  $t$  to  $\bar{t}$

여기서,  ${}^{t+\Delta t}v^k$ 는 시간  $t + \Delta t$ 에서 절점  $k$ 의 변위증분을 나타낸다. 그러나 시간  $t + \Delta t$ 에서 물체 1의 절점은 물체 2의 내부에 위치할 수 없으므로 식 (32)가 성립한다.

$$\begin{aligned} \bar{t}u^k &= \Delta t \bar{t}v^k \\ \bar{t}v^k &= \alpha \Delta t \bar{t}v^k \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \end{aligned} \quad (32)$$

단,  ${}^t u^k$ 는 시간  $t + \Delta t$ 에서 물체 1의 절점  $k$ 가 물체 2의 절점  $i, j$  선상에 위치하도록 하는 제한조건을 만족하는 시간  $\bar{t}$ 에서의 절점  $k$ 의 변위증분이다. 이렇게 하여 얻어진  $\alpha \Delta t$  중에서 최소의 것을 선택하면 절점  $k$ 는  $i, j$  선상에 위치하게 되고 접촉쌍을 이루게 된다. 또한 시간  $t$ 에서  $t + \Delta t$  사이의 변위증분은 Euler법에 의하여 식(1)과 같이 구하였으므로 한 증분 내에서는 선형으로 가정할 수 있고, <sup>(16)</sup> 시간  $\bar{t}$ 에서 물체 1의 절점  $k$ 에 대한 절점력은 영(zero)으로 한다. 또한 절점  $k$ 가 Fig. 6(b)와 같이 물체 2의 경계면을 벗어났을 때에는 절점  $i, j$  선상에서 주어진 경계조건을 사용하여 계산하였으므로, 절점  $k$ 가 초과한 변위증분에 대하여는 정확하지 않다. 그리하여 다음과 같은 방법을 사용하여 시간  $t$ 에서의 절점  $k$ 의 변위증분은 식(30)으로 표시할 수 있다.

$$\bar{t}u^k = \gamma \Delta t \bar{t}v^k \quad 0 \leq \gamma \leq 1 \quad (33)$$

### (3) 시간증분 선정

식(1)에서 응력증분 및 상당 소성변형률 증분으로부터 얻어진 시간증분은 절점변위제어 조건과 마찰방향 변경 조건시의 시간증분보다 대체적으로 크다. 식(1)에서 얻어진 시간증분 상태에서 물체 1이 물체 2의 기하학적 형상에 대하여 과다변위(overrun)가 발생하면 마찰변경조건, 물체 1이 물체 2를 침투하게 되면 절점변위제어 조건을 선택하여 시간증분을 설정한다. 만약 위에서 언급한 두 가지 현상이 동시에 발생하게 되면 절점변위제어 조건과 마찰방향 변경조건 중 작은 시간증분을 사용한다.

### 3.5 계산 순서

마찰을 고려한 대변형 탄소성 접촉문제의 해석과정을 요약하면 다음과 같다.

- (1) 재료상수, 마찰계수, 유한요소모델, 접촉조건 및 경계조건을 입력한다.
- (2) 하중 혹은 변위를 증분시킨다.
- (3) 강성행렬을 구성한다.
- (4) 접촉조건과 기하학적 형상을 고려한 식(27)의 행렬을 구성한다.
- (5) 해를 구한다.
- (6) 시간증분법으로 절점변위 및 응력, 변형률 등을 구한다.
- (7) (6)에서 계산된 결과를 이용하여 접촉조건을 만족하였는지를 판단하고, 만족하면 과정 (10)으로 간다.
- (8) 접촉조건에 적합한 시간증분을 구한다.
- (9) 새로 설정된 시간증분을 이용하여 절점 변위, 응력, 변형률등을 구한다.
- (10) 부분적인 제하상태를 검토하여, 제하가 발생하는 가우스 점이 있으면 탄성상태로 가정한다.
- (11) 계산된 과정에서 변위 혹은 하중이 원하는 값에 도달하면 전 과정을 마치고, 그렇지 않으면 과정 (2)로 돌아간다.

## 4. 접촉문제에의 적용

앞절에서 기술한 방법에 따라 마찰을 고려한 탄소성 접촉문제를 수치적으로 해석할 때 응력-변형률 관계는,

$$\bar{\sigma} = k \bar{\epsilon}^n \quad (34)$$

을 사용하였고,  $k$ 는 상수,  $\bar{\epsilon}$ 는 상당 변형률,  $n$ 은 가공 경화 지수를 나타낸다. 계산에 사용된 재료의 물성치는 문헌<sup>(19,20)</sup>과 동일한 것으로서 탄성계수는 68,900 MPa, 푸아송비 비는 0.3, 항복응력은 193 MPa, 가공경화지수는 1/20이다. 소성변형이 진행되고 있는 점에서도 접촉영역의 변화로 인하여 제하(unloading)가 국부적으로 발생할 수 있으므로 제하 여부의 판정은 문헌<sup>(21)</sup>에 제안된 방법을 사용하였다.

### 4.1 압출문제의 해석

#### (1) 유한요소 모델링

압출은 작업공정이 비교적 간단하고 열간압연이 곤란한 관재 및 형상이 복잡한 단면재의 가공에 사용될 수 있으나 소재를 변형시켜 압출부로 유출시킬 수 있는 큰 압축력이 필요하다. 그러나 압축력이 큼으로 인하여 재료에는 균열 발생이 적고 한 공정으로 단면 감소를 크게 할 수 있다. 반면에 대변형과 온도 상승에 의한 다이의 파손, 재료의 표면 균열, 마찰에 의한 압출하중 증대 등에 의한 문제점이 수반된다. 유한요소법을 이용한 해석은 Lee 등<sup>(19,20)</sup>에 의하여 처음으로 연구되었으며, Yamada 등<sup>(22)</sup>에 의하여 많은 진척이 있었다. 압출문제에 탄소성 유한요소법이 사용됨으로써 다이의 설계한계 및 최적형상을 결정하기 위한 변수들(금형과 가공재 사이의 응력 및 변형률의 분포, 국부적인 변형의 집중, 잔류응력의 분포 등)을 정량적으로 파악하는 데 커다란 도움이 되었다. 즉, 소재 내부 및 표면의 응력 이력을 앎으로써, 표면 및 내부의 균열발생 여부를 예측할 수 있고, 높은 변형률이 국부적으로 집중하는 곳에서 가공결함의 위치를 파악할 수 있다. 이러한 제반 정보들을 통하여 변형률 및 응력의 분포가 일정하게 되도록 다이의 형상을 수정해 감으로써 소재의 결함이 없는 최적 다이 형상을 구해낼 수 있게 된다. 본 모델에서는 소재가 다이를 떠날 때부터 심한 응력 및 변형률의 회복으로 인한 정점(peak)가 발생됨을 고려하기 위하여 다음과 같은 제하 조건을 정의하며, 그 모델을 Fig. 7에 나타낸다.

$$\begin{aligned} \dot{F}_x^l &= -\frac{\Delta u_x^l}{x^l - x^k} F_x^l \\ \dot{F}_y^l &= -\frac{\Delta u_y^l}{x^l - x^k} F_y^l \end{aligned} \quad (35)$$

여기서  $F_x^l$ ,  $F_y^l$ 은 절점  $l$ 에서의  $x$ ,  $y$  방향의 접촉

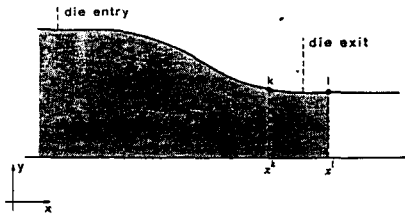


Fig. 7 Schematic diagram at die exit

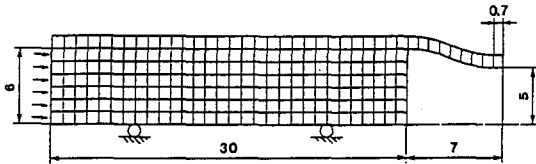


Fig. 8 Initial mesh system and die configuration for extrusion

력이고  $x', x^k$ 는 절점  $x, k$ 에서의 절점위치이며  $\Delta u_{x^k}$ 은 절점  $l$ 에서의  $x$ 방향의 증분절점변위이다.

본 해석에서 사용된 요소형상은 Fig. 8과 같은 단면 감소율 16.7%, 4절점 요소 219개이다. 통상적으로 유리 운환을 한 금속재료의 압출에서는 마찰 계수가 0.05 정도이고, 비금속재료의 압출에서는 0.1~0.2 정도가 된다고 알려져 있으므로, 본 해석에서는 무마찰과 마찰계수가 0.1, 0.2인 경우에 대하여 해석을 하였다.

(2) 결과 및 토론

Fig. 9에서와 같이 마찰계수 0.1, 0.2인 경우는 무마찰인 경우에 비하여 각각 2배, 3.5배 가량의 가공력이 필요함을 보여준다. 마찰계수가 0.2인 경우는 램이 진행함에 따라 점차적으로 가공력이 줄어드는 것을 보여주고 이는 소재와 다이에 접촉하고 있는 절점수가 감소함으로써 마찰효과가 작아지기 때문이다. 또한, 다이의 출구 부분에서의 하중제하는 식(35)를 적용시킨 결과, 압출력이 진동함을 알 수 있었다. 이의 주기는 한 요소가 완전히 출구를 통과할 때까지로서 Lee<sup>(20,21)</sup>의 결과에 나타난 현상과 일치한다. 이러한 현상은 유한요소법을 사용하여 수치해석을 하는 한 불가피한 현상이다. 또한 마찰이 없는 경우의 압출압력은 372 MPa로서 E. H. Lee의 결과 338 MPa보다 4% 증가하였다. 램(ram)이 13.5mm 진행하였을때, 무마찰과 마찰계수가 0.1, 0.2인 경우의 상당응력의 최대값은 각각 320 MPa, 340 MPa로 나타났고, 최대응

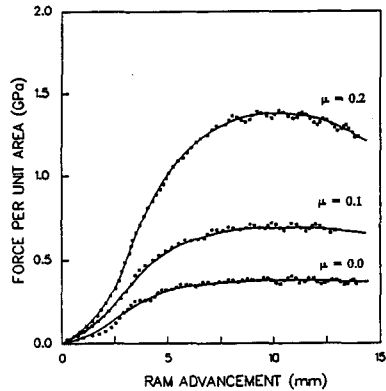
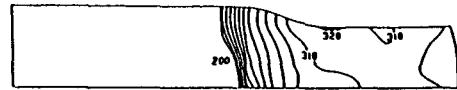
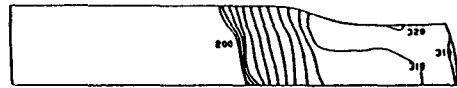


Fig. 9 Comparison of extrusion force between friction and frictionless



(a) frictionless ( $\mu = 0.0$ )



(b) with friction ( $\mu = 0.1$ )



(c) with friction ( $\mu = 0.2$ )

Fig. 10 Contours of effective stress at ram advancement 13.5 mm in extrusion

력의 영역은 마찰이 있는 경우가 소재의 표면에 비스듬히 나타나는 것이 특이하다. 마찰계수가 0.1, 0.2인 경우는 다이 접촉부에 위치한 소재가 마찰의 영향을 받아 심한 소성변형을 하였음을 알 수 있다. 이러한 현상은 소재의 결함이나 높은 잔류응력의 생성원인이 되고, 이로 인한 치수의 불안정을 초래할 우려가 있다. 또한, 마찰이 있는 경우는 없는 경우보다 소성영역이 넓으며, 마찰이 없는 경우의 초기 소성영역이 발생하는 부분은 미끄럼 선장법에 의한 해석 결과와 유사하고, 이들의 일련의 결과는 Fig. 10에 나타내었다. Fig. 11에 나타난 상당 변형률은 마찰이 없는 경우가 다이 출구를 나온 다음에 완전한 변형률의 정점(peak)를 보이지만,



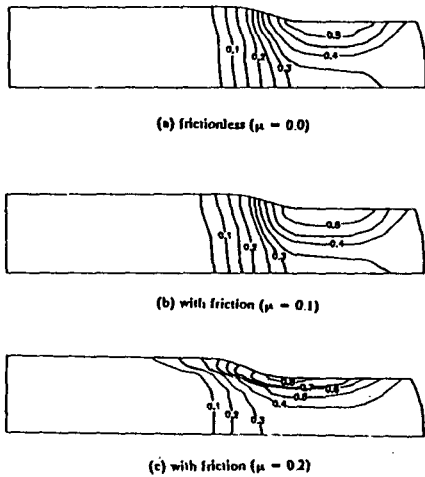


Fig. 11 Contours of effective strain at ram advancement 13.5 mm in extrusion

마찰계수가 0.2인 경우는 상당히 심한 구부변형률 정점을 생성하고, 이로 인한 국소 불안정 및 높은 잔류응력이 생성되어 불량 결함 현상의 원인이 된다. 또한 소재가 다이 출구를 빠져나온 후 재료는 가공경화현상이 현저하게 나타나서 연성은 감소하고, 경도는 증가하였다. 생산된 소재를 재가공 할 경우 초기 재료에 비하여 무마찰과 마찰계수가 0.2인 경우의 항복 응력은 각각 50%와 60%가 증가하는 결과가 나타났다.

이들의 결과로부터 본 논문에서 제안한 접촉알고리즘은 대변형, 대변위이며 마찰이 있는 경우의 탄소성 해석에도 적합한 것이라고 생각된다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 마찰이 있고, 대변형과 대변위가 발생하는 접촉문제를 해석할 수 있는 알고리즘을 개발하기 위하여 접촉물체가 변형체인 경우에 있어서 두 물체사이의 다음과 같은 접촉조건을 제안하였고, 접촉표면에서 제안된 적합조건을 유용하게 사용할 수 있는 수치해법을 개발 하였다.

(1) 접촉조건은 증분량들로 표시된 updated Lagrangian식을 사용하여, 기하학적인 형상 변화를 회전각 변화율로 표시한 지배방정식과 경계조건, 접촉조건을 가지는 경계치 문제로 수식화 하였다.

(2) 접촉물체의 강성행렬에 접촉조건을 포함하여 선형연립 방정식을 구성 하였다.

(3) 접촉표면에서 효과적인 경계조건을 부가하기

위하여 시간증분 후 접촉물체의 침입량과 과다 변위를 이용하여 Euler법에 근거한 새로운 시간증분 및 마찰방향 변경조건을 설정하였다.

개발한 알고리즘의 타당성을 검증하기 위하여 램(ram)이 이동함에 따라 접촉경계면 전체에서 미끄럼이 발생하게 되는 이동 경계치 문제인 압출을 해석하였다. 이 해석결과, 무마찰인 경우의 압출력은 Lee<sup>(20,21)</sup>의 해석결과보다 4% 크게 나타났으며 마찰계수가 0.1, 0.2일 때의 응력 및 변형률의 구배는 압출된 소재의 표면에서 극심한 변화가 나타났다. 특히 마찰이 있는 경우 소재의 표면에서 최고 응력 및 변형률이 분포하고 있어 소재의 국소 불안정 및 불량결함현상을 나타내는 위치를 알 수 있었다.

이 해석결과로부터 다이와 가공재 사이의 응력 및 변형률 분포, 국부적인 변형의 집중, 잔류응력 분포 등을 정량적으로 파악하여 다이의 설계한계 및 최적형상을 결정할 수 있으리라 사료된다.

## 참고문헌

- (1) Johnson, K.L., 1984, Contact Mechanics, Cambridge University Press.
- (2) De Pater, A.D. and Kalker, J.J., 1975, The Mechanics of the Contact Between Deformable Bodies, Delft University Press.
- (3) Muskhelishvili, N.I., 1963, Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, the Netherlands.
- (4) Conry F.T. and Seireg A., 1973, J. Applied Mechanics, Trans. ASME, pp.387~392
- (5) Kalker, J.J., 1979, Int. Num. Meth. Eng., 14, pp. 1293~1307.
- (6) Lee, C.H., Masakishi, S. and Kobayashi S., 1972, Int. J. Mech. Sci., 14, pp.417~426
- (7) Dumas, G. and Baranet, C.N., 1971, Int. J. Mech. Sci., 13, pp.519~530.
- (8) Lee, B.C. and Kwak, B.M., 1984, Computers & Structures, 18, pp.757~767.
- (9) Bathe, K.J. and Chaudhary, A., 1985, Int. J. Num. Meth. Eng., 21, pp.65~88.
- (10) Endo, T., Oden J.T., Becker E.B. and Miller T., 1984, Computers & Structures, 18, pp.899~910.
- (11) Cheng, J.H. and Kikuchi, N., 1985, J. Applied Mechanics, Tran. ASME, 52, pp.639~648.
- (12) 牧野内昭武, 劉勝棟, 1987, 第38回 塑性加工

- 聯合講演會, pp.201~204.
- (13) Cheng, J.H. and Kikuchi, N., 1985, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 49, pp.71~108.
- (14) Lee, J.D., 1986, *DYNA3D User's Manual (Nonlinear Dynamic Analysis of Structures in three Dimensions)*, Methods Development Group Mechanical Engineering Department.
- (16) Yamada, Y., Yoshimura, N. and Sakurai, T., 1967, *Int. J. Mech. Sci.*, 10, pp.343~354.
- (17) Francavilla, A. and Zienkiewicz, O.C., 1975, *Int. Num. Meth. Eng.*, 9, pp.913~924.
- (18) 富田住宏, 1988, *機械の研究*, 40-9, pp.93-98.
- (19) Lee, E.H., Mallet, R.L. and Yang, W.H., 1977, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 10, pp.339~353.
- (20) Lee, E.H., Mallet, R.L. and McMeeking, R.M., 1978, *Symposium Tutzing/Germany August 28 -September*, pp.177~189.
- (21) Flug, 1965, *Foundations of Solid Mechanics*, Prentic-Hall.
- (22) Yamada, Y. and Hirakawa, T., 1978, *Trans. ASME*, 28, pp.27~38.