Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol. 18, No.2, Dec., 1992

호의 색칠문제의 해법⁺

박 성 수*

An Algorithm for the Edge Coloring Problem⁺

Park, Sung soo*

Abstract

Edge coloring problem is to find a minimum cardinality coloring of the edges of a graph so that any pair of edges incident to a common node do not have the same colors. Edge coloring problem is NP-hard, hence it is unlikely that there exists a polynomial time algorithm. We formulate the problem as a covering of the edges by matchings and find valid inequalities for the convex hull of feasible solutions. We show that adding the valid inequalities to the linear programming relaxation is enough to determine the minimum coloring number(chromatic index). We also propose a method to use the valid inequalities as cutting planes and do the branch and bound search implicitly. An example is given to show how the method works.

1. 서　　론

그래프G=(V, E)의 호의 색칠(edge coloring)은 하나의 마디(node)에 인접한 호(arc)들이 서로 다른 색을 갖도록 색을 칠하는 것을 말한다. 그래프G의 호의 색칠에 필요한 최소의 색의 수를 G의 호의 색지수(chromatic index)라고 하며 χ(G)로 나타낸다. 호의 색칠문제는 그래프G의 호를 χ(G)개의 색을 사용하여 칠하는 문제이다. 적법한 색칠에서 같은 색을 갖는 호들은 서로 인접하지 않으며 호의 색칠문제는 서로 인접하지 않는 호들로 이루어진 집합으로 전체 호를 분할하는 집합분할 문제의 일종이다.

그래프G에서 하나의 마디에 연결되어 있는 호의 갯수중에 최대값(maximum degree)을 Δ(G)라고 하면 $\chi(G) \geq \Delta(G)$의 관계가 성립한다. 왜냐하면 하나의 마디에 연결된 호들은 서로 다른 색을 가져야 하므로 전체 색의 수는 Δ(G)보다 작을 수 없기 때문이다. 그래프가 루프나 다수의 평행한 호들을 갖지 않을 때 이를 단순그래프(simple graph)라 하며 여기서는 단순그래프만을 생각하도록 하겠다. Vixing[10]은 다음과 같은 정리를 증명하였다.

⁺ 본 연구는 1991년도 한국과학재단 신진연구비에 의해 수행되었음

* 한국과학기술원 산업공학과

정리 1. (Vizing) G가 단순그래프이면 $\chi(G)=\Delta(G)$ 혹은 $\Delta(G)+1$이다.

그밖에도 어떤 단순그래프라도 $\Delta(G)+1$개의 색으로 칠할 수 있는 효율적인 알고리즘이 알려져 있다. 이에 대해서는 Faber, Ehrenfeucht, Kierstead [3]과 Lovasz와 Plummer[7]을 참조하기 바란다.

어떤 그래프에서 각각의 마디에 인접한 호의 갯수가 같을 경우 이를 정규그래프(regular graph)라 하며 특히 하나의 마디에 인접한 호의 갯수가 k개일 경우를 k-정규그래프라 한다. 비록 위에서 언급한 결과들은 호의 색칠문제가 어렵지 않을 것 같은 인상을 주지만 Holyer[5]는 3-정규그래프에서 3개의 색만으로 호를 칠할 수 있는지를 결정하는 문제가 NP-complete임을 증명하였으며 이러한 결과는 일반적인 단순그래프에 대한 호의 색칠문제가 NP-hard임을 보여준다.

이에따라 좋은 발견적 해법을 찾아내는데에 많은 연구들이 집중되었으며 상대적으로 최적해를 찾아내는 방법에 대해서는 연구가 미흡한 상태이다.

Nemhauser와 Park[8]은 3-정규그래프에 대해서 최적해를 찾을 수 있는 알고리즘을 제안하였다. 이 방법은 선형계획법에 대한 심플렉스 방법에 근거를 두고 제약식과 변수를 필요한 때 생성하여 사용하는 방법이나 3-정규그래프가 아닌 일반적인 호의 색칠문제에 대해서는 적용하기 곤란한 점이 있다.

이 연구에서는 Nemhauser와 Park의 방법을 일반적인 단순그래프에 대한 방법으로 사용할 수 있도록 확장하는 방안을 제시하고자 한다.

2. 부분 호의 색칠

그래프 G=(V, E)에서 짝(Matching)이란 서로 인접하지 않는 호들로 이루어진 집합을 말한다. 그러므로 적법한 호의 색칠에서 같은 색을 가지는 호들은 짝이 되며 호의 색칠문제는 짝으로 모든 호를 포함하는 데 충분한 최소의 짝의 갯수를 찾아내는 문제로 생각할 수 있다. 이를 정수계획법으로 모형화하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\chi(G)=\text{최소화 } 1x$$

$$\text{(IP)} \qquad Ax \geq 1$$

$$x \geq 0 \text{인 정수}$$

여기서 호 i가 j번째 짝에 포함되어 있으면 $a_{ij}=1$, 그렇지 않으면 $a_{ij}=0$이다. 문제(IP)에서 최적해는 $x_j=0$이나 1의 값을 갖게 되면 j번째 짝이 호의 색칠에 포함되면 x_j는 1의 값을 갖고 그렇지 않으면 0의 값을 갖게 된다.

부분호의 색칠문제(fractional edge coloring problem)는 문제 (IP)에서 변수값이 정수여야 된다는 조건을 뺀 것으로 다음과 같이 표현된다.

$$\chi_{LP}(G)=\text{최소화 } 1x$$

$$\text{(IP)} \qquad Ax \geq 1$$

$$x \geq 0$$

정리 2. $\chi_{LP}(G) \geq \Delta(G)$

(증명) 문제(LP)의 쌍대문제를 생각해 보자. 쌍대문제에서 $\Delta(G)$개의 호가 연결되어 있는 마디 하나를 생각해 보면 그 마디에 인접한 호에 해당되는 쌍대변수를 1로 하고 다른 호에 해당되는 쌍대변수를 0으로 놓으면 이는 쌍대문제에 대한 가능해가 된다. 그러므로 선형계획법의 쌍대이론에 의하여 $\chi_{LP}(G) \geq \Delta(G)$의 관계가 성립한다.

만약 $\chi_{LP}(G) > \Delta(G)$이거나 혹은 (LP)의 최적해가 정수해이면 $\chi(G)$를 결정할 수 있다.

정리 3. 만약 $\chi_{LP}(G) > \Delta(G)$이면 $\chi(G)=\Delta(G)+1$이다. 만약 $\chi_{LP}(G)=\Delta(G)$이고 (LP)의 최적해가 정수해이면 $\chi(G)=\Delta(G)$이다.

(증명) (LP)는 (IP)의 선형완화식이므로 $\chi_{LP}(G) \leq \chi(G)$의 관계가 성립한다. 이 관계와 정리 1로부터 정리 3을 얻을 수 있다.

그러나 만약 $\chi_{LP}(G)=\Delta(G)$이고 (LP)의 최적해가 정수해가 아니라면 $\chi_{LP}(G)$를 결정할 수 없다. 여기서 (LP)에 절단평면을 더하여 선형완화식

을 더 정확하게 만드는 방법을 생각할 수 있 다.

3. 호의 색칠 다면체에 대해 적법한 부등식

문제 (IP)의 모든 정수가능해가 구성하는 볼록집합체(convex hull)를 호의 색칠 다면체라 하고 이를 P(G)로 나타내자. 우리는 여기에서 P(G)안의 모든 정수가능해에 의해서는 만족되나 (LP)의 가능해를 다 만족시키지는 않는 부등식을 찾아내고자 한다.

그래프G에서 하나의 마디에 인접한 호들의 최대 갯수가 k라고 하고 G의 부분그래프(subgraph) 중 하나의 마디에 인접한 호들의 최대갯수가 k-1이고 호의 색지수는 k인 부분그래프의 집합을 G_{k-1}이라고 하자.

그래프 $H=(U, F)\in G_{k-1}$이고 M_i는 (LP)에서 변수 x_i에 해당되는 짝을 나타낸다고 하자. 그러면 G의 모든 부분그래프 $H\in G_{k-1}$에 대해서

$$\sum_{\{i: M_i \cap F \neq \phi\}} x_i \geq k \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

는 P(G)에 대하여 적법한 부등식이다.

여기서 (LP)에 (1)식을 더하여 얻은 선형계획법 문제를 (ALR-k)라고 하고 최적해값을 $\chi_{ALP-K}(G)$라고 하자.

정리 4. 그래프G에서 $\Delta(G)=k$라고 할때 G의 호의 색지수가 k+1일 필요충분조건은 $\chi_{ALP-K}(G)>k$이다.

(증명) 그래프 G의 호의 색지수가 k+1이지만 $\chi_{ALP-K}(G)=k$라고 가정하자. $\chi(G)=k+1$이므로 (ALP-k)의 모든 최적해는 비정수해여야 한다. 여기서 (ALP-k)의 최적해에서 양의 값을 갖는 하나의 변수 x_i에 해당되는 짝 M_i를 G에서 제거한다. 남아있는 그래프를 G′이라하면 $\Delta(G')=k-1$이 된다. 만약 그렇지 않다면 G에서 어느 마디 v에 인접한 호의 갯수가 k이지만, 짝 M_i의 호들은 v에 연결되지 않은 마디 v가 존재한다. (ALP-k)의 가능해에서 하나의 마디 v에 인접하는 짝의 값의 합이 최소한 k여야 하므로 마디 v에 인접한 짝의 값의 합과 M_i의 양의 값을 더하면 $\chi_{ALP-k}(G)$가 k보다 크다는 결론이 나오며 이는 가정에 대해 모순이다.

여기서 G′의 호의 색지수는 k−1이나 k가 된다. 만약 G′의 색지수가 k−1이라면 짝 M_i에 하나의 색을 할당해서 k개의 색으로 G를 칠할 수 있으며 이는 가정에 대해 모순이다.

G′의 색지수가 k라면 G′=H일때 (1)식을 현재의 최적해가 만족하지 않으며 이에따라 현재의 최적해는 가능해가 아니므로 최적해가 될 수 없다. 즉 가정에 대해 모순이다.

다른 한편으로 만약 $\chi_{ALP-K}(G)>k$이면 $\chi(G)\geq\chi_{ALP-K}(G)>k$이므로 Vizing의 정리에 의해 $\chi(G)=k+1$이다.

정리 4는 G의 색지수를 결정하기 위해서는 (ALP-k)만을 풀면 된다는 것을 말해주고 있다. Nemhauser와 Park의 연구에서는 G가 3−정규그래프일 경우에 대하여 (ALP-k)를 푸는 방법을 제시하고 동시에 최적의 호의 색칠을 구하는 방법을 제안하고 있으나 일반적인 그래프에 대해서는 이를 푸는 것이 쉽지 않다. 구체적으로 (ALP-k)에서 (1)식을 사용하기 위해서는 어떠한 부분 그래프가 (1)식을 제공할 수 있는지를 알아야 하고 이를 안다고 하더라도 (1)식의 갯수가 너무 많을 수 있기 때문에 이를 다 포함하여 문제를 풀기는 힘들 것이다. 하나의 접근방법은 (1)식을 뺀 상태에서 (ALP-k)를 풀고 이 때 구한 최적해를 만족시키키 않는 (1)식을 찾아서 선형완화식에 더하고 쌍대 심플렉스방법을 사용할 수 있다. (1)식의 갯수는 유한하므로 이러한 방법을 반복적으로 사용하면 전체 과정은 유한하게 끝날 수 있다.

이때 (1)식 중에 (ALP-k)의 최적해를 만족시키지 않는 부등식을 찾아내기 위해 정리 4를 증명하는 데 사용된 방법을 단계적으로 적용할 수 있

다. 즉 (ALP-k)를 풀어서 구한 최적 목적함수 값이 $\Delta(G)$와 같고 해가 정수가 아닐때 양의 값을 갖는 임의의 짝 M_i를 선택하여 이를 G에서 제거하고 남은 그래프를 G′이라고 하자. 이때 $\Delta(G')=\Delta(G)-1$이 되므로 만약 G′의 색지수가 $\Delta(G)$이면 G′은 위반된 (1)식을 제공해 주고, $\Delta(G)-1$이면 G′을 $\Delta(G)-1$개의 색을 사용하여 칠하고 제거된 짝 M_i에 또 하나의 색을 할당하면 G를 $\Delta(G)$개의 색을 사용하여 칠할 수 있다. 그러므로 우리는 여기서 maximum degree가 G보다 하나 적은 그래프에 대한 호의 색칠문제를 풀어야 한다. 이러한 과정을 계속해 나갈때 최악의 경우 maximum degree가 2인 경우까지 그래프가 작아질 수 있으며 이 경우는 그래프가 분리된 사이클(cycle)과 길(path)들로 구성된다. 그래프가 짝수사이클들과 길들만으로 구성되어 있으면 이는 2개의 색으로 색칠할 수 있고 만약 홀수사이클이 존재하는 경우에는 그 홀수사이클을 칠하는 데 3개의 색이 필요하므로 (1)식을 구할 수 있다.

이러한 과정은 (ALP-k)에서 $x_i=1$로 고정시킨 문제를 푸는 것과 같으며 정수계획법 문제를 풀기 위해 분지한계법을 사용할 때 $x_i=1$인 경우로 분지하는 과정과 같다고 할 수 있다.

한편 G′에 의한 (1)식을 (ALP-k)에 더하여 다시 최적화할 때 최적 목적함수 값이 $\Delta(G)$와 같다면 이때 $x_i=0$이어야만 한다. 이는 G를 $\Delta(G)$개의 색을 사용하여 칠하기 위해서는 짝 M_i는 사용될 수 없음을 나타낸다. 즉 이는 $x_i=0$인 분지과정이 묵시적으로 사용됨을 나타낸다.

4. 열의 생성방법

앞 절에서는 (ALP-k)를 풀기위해 (1)식 중에 위반된 부등식을 찾는 방법과 묵시적으로 분지한계법을 사용하는 과정에 대하여 설명하였다. 그러나 (ALP-k)를 심플렉스 방법을 사용하여 풀기 위해서는 기저에 들어올 변수를 결정해야 하는데 (ALP-k)에서는 열의 갯수가 그래프의 크기에 다라 지수적으로 증가하므로 각 열의 계수를 초기에 (ALP-k)에 포함시킬 수 없다. 그러므로 필요할 때 기저에 들어올 수 있는 열을 찾아내어 이를 (ALP-k)에 포함시키는 방법을 사용할 수 있다. 이러한 열의 생성방법은 cutting stock 문제등을 푸는데 효과적으로 적용되었던 방법이다. 이에 대해서는 Chvâtal [1], Gilmore와 Gomory [4]등을 참조하기 바란다.

(ALP-k)에서 (1)식이 존재하지 않을 경우 기저에 들어올 수 있는 열은 최대값 짝짓기문제(maximum weight matching problem)를 풀어서 발견할 수 있다. 즉 (ALP-k)를 일부의 열들만을 갖고 풀었을 때 그래프의 호에 해당되는 최적 쌍대변수 값을 w라는 벡터로 나타낼 때, $\sum_{i\in E} w_i a_{ij} > 1$이면 j번째 열은 기저에 들어올 수 있다. 이는 w를 호의 가중치로 하여 최대값 짝짓기문제를 풀었을 때 최적해 값이 1보다 크면 최적해를 나타내 주는 incidence 벡터가 기저로 들어올 수 있는 열이 됨을 의미한다. 만약 최적해 값이 1 보다 작거나 같으면 이는 현재의 해가 최적해로 더 이상 기저로 들어올 수 있는 열이 존재하지 않음을 나타낸다.

(ALP-k)에서 (1)식이 존재할 때 기저에 들어올 수 있는 열을 찾기 위해서는 짝짓기문제를 약간 변형한 문제를 풀어야 한다. 여기서 (ALP-k)를 일부의 열들만을 갖고 풀었다 하고 이때 구한 최적 쌍대변수 값중에 w는 호에 해당되는 상대변수 값이고 u는 현재 (ALP-k)에 포함되어 있는 (1)식에 해당되는 쌍대변수 값이라고 하자. 이때 기저에 들어올 수 있는 열은 다음과 같은 문제를 풀어서 찾을 수 있다.

$$\text{(PR)} \qquad z(w, u) = \max \sum_{e\in E} w_e y_e + \sum_{F} u_F \pi_F$$

$$\sum_{e\in\delta(v)} y_e \le 1 \text{ 모든 } v\in V \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\sum_{e\in E(S)} y_e \le \frac{1}{2}(|S|-1)$$

모든 홀수 집합 S⊆V ································(3)

$\pi_F - \sum_{e \in F} y_e \le 0$

모든 사용된 부분 그래프 H=(U, F) ············(4)

$\pi_F \in \{0, 1\}$

모든 사용된 부분 그래프 H=(U, F)

$y_e \in \{0, 1\}$ 모든 e∈E

여기서 $\delta(v)$는 마디 v와 만나는 호들의 집합을 나타내고 E(S)는 호의 양쪽 끝마디가 모두 마디의 집합 S에 포함되어 있는 호들의 집합을 나타낸다.

(PR)의 선형완화식을 (LPR)이라고 하자. 이는 (PR)에서 변수가 이진정수여야 된다는 조건 대신에 $0 \le \pi_F \le 1$, $0 \le y_e \le 1$의 조건을 더한 것으로 이를 심플렉스 방법을 사용하여 풀게 된다. 우선 (3)식은 고려하지 않고 심플렉스 방법을 사용하고 이때 구한 최적해에서 위반된 (3)식이 존재하는지를 검사하여 위반된 식을 모형에 더하여 쌍대 심플렉스 방법을 사용하여 다시 최적화 하게 된다. 이러한 방법은 짝짓기문제를 푸는데 효과적으로 사용되었다. 자세한 내용은 Grotschel과 Holland[6], Padberg와 Rao[9]을 참조하기 바란다.

(PR)에서 (4)식과 변수 π가 없는 경우 이는 최대값 짝짓기문제를 나타내는 모형이 되며 이 모형의 선형완화식을 풀면 반드시 정수해를 얻을 수 있다는 것이 알려져 있다(Edmonds[2]). 그러므로 이 모형을 (1)식이 없을 경우 기저로 들어올 열을 찾는데 사용할 수 있다.

$\bar{z}(w, u)$를 (LPR)의 최적값이라 하자. 만약 $\bar{z}(w, u) \le 1$이면 (ALP-k)에서 기저로 들어올 수 있는 열은 존재하지 않고 현재의 해가 최적이 된다.

$\bar{z}(w, u) > 1$이면 분지한계법을 사용하여 해의 값이 1보다 큰 정수해를 찾아 이를 기저로 들어올 수 있는 열로 사용하거나 혹은 $z(w, u) \le 1$임을 보여서 현재의 (ALP-k)의 해가 최적임을 보이게 된다.

5. 예 제

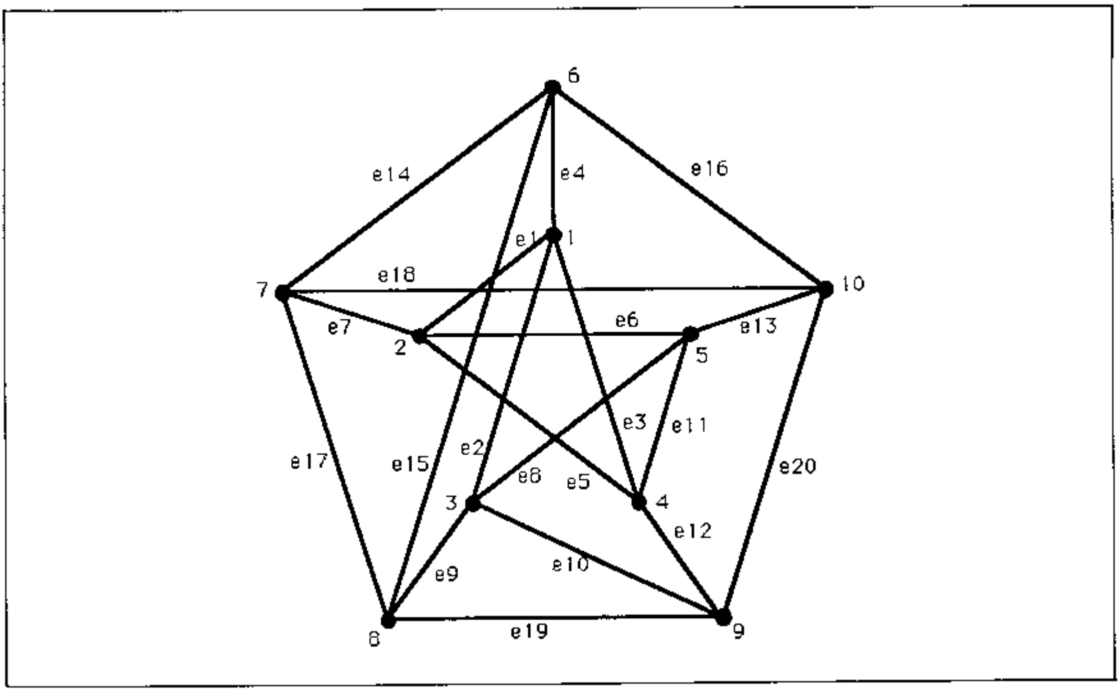
위에서 제시한 방법을 [그림 1]에 주어진 그래프에 적용해 보도록 하자. [그림 1]에 주어진 그래프는 Petersen 그래프에 하나의 완전짝(perfect match-ing)을 더하여 4-정규그래프로 만든 것이다. 더해진 호들은 *e*1, *e*10, *e*11, *e*15, *e*18이다. Peter-sen 그래프는 3-정규그래프이면서 호의 색지수는 4이다. 그러므로 여기에 하나의 완전짝을 더하여 얻은 그래프의 호를 색칠하는데 4개의 색이 필요한지 5개의 색이 필요한지를 알아보는 것은 흥미있는 일이다. 예제와 같은 정규그래프를 4개의 색으로 칠하기 위해서는 완전짝만이 사용되므로 열의 생성과정에서 완전짝만을 생성하도록 했으며 (2)식에서 부등식 대신 등식을 사용하므로써 완전짝만을 생성할 수 있다.

여기서 부분제로 발생하는 선형계획법 및 정수계획법 문제를 푸는데는 Lindo와 XMP/ZOOM을 사용하였다.

먼저 (LP)를 풀어보면 다음과 같은 10개의 짝에 의해 $\chi_{LP}(G)=4$가 된다.

M_1={e1, e8, e12, e16, e17}	$x_1=0.5$
M_2={e3, e7, e10, e13, e15}	$x_2=0.25$
M_3={e4, e5, e8, e18, e19}	$x_3=0.5$
M_4={e3, e6, e9, e14, e20}	$x_4=0.75$
M_5={e2, e7, e11, e16, e19}	$x_5=0.5$
M_6={e1, e10, e11, e15, e18}	$x_6=0.25$
M_7={e2, e6, e12, e15, e18}	$x_7=0.25$
M_8={e1, e9, e12, e13, e14}	$x_8=0.25$
M_9={e4, e5, e10, e13, e17}	$x_9=0.5$
M_{10}={e2, e7, e11, e15, e20}	$x_{10}=0.25$

현재는 $\chi_{LP}(G)=4$이고 해가 정수가 아니므로



[그림 1] 예제의 그래프

$\chi(G)$를 결정할 수 없다. 여기서 해중에 최대값을 갖는 짝 M_4를 없애고 남은 3−정규그래프를 G′이라고 하고 G′에 대해 다시 (LP)를 풀게 된다. 앞에서 사용한 10개의 짝을 사용하면 $\chi_{LP}(G)=3.25$이고 호에 해당하는 쌍대변수들의 값은 $w_{e1}=0.25$, $w_{e2}=0.75$, $w_{e8}=0.75$, $w_{e10}=0.25$, $w_{e11}=0.25$, $w_{e13}=0.75$, $w_{e18}=0.25$, 나머지 쌍대변수들의 값은 0으로 주어진다. $\chi_{LP}(G)>3$이므로 주어진 쌍대변수들 의 값을 G′의 호들에 대한 가중치로 하여 짝짓기 문제를 풀면 M_{11}={e2, e7, e12, e13, e15}의 값이 1.5로 새로 기저로 들어갈 수 있다. 짝 M_{11}을 (LP)에 더하여 다시 최적화하면 최적 목적함수값이 3.0이고 해는 $x_1=x_3=x_5=x_6=x_9=x_{11}=0.5$, 다른 변수의 값은 0이 된다.

$\chi_{LP}(G)=3$이고 비정수해를 가지므로 다시 임의로 M_1을 G′에서 제거하면 2개의 사이클 C_1={e2, e4, e10, e15, e19}, C_2={e5, e7, e11, e13, e18}이 남게 된다. C_1, C_2 모두 홀수 사이클 이므로 색지수는 3이다. C_1에 대한 부등식 $x_2+x_3+x_5+x_6+x_7+x_9+x_{10}+x_{11}\geq 3$을 G′에 대한(LP)에 더하여 다시 최적화 하면 최적값은 3.4, 쌍대변수값은 $w_{e1}=w_{e3}=w_{e8}=w_{e12}=w_{e16}=w_{e17}=0.2$, $u_1=0.8$이 된다. 이 쌍대변수값을 가중치로 하여 (PR)을 풀면 짝 M_{12}={e1, e8, e12, e15, e18}의 값이 1.4로 1보다 크므로 새로이 (LP)의 기저에 들어갈 수 있다.

M_{12}에 해당되는 열을 (ALP-3)에 더하여 다시 최적화하면 최적값은 3이고 해는 $x_5=x_9=x_{12}=1$, 다른 변수값은 0이 된다. 즉 M_5, M_9, M_{12}의 3개의 완전짝으로 현재의 그래프를 색칠할 수 있다. 여기에 앞에서 제거된 M_4를 사용하면 4개의 색깔로 원래의 그래프를 색칠할 수 있음을 알 수 있다.

참 고 문 헌

[1] V. Chvâtal, *Linear Programming*, Freeman, (1983).

[2] J. Edmonds, "Maximum matching and a polyhedron with 0–1 vertices," *J. Res. Nat. Bur. Standard Sect B* 69, pp.125–130 (1965).

[3] V. Faber, A. Ehrenfeucht and H.A. Kierstead, "A New Method of Proving Threorems on Chromatic Index," Los Alamos National Laboratories Preprint, LA–UR, pp.82–661 (1981).

[4] P. C. Gilmore and R.E.Gomory, "A linear programming approach to the cutting–stock problem," *Operations Research* 11, pp.849–859 (1961).

[5] I.Holyer, "The NP–Completeness of Edge Coloring," *SIAM Journal on Computing* 10, pp. 718–720 (1981).

[6] M. Grotschel and O. Holland, "Solving Matching problems with linear programming", *Math. Programming* 33, pp.243–259 (1985).

[7] L. Lovasz and M. D. Plummer, *Matching Theory*, Akademiai Kiado, (1986).

[8] G. L. Nemhauser and S. Park, "A Polyhedral Approach to Edge Coloing," *Operations Research Letters* 10, pp.315–322 (1991).

[9] M. W. Padberg and M. R. Rao, "Odd minimum cut sets and b–matchings," *Math, Oper. Res.* 7, pp.67–80 (1982).

[10] V. G. Vizing, "On an Estimate of the Chromatic Class of a p–Graph, " *Diskretnyi Analiz* 3, pp.25–30 (1964).