

直接探索法을 이용한 理論的 生長函數의 適用

徐玉河*

Theoretical Growth Equations and Their Application with a Direct Search Method

Ok-ha Seo*

SUMMARY

Three theoretical growth equations, i.e., the Mitscherlich, the Gompertz, and the Logistic equation, were applied to the radical stem growth of 50 jack pines (*Pinus banksiana Lamb.*). For the determination of the parameters in these equations, NELDER-MEAD's method was used, which is one of the direct-search methods of optimization. It has been known to be very convenient in dealing with the issues related to optimization, specifically where the number of parameters are less than 6.

It was found that although all the equations did not appropriately work as expected, the Mitscherlich equation revealed the least discrepancy from the observed value among three.

Using these equations and the first certain period data, i. e., 35, 55, 75 years, the prediction of radius of age 95 was investigated. Comparing to the observed value, the most valid equation was the Mitscherlich, and the next were the Gompertz and the Logistic, in order.

1. 緒 言

樹木의 生長過程을 時間의 函數로서 나타내

는 生長函數들은 林學뿐만이 아니고 一般의 生物學에서도 흥미있는 研究對象의 하나로서 많은 학자들에 의해 다채로운 研究가 進行되어

* 江原大學教 林科大學 綠地造景學科 專任講師 : Dept. of Forest Landscape Architecture, Kangwoon Nat'l. Univ.,

여러가지 函數式이 發表되어 왔다. 이러한 函數式중 많은 것은 時間의 變化에 따른 生長過程의 共通의 規則性에 着眼하여 적당한 數式에 의해 나타내고져 하는 것으로, 生長의 原理나 生命現象의 發現機作을 基礎로 하여 演繹的으로 구해 졌다가 보다는 歸納的으로 결정되어진 것이라 할 수 있다.¹⁰⁾ 그러나 生物의 生長現象 속에 共通的으로 나타난 規則性을 數式에 의해 표현해 보려는 이러한 試圖가 계속되는 동안에 生長에 관한 새로운 知識들이 얻어졌고, 이러한 새로운 知識들에 矛盾되는 生長함수들은 버려지고 모순되지 않는 生長함수들이 새롭게 提案되어 왔다. 그 결과로서 函數式 自體가 어느 정도 生長의 原理등을 表現하는 일이 가능하게 되었다. 現在 生長函數의 研究는 生態學과 經營學에서의 計量的 研究가 충실해 짐에 따라 飛躍的으로 발전해 왔다.^{2, 11, 13)}

특히 林學은 生長函數의 研究에 適合한 學問 분야인 동시에 가장 生長함수의 연구가 요구되어 지는 분야이기도 하다. 그것은 임학의 대상인 樹木이 오랜 기간에 걸쳐 한 장소에서 움직이지 않고 生長을 계속하고, 그 生長의 과정이 나이트의 형성이라는 현상을 통해 뚜렷한 흔적으로 남기 때문에 生長함수의 研究資料로 적합한 면을 지니고 있고, 임목생장의 精確한 豫測은 긴 시간 뒤의 목재의 生産量 등을 미리 예측하는데 큰 도움이 되기 때문이다.^{3, 4)}

본 논문에서는 식물의 生長현상의 發現機作에 대한 考察을 기초로 하여 이론적으로 誘導된 여러가지 이론식들 중에서 Mitsdherlich, Gompertz, Logistic의 3가지 대표적인 生長函數를 選定하여 각 函數의 特性과 適合度를 알아보고, 一定期間의 데이터에 의해 얻은 係數를 이용하여, 각 生長함수가 어느 정도의 豫測能力을 지니는가를 조사해 보았다. 종래 이러한 함

수식을 풀기 위해서는 Deming의 最小自乘法이나 Lagrange의 未定係數法 등의 수학적인 解法이 주로 사용되어 왔다.⁵⁾ 그러나 Computer의 급속한 발달에 힘입어 數值解析이 손쉬워진 뒤부터 目的函數가 복잡하여 微分이 不可能하거나 어려울 경우에도 간단히 係數를 추정할 수 있는 소위 植接探索法을 이용하는 것이 편리한 경우가 많아졌다. 여기에서는 각종 最適化問題의 解決에 유효한 직접탐색법중의 하나인 Nelder 와 Mead에 의해 제안된 不等邊單體에 의한 方法의 概念을 간단히 紹介하고, 이 概念을 이용하여 작성한 프로그램을 공개한다.

2. 材料 및 方法

2.1 供試資料

여기서 이용한 資料는 Canada 亞寒帶林의 Jack Pine 50본의 약 98년에 걸친 半經의 生長記錄으로, 日本 나고야大學 森林經理學 研究室에서 발행한 海外調査資料集에서 引用하였다. 年輪測定機에 의해 長軸과 短軸의 4변을 1/100mm까지 측정하여, 平均值를 計算한 이 資料들은 대단히 精密한 것으로 判斷된다.

2.2 植接探索法の 소개

n 次元의 벡터 x 의 函數 $f(x)$ 의 최대값이나 최소값을 구하기 위해 點列 $x_1, x_2, x_3 \dots$ 에서의 $f(x)$ 의 값을 직접 모두 계산하여 이들을 서로 比較하여 그중에서 최대나 최소를 구하는 방법을 直接探索法이라 한다.¹⁷⁾ 이때 선정할 점열로서 최대 혹은 최소가 존재할 수 있는 범위를 전부 망라하여 계산하는 것이 가장 간단한 방법으로 格子點探索이라 불리운다. 그러나 이 방법은 벡터 x 의 n 개의 성분을 각각 a 개씩 선정하면 a^n 개의 組合에 대해 비교하지 않으면 안되기 때문에

계산량이 너무 커져서 실용화되지 못했다. Spendley 등은 1962년 等邊單體를 이용하여 직접탐색법의 효율화를 도모하였다. 單體(Simplex)는 n차원 공간에서 同一平面上에 존재하지 않는 n+1개의 頂點과 그頂點을 나타내는 벡터의 1보다 적은 양의 계수를 지닌 1次組合으로 만들어 지는 圖形을 말하며, 等邊은 각 정점간의 거리가 모두 같다는 의미이다. 예로 들어 계수가 2개인 2차원 평면에서는 정 3각형, 계수가 3개인 3차원공간에서는 정사면체가 등변단체이다. 간단한 2차원의 경우를 예를 들어 함수 $f(x)$ 의 최소치를 구하는 문제를 설명하면 다음과 같다. 먼저 적합한 점의 후보로서 점 x_1 을 적당히 선택하고 x_1 을 하나의 정점으로 하여 같은 거리에 x_2, x_3 을 잡는다. 다음에 線分 $x_1 x_3$ 에 대한 정점 x_1 의 反轉 x_4 를

$$x_4 = x_2 + x_3 - x_1 \quad (1)$$

로 정의한다. 그런데 함수 $f(x)$ 가 초기치 x_1 의 근방에서 일차함수라고 가정한다면

$$f(x_4) = f(x_2 + x_3 - x_1) = f(x_2) + f(x_3) - f(x_1) \quad (2)$$

이 되고, 만약

$$f(x_1) > \max \{f(x_2), f(x_3)\} \quad (3)$$

라고 한다면

$$f(x_4) < f(x_2) \text{ and } f(x_4) < f(x_3) \quad (4)$$

이 된다. 따라서

$$f(x_4) < f(x_1) \quad (5)$$

이 성립할 것이고 함수 $f(x)$ 가 최소가 되는 점은 x_1 보다는 x_4 쪽이 적합함을 알 수 있다. 여기서 함수 $f(x)$ 가 x_1 에 가까운 근방에서 1차 함수라고 가정했지만, 이 가정이 반드시 성립한다는 보장은 없으므로 위의 결론이 항상 정당한 것은 아니다. 그러나 모든 함수는 局所的으로는 언제나 일차함수에 의해 近似되기 때문에 좁은 범위 안에서는 언제나 이러한 방법에 의해 최소

값을 탐색할 수 있을 것이다. 이방법은 초기단체의 3점 중에서 가장 큰 함수값을 갖는 정점을 반전시켜 새로운 정점을 만들고 그 점에서의 함수값을 계산하여 서로 비교하는 과정을 되풀이한다. 이때 단체의 한 정점이 항상 새로 만들어지는 단체의 한 정점으로 남아 있으면 이정점을 새로운 초기치로 하고, 단체의 변의 길이를 절반으로 하여, 같은 조작을 되풀이 한다. 변의 길이를 절반으로 하는 조작을 縮小(Contraction)이라 한다. 축소를 몇번 되풀이하여 단체의 각 정점에서의 함수값이 충분히 접근하면 계산을 종료시킨다. 이런 방법으로 적어도 局所的인 최소값의 近似值가 얻어진다는 것은 확실하다. 이방법을 n차원의 경우로 확장하기 위해서는 n차원 단체의 정점을 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$ 로 할 경우, x_p 의 반전 q 를

$$x_q = (2/n)(x_1 + \dots + x_{p-1} + x_{p+1} + \dots + x_{n+1}) - x_p \quad (6)$$

에 의해, 또 x_k 를 중심으로 한 x_p 를

$$x_q = (1/2)(x_p + x_k) \quad (7)$$

에 의해 계산하면 된다.

1965년에 Nelder 와 Mead는 이러한 Spendley 등의 방법을 개량하여 不等邊單體를 이용한 방법을 제안하였다.⁸⁾ 즉 초기치 x 로부터

$$x_{j+1} = x_j + h_j e_j \quad (8)$$

로 정의된 정점을 지닌 부등변 단체를 이용하여 최적값을 찾으려는 방법이다. 여기서 e_j 는 각변수를 나타내는 단위좌표 벡터이고, h_j 는 정수치를 갖는 스카라이다. 이 방법의 개요 설명은 지면이 많이 소요됨으로 생략하고, 그림 1과 2에 이방법의 模式圖와 함수의 계수를 추정하기 위해 필자가 작성한 BASIC 프로그램을 제시한다. 변수가 3개인 경우에는 이 프로그램중

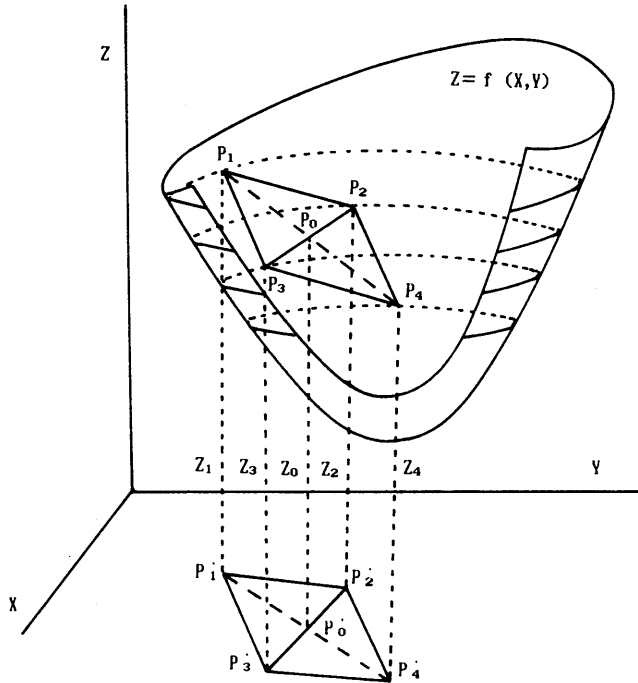


Figure 1. The Model of the NELDER-MEAD method using unregular simplex

```

10 'REM-----Sample.bas(NELDER & MEAD의 직접
    탐색법)
20 'REM-----작성자:서옥하 작성연월일
    :1991년 11월 5일
30 DIM X(10,5) Y(100),XX(100),Z(100)
40 'REM-----데이터의 입력 및 출력 준비
50 LPRINT "compertz"
60 INPUT "NO. OF DATA":B
70 OPEN "i", #1, "canax.dat"
80 OPEN "o", #2, "c3x.dat"
90 FOR BX=1 TO 50
100 FOR I=0 TO B
110 INPUT #1, Y(I)
120 NEXT I
130 'REM
140 'REM-----초기단체의 정점들 선정
150 X(1,1)=Y(96)*1.1:X(1,2)=2*X(1,3)=.2
160 X(2,1)=X(1,1)+.02:X(2,2)=X(1,2):X(2,3)
    =X(1,3)
170 X(3,1)=X(1,1):X(3,2)=X(1,2)+.2:X(3,3)
    =X(1,3)
180 X(4,1)=X(1,1):X(4,2)=X(1,2):X(4,3)=X(1,3)
    +.01
190 'REM-----잔차평방향합의 계산
200 FOR I=1 TO 4
210 GOSUB 830
220 NEXT I
230 'REM-----변수를 크기순서로 정리
240 FOR I=1 TO 3
250 FOR J=I+1 TO 4
450 XC2=XC2+X(I,2)
460 XC3=XC3+X(I,3)
470 NEXT I
480 XC1=XC1/3
490 XC2=XC2/3
500 XC3=XC3/3
510 'REM-----X1의 반전
520 X(5,1)=2*XC1-X(1,1)
530 X(5,2)=2*XC2-X(1,2)
540 X(5,3)=2*XC3-X(1,3)
550 I=5:GOSUB 830
560 IF Z(5)>Z(2) THEN GOTO 680
570 IF Z(5)<Z(4) THEN GOTO 590
580 X(1,1)=X(5,1):X(1,2)=X(5,2):X(1,3)
    =X(5,3):GOTO 190
590 'REM-----두배연장
600 X(6,1)=2*X(5,1)-XC1
610 X(6,2)=2*X(5,2)-XC2
620 X(6,3)=2*X(5,3)-XC3:I=6:GOSUB 830
630 IF Z(6)>Z(4) THEN GOTO 660
640 X(1,1)=X(6,1):X(1,2)=X(6,2):X(1,3)=X(6,3)
650 GOTO 190
660 X(1,1)=X(5,1):X(1,2)=X(5,2):X(1,3)=X(5,3)
670 GOTO 190
680 IF Z(5)=Z(1) THEN GOTO 710
690 'REM-----절반연장
700 X(6,1)=(X(5,1)+XC1)/2:X(6,2)=(X(5,2)+XC2)
    /2:X(6,3)=(X(5,3)+XC3)/2:GOTO 730
710 'REM-----단체의 축소
720 X(6,1)=(X(1,1)+XC1)/2:X(6,2)=(X(1,2)+XC2)
    /2:X(6,3)=(X(1,3)+XC3)/2
730 I=6:GOSUB 830
    
```

```

260 IF Z(J)<Z(I) THEN GOTO 280
270 SWAP X(J, 1), X(I, 1):SWAP X(J, 2), X(I, 2):
    SWAP X(J, 3), X(I, 3):SWAP Z(J), Z(I)
280 NEXT J
290 NEXT I
300 'REM-----변수를 화면에 표시
310 FOR I= 1 TO 4
320 PRINT I:
330 PRINT X(I, 1):X(I, 2):X(I, 3):Z(I)
340 NEXT I
350 'REM-----수속여부를 판정
360 S1=(Z(1)²+Z(2)²+Z(3)²+Z(4)²)/ 4
370 S2=(Z(1)+Z(2)+Z(3)+Z(4))/ 4
380 S3=S1-S2²
390 S=SQR(ABS(S3))
400 IF S<.0001 THEN LPRINT USING"#####
    #####
    #####
    #####": NO, B, X(4, 1), X(4, 2)
    X(4, 3), Z(4):PRINT #2,
410 'REM-----중점의 선정
420 XC1=0:XC2=0:XC3=0
430 FOR I=2 TO 4
440 XC1=XC1+X(I, 1)
740 IF Z(6)>=Z(1) THEN GOTO 770
750 IF Z(6)>=Z(5) THEN GOTO 770
760 X(1, 1)=X(6, 1):X(1, 2)=X(6, 2):X(1, 3)=X(6, 3)
    :GOTO 190
770 X(1, 1)=(X(1, 1)+X(4, 1))/ 2:X(1, 2)=(X(1, 2)
    +X(4, 2))/ 2:X(1, 3)=(X(1, 3)+X(4, 3))/ 2
780 X(2, 1)=(X(2, 1)+X(4, 1))/ 2:X(2, 2)=(X(2, 2)
    +X(4, 2))/ 2:X(2, 3)=(X(2, 3)+X(4, 3))/ 2
790 X(3, 1)=(X(3, 1)+X(4, 1))/ 2:X(3, 2)=(X(3, 2)
    +X(4, 2))/ 2:X(3, 3)=(X(3, 3)+X(4, 3))/ 2
800 GOTO 190
810 NEXT BX
820 CLOSE #1, #2:END
830 'REM-----잔차평방향 Z의 계산
840 Z(I)=0
850 FOR N=0 TO B
860 XX(N)=X(I, 1)*EXP(-X(I, 2)*EXP(-X(I, 3)*N))
870 Z(I)=Z(I)+(XX(N)-Y(N))²
880 NEXT N
890 RETURN
    
```

Figure 2. The BASIC program of the NELDER-MEAD method

860행의 계산식만 수정하면 어떤 식에도 적용이 가능하다. Nelder와 Mead의 방법은 현재 실용화되어 있는 최적화 문제의 해결방법중에서도 가장 효율적인 방법의 하나이며, 변수가 5내지 6개의 경우에는 특히 우수한 것으로 인정되고 있다.¹⁷⁾

여기서 문제가 되는 것은 초기치의 결정에 대한 문제이다. 앞에서 말한 바와 같이 초기값에 가까운 위치에 있는 局所的인 최적값은 항상 쉽게 구할 수 있으나, 그것이 반드시 大域的인 최적치와 일치된다는 보장을 얻을 수는 없다는 것이다.¹²⁾ 따라서 초기치를 여하히 적합한 위치에 잡는가 하는 것이 이 방법의 정확도를 결정하는 중요한 변수가 될 것이다. 이것은 초기치를 엄격히 구할 필요가 없는 LAGRANGE의 未定係數法을 適用한 2분법 등에 비해 이 방법이 지닌 큰 단점이라고 할 수 있으나, 사용이 손쉽고

복잡한 계산이 필요없는 장점을 지니고 있다.

2.3 調査된 代表的인 理論式

2.3.1 Mitscherlich 函數

ALfred E. Mitscherlich의 生長要因의 作用法則은 經濟學이나 農學方面에서 잘 알려져 있던 收確量遞減의 法則을 正式화한 것이다.^{10, 14)} 이는 수확량이 일정한 한계값에 접근함에 따라 수확량의 증가량은 0에 가까워 진다고 하는 것으로

$X =$ 하나의 생장인자의 양

$M =$ 최대수량(생장한계값)

$k =$ 정수

로 할 경우, 생장인자가 단위량만큼 증가할 경우의 수량의 증가량은 최대(최종)수량과 현재량 y 와의 차에 비례한다는 것을 나타내기 위한 수식

$$\frac{dy}{dx} = k(M-y) \quad (9)$$

를 적분하여

$$\ln(M-y) = -kx + C \quad (10)$$

을 얻을 수 있다. 여기서 $x=0$ 일 경우 $y=0$ 이므로 $C=\ln(M)$, 따라서

$$\frac{M-y}{M} = e^{-kx} \quad (11)$$

가 된다. 여기서 x 를 시간인자 t 로 하면

$$y = M(1 - e^{-kt}) \quad (12)$$

의 단순 Mitscherlich식이 성립한다. 또 니

시자와에 의해 제안된 修正指數曲線式⁹⁾

$$y_t = K - ab^t \quad (13)$$

도 단순 Mitscherlich식의 확장형으로 볼수 있다. 즉 $b=e^{-c}$, $(a/K)=L$ 로 놓고, $Y_t=y$, $K=M$ 로 표시하면

$$y = M(1 - Le^{-ct}) \quad (14)$$

가 된다.¹⁰⁾ 여기서 $L=(M-y)/M$ 으로서 시간차이를 극복하기 위한 변수로서 이용된다. 단순 Mitscherlich곡선은 變曲點을 갖지 않고, 連年生長量曲線은 極大點을 갖지 않는다. (그림-3)

2.3.2 Gompertz 함수

최초 人間의 사망율의 법칙을 나타내려고 했던 것으로 알려진 이 함수는 保險關係의 生命表作成이나 工業의 生長을 기술하는데 이용되어 졌다.¹¹⁾ Winsor(1932)는 相對生長速度(*relative growth rate*)가 시간과 더불어 指數曲線的으로 감소하여 짧은 시간내에 생물이 같은 비율로 그 生長력을 잃어 가는 경우의 생물의 生長에 대해 이 함수를 응용할 수 있다고 주장했다.

Gompertz 함수는 다음과 같은 식으로 나타

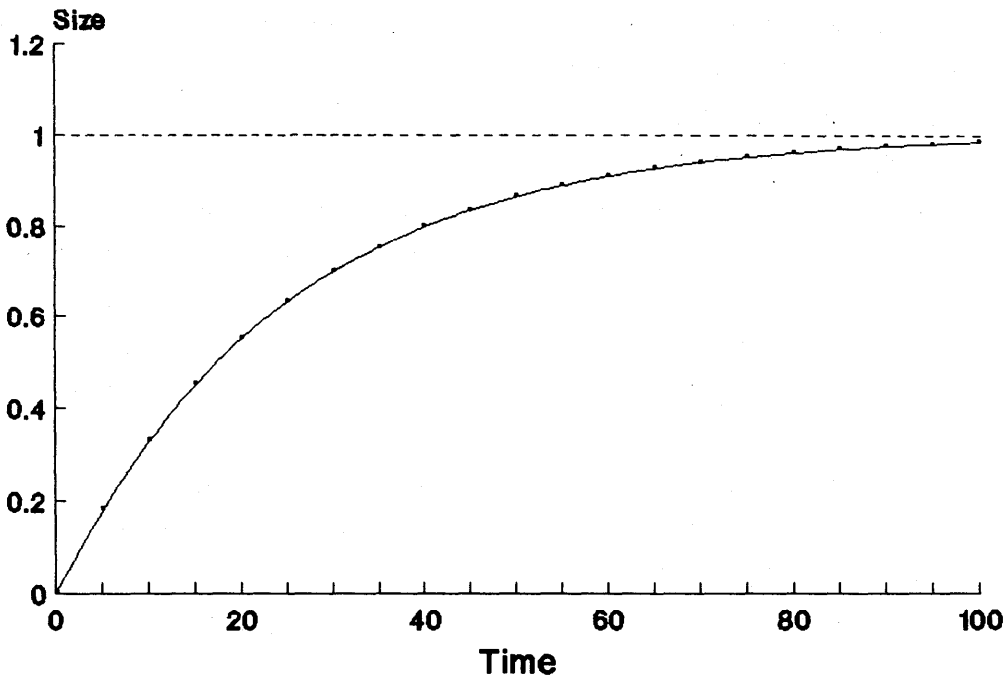


Figure 3. The Mitscherlich curve with the broken line denoting asymptote.

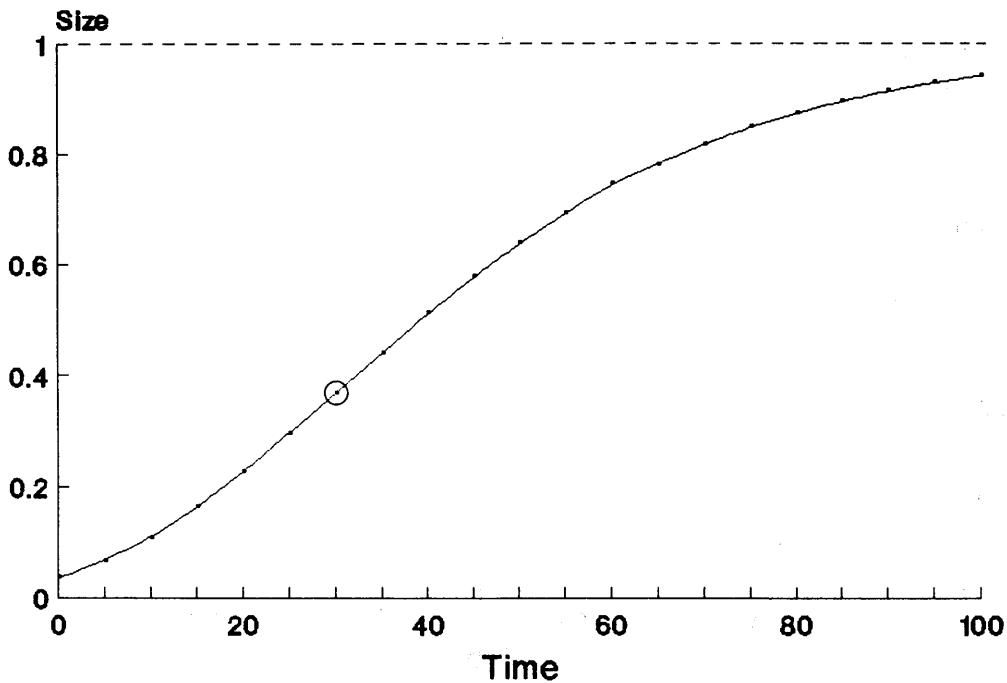


Figure 4. The Gompertz curve with the circle denoting the point inflection and the broken line asymptote.

낸다. 즉

$$\frac{dy}{dx} = qy(\ln A - \ln y) \quad (15)$$

의 微分方程式으로 부터 얻어진

$$y = Ae^{-e^{-p-qx}} \quad (16)$$

를 生長함수로 이용한다.

여기서 $p = \ln(\ln(\ln A / y_0))$ 로서 y_0 는 초기치, q 는 生長율을 나타내는 변수이다. 이 함수는 變曲點이 $x = p(b)/k$, $y = A/e$ 에 존재하고, 年年生長량의 최대값은 Aq/e 에 위치함을 알 수 있다. (그림-4)

2. 3. 3 Logistic 함수

일명 ROBERTSON의 生長함수로도 불리우는 이 함수는 吉良 등의 植物生態學者들에 의해 식물생장의 기본법칙을 나타내는 수식으로 인정되어 널리 이용되게 되었다.²⁾ 이 함수는 生物

의 生長速度(年年生長량)가 生物의 現存量과 장래의 期待生長量과의 양자에 비례하는 것으로 가정하고 있다.

$$\frac{dy}{dx} = 1y(C-y) \quad (17)$$

로부터

$$y = \frac{C}{1 + e^{a-bx}} \quad (18)$$

를 구할 수 있다. 여기서 $a = \ln((C - y_0) / y_0)$ 로서 $b = C/1$ 이며, y_0 는 초기값, 1은 生長率을 나타낸다. 이 함수에서는 變곡점이 $x = a/b$, $y = C/2$ 에, 年年生長량의 최대값은 $bc/4$ 에 위치하고 變曲點을 기준으로 對稱하는 형태를 이룬다.

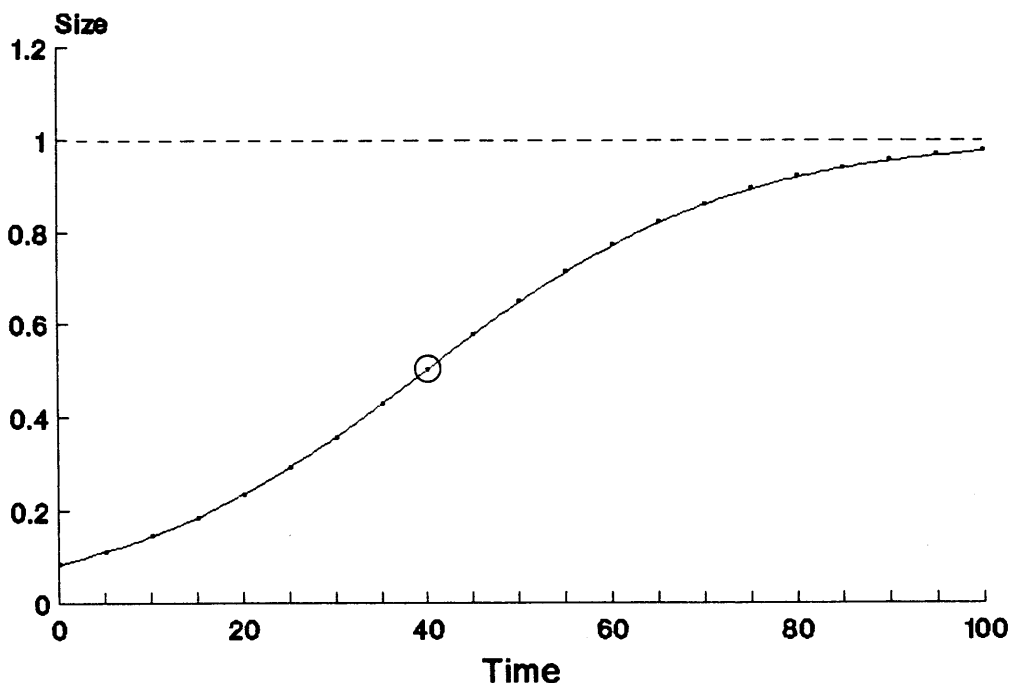


Figure 5. The Logistic curve with the circle denoting the point inflection and the broken line asymptote.

3. 結果 및 考察

3.1 各 函數別 生長豫測의 結果

樹木의 初期 20年, 40年, 60年, 80年까지의 年輪反徑의 실제 測定值를 利用하여 各 函數의 係數를 求하고, 이를 利用하여 최종 96年까지의 該當樹木의 半徑을 推定하여 實測值와 比較하였다. 그림 6, 7, 8에 각각 수목번호 401번의 실측치와 함께 利用函數別, 利用期間別 推定值의 傾向을 표시하였다. 各 函數 公히 96年 전체의 자료를 利用하였을 경우는 比較적 실측치와 큰 차가 없었으나, 초기 일정기간의 자료만으로 미래를 예측할 경우에는 많은 오차가 있었다. 특히 Logistic函數의 경우는 變曲點을 중심으로 對稱되는 경향때문인지 초기자료에 의한 미래 예측은 신뢰도가 극히 낮았다. 15年 이하의 초기의 生長과정만을 나타내는 데는 Logistic 과

Gompertz曲線이 比較적 精度가 높았으나, 장기에 걸친 生長패턴을 나타낼 경우에는 Mitscherlich函數가 誤差가 적은 것으로 나타났다. 이는 초반부 生長에 비해 후반부 生長이 늦은 이 수목의 특성때문인 것으로 생각된다.

50本の 生長기록을 5年 단위를 입력한 자료를 利用하여 35年, 55年, 75年, 95年까지를 대상으로 한 各 函數別 계수의 平均과 分數, 그리고 誤差量의 自乘合計와 평균오차자승합계 (MSSD)를 표1, 표2, 표3에 표시하였다. 이에서 보면, 55年까지의 추정에서는 Mitscherlich, Logistic, Gompertz의 순으로, 그 이후의 기간부터는 Mitscherlich, Gompertz, Logistic의 순으로 실측치와 추정치와 차이가 적은것으로 나타났다.

各 函數별로 추정한 96年에서의 반경의 분포를 실측치와 함께 그림 9, 10, 11에 표시하고 그

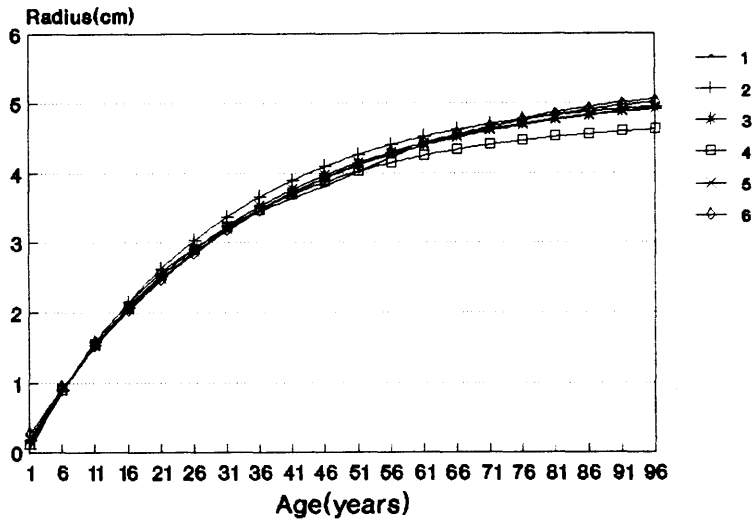


Figure 6. Mitscherlich radius curves of Jack Pine as observed vs. as estimated.

- 1: Observed radius
- 2: Estimated radius based on the first 20yr. period
- 3: Estimated radius based on the first 40yr. period
- 4: Estimated radius based on the first 60yr. period
- 5: Estimated radius based on the first 80yr. period
- 6: Estimated radius based on the first 95yr. period

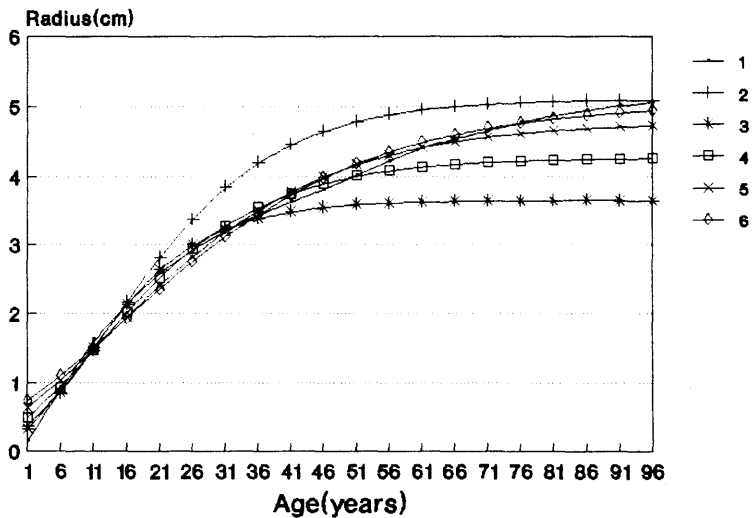


Figure 7. Gompertz radius curves of Jack Pine as observed vs. as estimated.

- 1: Observed radius
- 2: Estimated radius based on the first 20yr. period
- 3: Estimated radius based on the first 40yr. period
- 4: Estimated radius based on the first 60yr. period
- 5: Estimated radius based on the first 80yr. period
- 6: Estimated radius based on the first 95yr. period

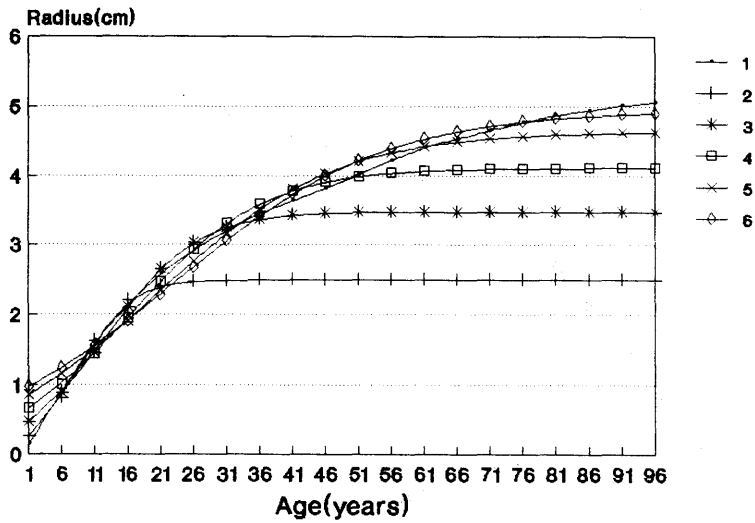


Figure 8. Logistic radius curves of Jack Pine as observed vs. as estimated.

- 1: Observed radius
- 2: Estimated radius based on the first 20yr. period
- 3: Estimated radius based on the first 40yr. period
- 4: Estimated radius based on the first 60yr. period
- 5: Estimated radius based on the first 80yr. period
- 6: Estimated radius based on the first 95yr. period

Table 1. Mean and S.D. of the parameters of the Mitscherlich equation

Mitscherlich		period of data			
		35yrs.	55yrs.	75yrs.	95yrs.
$y=M(1-Le^{-kt})$					
M asymptotic radius	Mean	6.256	6.080	6.153	6.339
	S.D.	1.099	1.217	1.270	1.396
L $L=(M-y_0)/M^*$	Mean	1.002	0.992	0.989	0.988
	S.D.	0.028	0.032	0.030	0.034
k intrinsic rate of growth	Mean	0.032	0.033	0.032	0.030
	S.D.	0.006	0.009	0.008	0.008
SSD sum of squared deviations	Mean	0.133	0.247	0.407	0.612
	S.D.	0.129	0.201	0.637	0.611
MSSD mean SSD		0.017	0.021	0.025	0.029

* : y_0 = initial radius

Table 2. Mean and S.D. of the parameters of the Gompertz equation

Gompertz $y=Ae^{-e^{p-qt}}$		period of data			
		35yrs.	55yrs.	75yrs.	95yrs.
A asymptotic radius	Mean	6.665	6.353	6.218	6.384
	S.D.	1.406	1.457	1.420	1.434
p $p=\ln(\ln(A/y_0))^*$	Mean	2.480	2.247	2.194	2.082
	S.D.	0.303	0.388	0.348	0.267
q intrinsic rate of growth	Mean	0.054	0.051	0.051	0.054
	S.D.	0.022	0.026	0.023	0.017
SSD sum of squared deviations	Mean	0.692	1.262	1.445	1.828
	S.D.	0.348	0.808	1.041	1.220
MSSD mean SSD		0.086	0.105	0.090	0.087

* : y_0 = initial radius

Table 3. Mean and S.D. of the parameters of the Logistic equation

Logistic $y=C/(1+e^{a-bt})$		period of data			
		35yrs.	55yrs.	75yrs.	95yrs.
C asymptotic radius	Mean	4.404	4.621	5.208	5.780
	S.D.	1.725	0.803	0.956	1.127
a $a=\ln((C-y_0)/y_0)^*$	Mean	2.250	1.993	1.844	1.657
	S.D.	0.266	0.236	0.346	0.241
b $b=C1^{**}$	Mean	0.170	0.127	0.098	0.075
	S.D.	0.039	0.021	0.025	0.025
SSD sum of squared deviations	Mean	0.354	0.654	1.512	2.259
	S.D.	0.426	0.326	0.921	0.985
MSSD mean SSD		0.044	0.055	0.095	0.108

* : y_0 = initial radius

** : l = intrinsic rate of growth

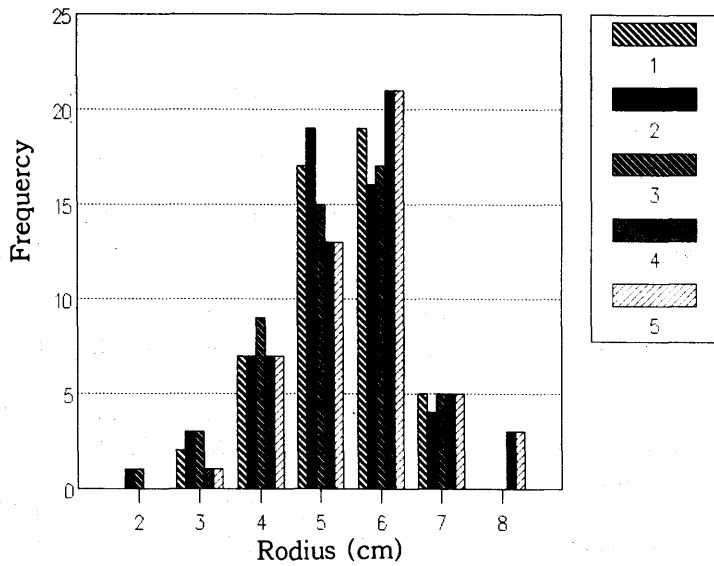


Figure 9. Distributions of radius at the age 96 using Mitscherlich function

- 1: Estimated distribution based on the first 35yr. period
- 2: Estimated distribution based on the first 55yr. period
- 3: Estimated distribution based on the first 75yrs. period
- 4: Estimated distribution based on the first 95yrs. period
- 5: Observed radius distribution

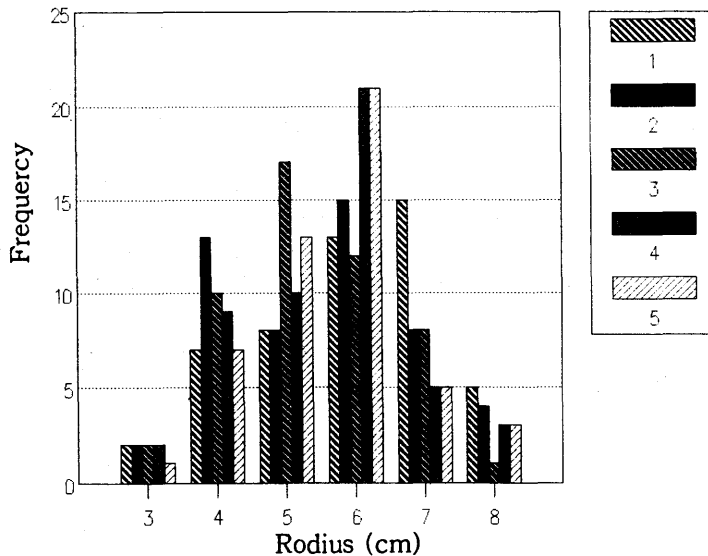


Figure 10. Distributions of radius at the age 96 using Gompertz function

- 1: Estimated distribution based on the first 35yr. period
- 2: Estimated distribution based on the first 55yr. period
- 3: Estimated distribution based on the first 75yr. period
- 4: Estimated distribution based on the first 95yr. period
- 5: Observed radius distribution

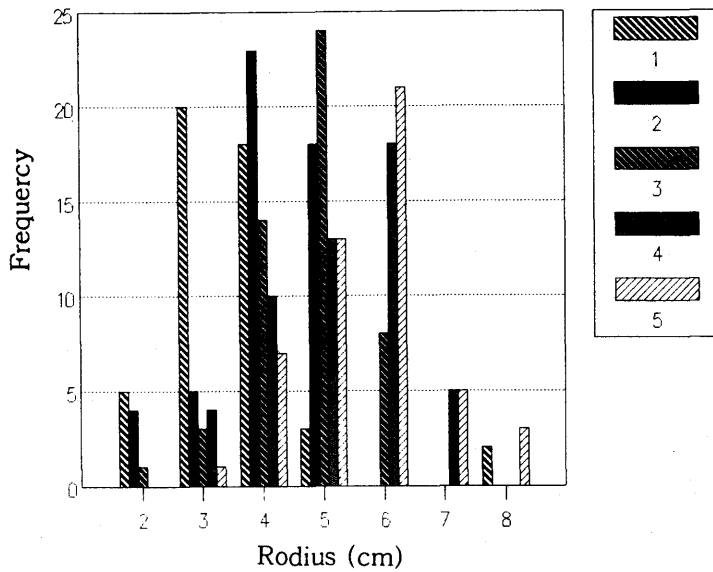


Figure 11. Distributions of radius at the age 96 using Logistic function

- 1: Estimated distribution based on the first 35yr. period
- 2: Estimated distribution based on the first 55yr. period
- 3: Estimated distribution based on the first 75yr. period
- 4: Estimated distribution based on the first 95yr. period
- 5: Observed radius distribution

Table 4. Mean and S.D. of the radius at the age 96 as observed vs. as estimated

		Mean	S. D.
observed radius		6.114	1.087
Mitscherlich equation	35yrs.	5.095	0.988
	55yrs.	5.714	1.048
	75yrs.	5.765	1.091
	95yrs.	5.858	1.066
Gompertz equation	35yrs.	6.479	1.319
	55yrs.	6.016	1.288
	75yrs.	5.828	1.152
	95yrs.	5.956	1.135
Logistic equation	35yrs.	4.384	1.657
	55yrs.	4.621	0.802
	75yrs.	5.197	0.948
	95yrs.	5.695	1.063

평균과 분산을 표4에 나타내었다. 각 함수 공히 약간씩 과소평가되었으나, 95년 까지의 자료를 이용할 경우는 Mitscherlich, Gompertz 함수가 비교적 좋은 결과를 나타내어, 일정기간의 초기 자료만을 이용하여 미래의 값을 추정할 경우에는 역시 Mitscherlich, Gompertz, Logistic 함수의 순으로 예측능력이 있다고 보여진다.

3·2 考察

直接探索法에 의해 50본의 生長過程을 代表的인 理論 生長函數에 의해 推定해본 결과는 Mitscherlich, Gompertz, Logistic 순으로 그 精確度가 높은 것으로 나타났다.

그러나 이는 2가지 원인에 의한 것으로 생각된다. 하나는 供試樹木인 Jack Pine이 비교적 初期生長이 빨라서 Mitscherlich식에 적합한 生長패턴을 지닌 수종이었다는 점이다. 生長패턴에 따라서는 Logistic이나 Gompertz쪽이 더 적합한 경우도 있을 수 있을 것으로 사료된다.⁴⁷⁾

두번째는 係數는 推定하는데 利用한 直接探索法의 初期值의 選定의 適合度의 問題가 있을 것으로 생각된다. 직접탐색법을 이용할 때 초기치의 선정이 Mitscherlich함수의 경우는 비교적 最適值에 가깝고 Logistic의 경우에는 最適值에서 떨어진 곳에 初期值를 잡았기 때문에 이러한 결과가 나온 것으로 생각된다.

Mitscherlich의 경우는 比較的 初期值를 選定하기 容易하고, 수속이 비교적 쉬운 반면, Logistic의 경우는 함수의 형태로 보아 조금 더 까다로운 면이 있었을 것이다. 초기치를 보다 정확한 위치에 잡으면 Gompertz나 Logistic의 경우도 보다 정확한 未來豫測에 도움이 되지 않을까 생각된다. 이를 위해서는 直接探索法의 初期值를 정확하게 택할 수 있는 方法이 강구되어

야 하겠다.

初期의 일정기간동안의 既知의 資料를 이용하여, 장래 樹木이 어떻게 生長을 계속할 것인가를 정확히 豫測할 수만 있다면, 林業과 같이 長期間을 요하는 분야에서 큰 도움이 될것은 확실하다.^{16 18)} 그러나 生長期間中 一部分의 데이터를 근거로 한 生長曲線에 의해 未來를 豫測한다는 것은 대단히 위험한 일임을 알수 있었다. 生長의 全期間을 통한 測定值를 이용하여 비슷한 조건을 지닌 동일계통 林木의 生長을 類推하는 것이 바람직하고, 그보다는 긴시간동안 얻어진 年輪의 解析을 통하여, 過去의 時系列的인 變化를 把握하고, 樹木의 生長에 影響을 미친 여러가지 環境因子들을 分析하는데 하나의 檢證資料로서 生長函數를 利用하는 것이 유효하리라고 사료된다.^{6 13)}

要 約

代表的인 理論的 生長函數인 Mitscherlich, Gompertz, Logistic 函數를 jack pine(*Pinus banksiana* Lamb.) 50본의 半徑生長에 適用하여 보았다. 각函數의 係數값을 구하기 위해서는 最適化 問題를 解決하는데 使用되는 直接探索法의 한 種類인 NELDER와 MEAD에 의해 提案된 方法을 利用하였다. 이는 특히 變數가 5 내지 6개 이하인 最適化 問題를 解決하기 위한 效率的인 方法이다. 모든 函數가 처음 豫想했던 것보다는 精確하게 實測值와 一致되지는 않았지만 세가지 函數중에서 Mitscherlich函數가 實測值와 誤差가 가장적었다. 또 초기의 一定期間(1~35년, 1~55년, 1~95년)의 樹木半徑 實測值를 資料로 하여, 3가지 生長函數에 의해 推定한 最終 96년에서의 半徑을 實測值와 比較해 본

結果 Mischerlich, Gompertz, Logistic函數의 順으로 適合한 것으로 나타났다.

引用文獻

- 1) GOMPERTZ, B. 1825. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new method of determining the value of life contingencies. Phil. Trans. Roy. Soc., 513~585
- 2) 穂積和未 條崎吉郎. 1960 植物生長의 Logistic理論, 古今書院. 272~304
- 3) 權五福. 鈴大太七 1973. 林木의 直徑生長의 變動에 關する 研究(1), 日林誌 55 : 346~351
- 4) 權五福 李興均 禹鐘春 1982. 소나무림의 密度管理에 關한 研究(I)-單純 Logistic曲線과 소나무林에 대한 그의 適用-, 韓林誌 57 : 1~7
- 5) NAGASIMA, I. and KURITA, S. 1987. A growth model with proportional increments and its application J. Jpn. For Soc. 69 : 77~83
- 6) NAGASIMA, I. and INADA, M. 1987. Stem form based on the MITSCHERLICH growth process J. Jpn. For. Soc. 69 : 10~15
- 7) NAGUMO, H. and SATO, T. 1965. Growth estimation of forest by Mitscherlich's law. Bull Tokyo Univ. For. 61 : 37~102
- 8) NELDER, J. A. and MEAD, R. 1965. A simplex method for function minimization. The Comput. J. 7 : 308~313
- 9) 西澤正久 等. 1965. 數量化による地位指數の 堆定法, 林試研報告, 176pp
- 10) 大隅眞一. 1983. 林學による生長函數. 各古屋大學 講義資料, 86pp
- 11) 大隅眞一. 1985. Richard生長函數による人工同齡林の生長法則に對する解板的研究. 文部省科學研究費成果報告書, 112pp,
- 12) 徐玉河. 鈴大太七. 1987. 直徑生長 parameter의 決定方法について. 日林誌 69 : 301~308
- 13) 鈴大太七. 1961. 林木の生長法則. 林地肥培效果に關する研究. 86~109. 林野廳
- 14) SWEDA, T. 1984. Theoretical growth equations and their applications in forestry. Bull. Nagoya Univ. For. 7 : 149~260
- 15) SWEDA, T. AND UMEMURA T. 1979. Growth of even-aged jack pine stands-report of Nagoya Univesity boreal forest survey in Canada, Dept. For., Nagoya Univ., Nagoya, 762pp
- 16) UMEMURA, T. and SUZUKI, T. 1974. Forest transition as a stochastic process V. J. Jap. For. Soc., 56 : 195~204
- 17) WALSH, G.R. 1975 Methods of Optimization, John Wiley and Sons, London, 200pp
- 18) YOSIDA, N. 1979. Analysis of growth curve. J. Jap. For. Soc., 61 : 321~329