

단일항복면 구성모델에 의한 입상토의 비배수거동해석

Undrained Behaviour of Granular Soil Using Single Work-Hardening Model

정진섭* · 김찬기** · 이문수***

Jeong, Jin Seob · Kim, Chan Kee · Lee, Moon Soo

Abstract

This paper aims at developing a finite element program to predict undrained behavior of granular soil by using elasto-plastic constitutive model. A computer program developed by authors based on Christian's techniques for undrained behaviour of the soil has been employed coupled with Lade's single work-hardening model. Modification of the program for drained behaviour, considering restraint of volumetric strain, makes it possible to analyze the underdrained behaviour. To validate the newly developed program, comparison of results was performed between numerical values and experimental data for Baekma river sand as well as Sacramento river sand studied by Seed and Lee. The program is evaluated to have high accuracy.

要 旨

본 연구는 탄소성구성모델을 사용하여 입상토의 비배수거동해석을 위한 유한요소 프로그램을 개발한 것이다. 연구방법으로는 지금까지 제안된 탄소성모델 가운데서 Lade의 단일항복면구성모델을 선정하고 하중이 작용할 때 체적변화가 없다는 사실에 입각, 체적변화를 억제하면서 간극수압을 구하는 Christian기법에 의하여 이미 개발된 배수거동을 위한 유한요소 프로그램을 수정하여 비배수거동해석을 할 수 있는 유한요소 프로그램을 개발하였다. 개발된 프로그램의 검증을 위하여 백마강모래의 시험자료와 Seed 등의 시험자료를 이용한 수치해석결과와 시험결과를 비교한 바 개발된 프로그램의 정도가 높다는 것을 확인하였다.

1. 서 론

비배수 재하조건에서 흙 및 간극수압의 거동예측은 점성토 뿐만 아니라 입상토에서도 토체의 변위

및 파괴와 흙과 구조물의 상호작용 문제를 해석하는데 있어서 때로는 중요한 사항이 되고 있다. 그런데 입상토의 경우는 점성토와는 달리 비배수시험의 경우 간극수압측정의 어려움 때문에 시험이 어려울 뿐만 아니라 구성모델도 배수시험으로 부터 구한 자료에 근거하고 있기 때문에 비배수거동을 위한 토질매개변수 결정자체가 곤란한 문제점을 또

* 정회원 · 원광대학교 공과대학 교수
** 정회원 · 원광대학교 대학원 박사과정
*** 정회원 · 전남대학교 농과대학 부교수

합하고 있다. 따라서 배수거동으로 부터 비배수거동을 유추 해석하는 것은 매우 의미있는 내용이라고 할 수 있다. 이와 같은 연구를 위해서는 정도높은 구성모델과 유한요소 수치해석을 필요로 하고 있다.

지금까지 제안된 많은 탄소성 구성모델이 있으나 입상토 거동해석에 이용 할 수 있는 Lade.⁽¹⁻⁴⁾의 모델중에서 최근에 개발된 단일항복면 구성모델을 선택하였다. 그 이유로서는

1. 정팔면체면에서의 파괴곡면이 실험결과와 비교적 잘 일치하고
2. 탄소성에 기초를두고 있는 비관련유동칙을 기본으로 해서 구성되어 있고
3. 단일항복면을 사용하므로 계산 과정이 간편하기 때문이다.

이 이외에도 구성식에 포함된 모든 토질매개변수를 통상의 삼축압축시험으로부터 구할수있는 간편성을 감안한 것이다. 복합항복면에 비하여 단일항복면 구성모델은 흙의 거동해석에 있어서 항복곡선을 하나의 수식으로 단순화 시킬 수 있고 그 정도도 높은 것으로 평가되고 있다. 위에서 기술한 바와 같이 많은 장점을 지니고 있음에도 토질매개변수 결정의 계산과정이 매우 까다롭고 구성모델의 표현식이 복잡하기 때문에 실제지반의 변형해석에는 널리 이용되지 못하고 주로 이론적인 연구위주로 논의되어 왔다. 한편 비배수 거동해석에 있어서 간극수압을 예측하기 위하여 여러방법이 제안되어 왔다. 그중에서 간극수압계수의 개념을 소개한 Skempton⁽⁵⁾ 방법이 가장 간단하면서도 널리 사용되어 왔다. 그는 포화된 흙에 대해서 간극수압 변화량 ΔU 를 $\Delta U = \Delta\sigma_1 + A(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)$ 로 나타냈다. 이 방법은 개념이 간단하여 사용에는 편리하지만 약간의 결점을 가지고 있다.

즉 A의 값이 구속압력과 응력수준에 따라 변하고 또한 중간주응력의 영향이 포함되지 않은 것이다.

한편 Henkel은 팔면체 전직응력과 전단응력중분량의 향으로 간극수수압 변화량 ΔU 를 $\Delta U = 1/3(\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3) + A \Delta\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$ 로 표현하였다.

Henkel⁽⁶⁾은 정규압밀된 Weald clay에 대한 삼축압축과 인장시험에서 파괴시 동일한 간극수압 변화량을 갖는다고 지적하였다. Shibata와 Karube⁽⁷⁾는

재 성형된 Saka alluvial 점토에 대한 육면체시험에서 모든 중간주응력값에 대하여 발생된 간극수압값이 앞에 기술한 Henkel의 표현식에 잘 따른다고 하였다. 위에서 나타난 경험식으로 전응력변화량을 알 수 있을 때에는 간극수압 변화량은 추정할 수 있지만 흙에서 발생하는 변형률을 고려하여 결정되지는 않았다. 한편 Roscoe^(8,9) 등이 제안한 Cam-clay모델은 재 성형한 점토로 축대칭 삼축시험결과에 근거하여 개발되었다. 이 모델은 간단한 curve fitting 절차를 흙의 거동을 수식화하는 데 사용했다. Cam-clay모델을 사용하여 계산한 간극수압변화량은 비배수시험에 대하여 이상화시킨 유효응력경로에 근거하여 계산할 수 있으며 이 때는 흙 변형률이 고려되었다. 위에서 말한 여러 방법과는 달리 본 논문에서는 이에 상응하는 단일항복면 구성모델을 선정하고 하중 증가가 있을 때 체적변화가 생기지 않는다는 조건에 근거하여 간극수압 증가량을 계산하도록 하는 Christian⁽¹⁰⁾의 기법을 사용, 유한요소 프로그램을 개발하여 비배수거동의 예측을 가능하도록 시도하였으며 백마강모래의 시험자료와 Seed와 Lee⁽¹¹⁾에 의해 수행한 Sacramento river sand의 삼축시험 자료를 이용하여 수치해석 결과를 시험결과와 비교하여 개발된 유한요소 프로그램의 정도와 선택한 구성식의 정교함을 검증하고자 하였다.

2. 비배수거동해석을 위한 유한요소 프로그램 개발

2.1 단일항복면 구성모델

Lade와 Kim⁽²⁻⁴⁾이 제안한 단일항복면 구성모델에서 전변형률중분은 다음과 같이 탄성성분과 소성성분으로 나누어진다.

$$de_{ij} = de_{ij}^e + de_{ij}^p \quad (1)$$

여기서 탄성변형률성분은 Hooke의 법칙에 의해 계산되고 소성변형률성분은 소성이론에 의하여 계산된다. 이 구성모델은 탄성거동, 파괴규준, 유동칙, 항복규준, 일의 경화 및 연화법칙 등의 성분으로 나타낸다.

2.1.1 탄성거동

하중의 제거-재 재하시에 회복 가능한 탄성변

형률은 Hooke의 법칙으로부터 계산된다. 또한 포아송비는 많은 실험결과 대부분의 토질재료에 대해서 0~0.5의 값으로 나타나고 있으며 이 값은 소성 변형까지 포함된 값이나 Lade는 탄성변형만 고려하게 되는 경우에는 대부분의 시험결과 0.2에 가까운 값이 되고 있음을 검증하고 0.2를 택하고 있다. 탄성계수는 응력함수와 무차원상수로 다음과 같이 표현된다.

$$E_{ur} = Kur \cdot P_a \cdot \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n \quad (2)$$

여기서 p_a 는 E_{ur} 을 σ_3 와 같은 단위로 하기 위한 대기압이고 Kur, n는 토질매개변수이다.

2.1.2 파괴규준

Lade 단일항복면 구성모델의 파괴규준은 응력텐서의 제1불변량과 제3불변량의 향으로 다음과 같이 표현한다.

$$\left(\frac{I_1^3}{I_3} - 27 \right) \cdot \left(\frac{I_1}{p_a} \right)^m = \eta_1 \quad (3)$$

여기서 I_1 과 I_3 는 다음과 같다.

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (4)$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} + \tau_{yx} \tau_{zy} \tau_{xz} - (\sigma_x \tau_{yz} \tau_{zy} + \sigma_y \tau_{zx} \tau_{xz} + \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yx}) \quad (5)$$

2.1.3 유동칙

소성변형률증분은 유동칙으로 부터 다음과 같이 계산한다.

$$de_{ij}^p = d\lambda_p \cdot \frac{\partial g^p}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6)$$

여기서 g_p 는 소성포텐셜함수이고, $d\lambda_p$ 는 비례상수이다. 이 함수는 항복함수와 다르므로 비관련유동칙이 성립된다. 그리고 Lade의 단일항복면 구성모델의 소성포텐셜함수는 3개의 응력불변량향으로 표현되며 다음과 같다.

$$g_p = \left(\Psi_1 \cdot \frac{I_1^3}{I_3} - \frac{I_1^2}{I_2} + \Psi_2 \right) \cdot \left(\frac{I_1}{p_a} \right)^p \quad (7)$$

여기서 I_1, I_3 는 식 (4), (5)와 같고, I_2 는 제2 응력불변량으로 다음과 같이 표현된다.

$$I_2 = \tau_{xy} \tau_{yx} + \tau_{yz} \tau_{zy} + \tau_{zx} \tau_{xz} - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) \quad (8)$$

또 Ψ_1 은 항복규준의 곡률매개변수 m에 따라 결정되는 값으로 다음과 같다.

$$\Psi_1 = 0.00155 \cdot m^{-1.27} \quad (9)$$

이 외에도 Ψ_2 및 m은 시험으로부터 결정되는 토질매개변수이다.

2.1.4 항복규준과 일의 경화 및 연화법칙

항복면은 소성일로 부터 유도되며 등방항복함수, f_p 는 다음과 같이 표현된다.

$$f_p = f_p'(\sigma) - f_p''(W_p) = 0 \quad (10)$$

여기서 f_p' 는 다음과 같이 표현된다.

$$f_p' = \left(\Psi_1 \cdot \frac{I_1^3}{I_3} - \frac{I_1^2}{I_2} \right) \cdot \left(\frac{I_1}{p_a} \right)^h \cdot e^q \quad (11)$$

여기서 h는 토질매개변수이고 q는 정수압축을 따라 원점(0)에서 부터 변한다.

경화함수는 다음과 같이 표현된다.

$$f_p'' = \left(\frac{1}{D} \right)^{1/\rho} \cdot \left(\frac{W_p}{p_a} \right)^{1/\rho} \quad (12)$$

여기에서 D와 ρ 는 주어진 재료에 대해서 일정하다. 따라서 f_p'' 는 소성일에 대해서만 변화되며 ρ 와 D는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\rho = \frac{p}{h} \quad (13)$$

$$D = \frac{C}{(27\Psi_1 + 3)\rho} \quad (14)$$

여기서 C와 ρ 는 등방압축이 진행되는 동안에 이루어지는 소성일, W_p 를 표현하는데 관련된 매개변수이며 W_p 는 다음과 같다.

$$W_p = C \cdot p_a \cdot \left(\frac{I_1}{p_a} \right)^r \quad (15)$$

소성일이 증가함에 따라 현재의 응력이 파괴면에 도달할 때 까지 등방항복면은 팽창한다. f_p 와 W_p 사이의 관계는 소성일이 증가함에 따라 경사가 감소

하는 단조증가함수로 나타낸다. 항복면의 연화함수는 다음 식과 같이 표현된다.

$$f_p'' = A \cdot e^{-B(W_p/P_a)} \quad (16)$$

여기서 A와 B는 파괴의 정점에서 경화곡선의 경사로 결정되는 상수이다.

2.2 응력-변형률 중분식의 유도

본 연구에 사용된 응력-변형률 관계식은 Lade와 Kim⁽²⁻⁴⁾이 제안한 단일항복면 구성모델로서 평면변형률과 축대칭조건에 적합하도록 유도된 것이다.

탄성 응력-변형률중분 관계는 Hooke의 법칙에 따라 다음과 같이 표현된다.

$$d\sigma_{ij} = C^e(d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^p) \quad (17)$$

여기서 C^e 는 탄성계수 행렬로서 후술한다.[식 (27) 참조]

또 항복함수 f_p 의 전미분을 취하면 다음과 같다.

$$df_p = \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} \cdot d\sigma_{ij} - \frac{\partial f_p}{\partial W_p} \cdot dW_p = 0 \quad (18)$$

식(18)에서 dW_p 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$dW_p = \lambda_p \cdot \mu \cdot g_p \quad (19)$$

여기서 λ_p 는 비례상수이다.

그런데 소성변형률중분은 직교조건에 따라 다음과 같이 표현된다.

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda_p \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_{ij}} \quad (20)$$

식 (18)에 식 (19)를 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - \frac{\partial f_p}{\partial W_p} \cdot \lambda_p \cdot \mu \cdot g_p = 0 \quad (21)$$

식 (20)을 식 (17)에 대입한 결과를 식 (21)에 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} \cdot C^e \cdot (d\varepsilon_{ij} - \lambda_p \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_{ij}}) - \frac{\partial f_p}{\partial W_p} \cdot \lambda_p \cdot \mu \cdot g_p = 0 \quad (22)$$

식 (22)에서 λ_p 를 구하면 다음과 같다.

$$\lambda_p = \frac{\frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} \cdot C^e \cdot d\varepsilon_{ij}}{\frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} \cdot C^e \cdot \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f_p}{\partial W_p} \cdot \mu \cdot g_p} \quad (23)$$

또, 식 (20)을 식 (17)에 대입하면 다음과 같다.

$$d\sigma_{ij} = C^e \left(d\varepsilon_{ij} - \lambda_p \cdot \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_{ij}} \right) \quad (24)$$

식 (23)을 식 (24)에 대입하면 다음과 같다.

$$d\sigma_{ij} = \left[C^e - \frac{C^e \cdot \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} C^e}{\frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} \cdot C^e \cdot \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f_p}{\partial W_p} \cdot \mu \cdot g_p} \right] \cdot d\varepsilon_{ij} \quad (25)$$

$$C^{ep} = \left[C^e - \frac{C^e \cdot \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} C^e}{\frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} \cdot C^e \cdot \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f_p}{\partial W_p} \cdot \mu \cdot g_p} \right] \quad (26)$$

여기서 C^{ep} 는 탄소성계수 행렬이다.

이 방정식에 사용된 각각의 성분은 평면변형률 및 축대칭조건에 맞도록 다음과 같이 유도된다. 축대칭과 평면변형률조건에서는 다음과 같다.

$$[C^e] = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \quad (27)$$

여기서 ν 는 포아송비이다.

$$\frac{\partial g_p}{\partial \sigma_{ij}} = \left(\frac{I_1}{P_a} \right)^n \begin{bmatrix} G - (\sigma_x + \sigma_z) \cdot \left(\frac{I_1^2}{I_2^2} \right) - \Psi_1 \cdot (\sigma_y \cdot \sigma_z) \cdot \left(\frac{I_1^3}{I_2^2} \right) \\ G - (\sigma_x + \sigma_z) \cdot \left(\frac{I_1^2}{I_2^2} \right) - \Psi_1 \cdot (\sigma_x \cdot \sigma_z) \cdot \left(\frac{I_1^3}{I_2^2} \right) \\ 2 \left(\frac{I_1^2}{I_2^2} \right) \cdot \tau_{xy} + 2\Psi_1 \cdot (\sigma_z \cdot \tau_{xy}) \cdot \left(\frac{I_1^3}{I_2^2} \right) \\ G - (\sigma_x + \sigma_z) \cdot \frac{I_1^2}{I_2^2} - \Psi_1 \cdot (\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2) \cdot \left(\frac{I_1^3}{I_2^2} \right) \end{bmatrix} \quad (28)$$

여기서 G는 다음식과 같다.

$$G = \Psi_1 \cdot (\mu + 3) \frac{I_1^2}{I_3} - (\mu + 2) \frac{I_1}{I_2} + \frac{\mu}{I_1} \cdot \Psi_2 \quad (29)$$

$$\frac{\partial f_p'}{\partial \sigma_{ij}} = \left(\frac{I_1}{P_a} \right)^h \cdot e^a \left[\begin{array}{l} G' - (\sigma_y + \sigma_x) \cdot \left(\frac{I_1^2}{I_2^2} \right) - \Psi_1 \cdot (\sigma_y \cdot \sigma_x) \cdot \left(\frac{I_1^3}{I_3^2} \right) \\ G' - (\sigma_z + \sigma_x) \cdot \left(\frac{I_1^2}{I_2^2} \right) - \Psi_1 \cdot (\sigma_z \cdot \sigma_x) \cdot \left(\frac{I_1^3}{I_3^2} \right) \\ 2 \left(\frac{I_1^2}{I_2^2} \right) \cdot \tau_{xy} + 2 \Psi_1 \cdot (\sigma_z \cdot \tau_{xy}) \cdot \left(\frac{I_1^3}{I_3^2} \right) \\ G' - (\sigma_x + \sigma_y) \cdot \frac{I_1^2}{I_2^2} - \Psi_1 \cdot (\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xz}^2) \cdot \left(\frac{I_1^3}{I_3^2} \right) \end{array} \right] \quad (30)$$

여기서 G'는 다음식과 같다.

$$G' = \Psi_1 \cdot (h + 3) \frac{I_1^2}{I_3} - (h + 2) \frac{I_1}{I_2} \quad (31)$$

경화에 대해서

$$f_p'' = \left(\frac{1}{D} \right)^{1/\rho} \cdot \left(\frac{W_p}{P_a} \right)^{1/\rho} \quad (12 \text{ bis})$$

$$\frac{df_p''}{dW_p} = \frac{1}{D \cdot P_a \cdot \rho} \cdot f_p^{1-\rho} \quad (32)$$

연화에 대해서

$$f_p'' = A \cdot e^{-B(W_p/P_a)} \quad (16 \text{ bis})$$

$$\frac{\partial f_p''}{\partial W_p} = A \cdot \left(\frac{-B}{P_a} \right) \cdot e^{-B(W_p/P_a)} \quad (33)$$

여기서

$$A = (f_p')_{\text{peak}} \cdot e^{-B(W_p/P_a)_{\text{peak}}} \quad (34)$$

$$B = \left[\frac{df_p''}{d(W_p/P_a)} \right]_{\text{hard peak}} \frac{1}{(f_p')_{\text{peak}}} \quad (35)$$

이다.

2.3 배수 및 비배수응력해석을 위한 유한요소의 정식화

단일항복면 구성모델을 사용한 증분식을 이용하여 평면변형률조건과 축대칭조건에 동시에 사용할 수 있는 유한요소식을 다음과 같이 유도한다. 전응력증분벡터 $\{\Delta\sigma\}$ 는 다음과 같이 나타낸다.

$$\{\Delta\sigma\}^T = \{\Delta\sigma_x, \Delta\sigma_y, \Delta\tau_{xy}, \Delta\sigma_z\} \quad (36)$$

유효응력증분벡터 $\{\bar{\Delta}\sigma\}$ 는 다음과 같다.

$$\{\bar{\Delta}\sigma\}^T = \{\bar{\Delta}\sigma_x, \bar{\Delta}\sigma_y, \Delta\tau_{xy}, \bar{\Delta}\sigma_z\} \quad (37)$$

그리고 간극수압증분벡터 $\{\Delta U\}$ 는 다음과 같다.

$$\{\Delta U\}^T = \{\Delta U, \Delta U, 0, \Delta U\} \quad (38)$$

유효응력원리에 의하면 전응력증분벡터 $\{\Delta\sigma\}$ 는 다음과 같다.

$$\{\Delta\sigma\} = \{\bar{\Delta}\sigma\} + \{\Delta U\} \quad (39)$$

변형률증분벡터 $\{\Delta\varepsilon\}$ 는 다음과 같다.

$$\{\Delta\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x, \Delta\varepsilon_y, \Delta\gamma_{xy}, \Delta\varepsilon_z\} \quad (40)$$

유효응력증분과 변형률증분과의 관계식은 다음과 같다.

$$\{\bar{\Delta}\sigma\} = [C^{ep}] \cdot \{\Delta\varepsilon\} \quad (41)$$

표면작용하중 증분벡터를 $\{\Delta P\}$, 체적력 증분벡터를 $\{\Delta b\}$, 변위 증분벡터를 $\{\Delta V\}$ 라 하고 δ 를 임의의 미소 가상증분이라 하면 가상일의 원리에 의하여 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \int_s \{\Delta P\}^T \delta\{V\} ds + \int_v \{\Delta b\}^T \delta\{\Delta V\} dv \\ = \int_v \{\Delta\sigma\}^T \delta\{\Delta\varepsilon\} dv \\ = \int_v \{\bar{\Delta}\sigma\}^T \delta\{\Delta\varepsilon\} dv + \int_v \{\Delta U\}^T \delta\{\Delta\varepsilon\} dv \end{aligned} \quad (42)$$

요소 내부의 임의 지점에서 변위증분은 절점좌표 x, y 의 선형함수로 가정하였으며 다음 식으로 표시된다.

$$\{\Delta V\} = [M] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\Delta V_N\} \quad (43)$$

이 식에서 $[M]$ 은 x 와 y 의 1차항을 포함하고 $[A]^{-1}$ 은 절점변위 증분벡터, $\{\Delta V_N\}$ 를 선형전개를 위한 적절한 계수로 변환시키는 행렬 표기이다. 식 (43)을 미분하여 요소 내의 변형률 증분값과 절점 변위값의 관계를 표현하면 다음과 같다.

$$\{\Delta\varepsilon\} = [B] \cdot \{\Delta V_N\} \quad (44)$$

식 (41), (43), (44)를 식 (42)에 대입하고 계속적으로 대수연산을 하면 다음과 같이 행렬이 구해진다.

$$\delta\{\Delta V_N\}^T\{\Delta P_N\} = \delta\{V_N\}^T\langle\{K_N\rangle\rangle\{\Delta V_N\} + \int_V [B]^T\{\Delta U\}dv \quad (45)$$

여기서 $\delta\{\Delta V_N\}$ 의 크기는 임의로 정할 수 있으므로 단위벡터를 취하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\{\Delta P_N\} = [K_N]\{\Delta V_N\} + \int_V [B]^T\{\Delta U\}dv \quad (46)$$

여기서

$$\{\Delta P_N\} = [A]^{-1}\left(\int_V [M]^T\{\Delta P\}ds + \int_V [M]^T\{b\}dv\right) \quad (47)$$

$$[K_N] = \int_V [B]^T[C^e][B]dv \quad (48)$$

식 (46)은 절점변위 증분벡터 $\{\Delta V_N\}$ 를 절점력 증분벡터 $\{\Delta P_N\}$ 에 강성행렬로 관련시키고 있다. 일반적인 유한요소식에는 간극수압이 해석에 고려되지 않기 때문에 식 (46)의 마지막 항이 없으나 비배수 조건에서는 간극수압이 평형에 관련되기 때문에 간극수압 항이 포함된 것이다.

좀더 상세하게 식 (46)의 마지막 항을 검토하면

$$\{\Delta U\}^T = [1, 1, 0, 1]\Delta U \quad (49)$$

이기 때문에

$$[G]^T = [1, 1, 0, 1] \quad (50)$$

로 정의하면 편리하다. 식 (46)의 마지막 항은 $[G]\cdot[B]\cdot\Delta U\cdot Vol.$ 로 되며, $Vol.$ 은 요소의 체적이다. 2개의 미지수의 크기를 비슷하게 하기 위하여 과잉간극수압을 체적계수($K_B = E/3(1-2\nu)$)로 나눈 새로운 미지수 ΔH_N 를 다음과 같이 나타낸다.

$$\Delta H_N = \frac{\Delta U}{k_B} \quad (51)$$

따라서 식 (46)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{\Delta P_N\} = [K_N]\cdot\{\Delta V_N\} + [K'_N]\cdot\Delta H_N \quad (52)$$

여기서

$$[K'_N] = [G]\cdot[B]\cdot Vol.\cdot K_B \quad (53)$$

식 (52)는 일반적인 유한요소식에 없는 간극수압 미지수가 포함되어 있다. 그리하여 두개의 미지수에 하나의 식이 되므로 이 문제를 풀려면 하나의 식이 더 필요하다. 여기서 필요한 또 하나의 식은 체적

변화 제어에 관한 식이며 다음과 같이 유도된다. 즉 축대칭조건에서 체적변형을 증분, $\Delta\epsilon_v$ 는 다음과 같이 표현한다.

$$\Delta\epsilon_v = \Delta\epsilon_x + \Delta\epsilon_y + \Delta\epsilon_z = [1 \ 1 \ 0 \ 1][B]\{\Delta V_N\} = [G]^T[B]\cdot\{\Delta V_N\} \quad (54)$$

식 (54)의 양변에 $K_B\cdot Vol.$ 를 곱하면 다음과 같다.

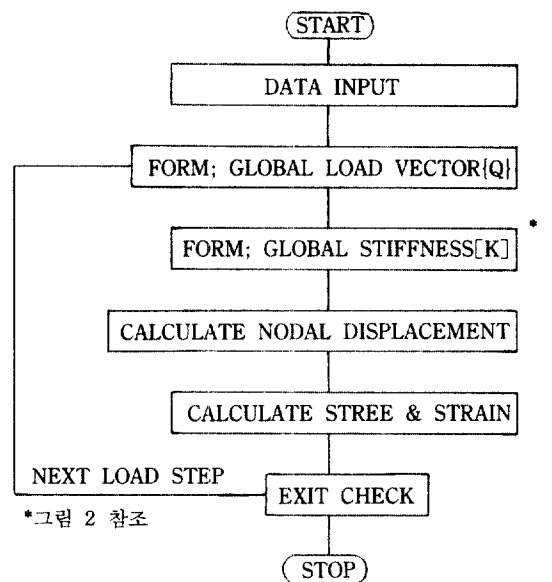
$$K_B\cdot Vol.\cdot\Delta\epsilon_v = [G]^T\cdot[B]\cdot\{\Delta V_N\}\cdot Vol.\cdot K_B = [K'_N]^T\cdot\{\Delta V_N\} \quad (55)$$

식 (52)와 식 (55)을 결합하면 요소에 대한 일반화된 다음과 같은 행렬방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_N & K'_N \\ K'^T_N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_N \\ \Delta H_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P_N \\ K_B\cdot Vol.\cdot\Delta\epsilon_v \end{bmatrix} \quad (56)$$

여기서 $Vol.\cdot\Delta\epsilon_v$ 은 요소내의 체적증분량이며, 비압축성인 경우는 0이다.

그리하여 비배수해석을 할 경우 $K_B\cdot Vol.\cdot\Delta\epsilon_v = 0$ 으로 미지수 ΔH_N 을 구하여 요소의 과잉간극수압을 계산하고, 배수조건일 때는 $\Delta H_N = 0$ 으로 요소의 체적변형률증분을 구한다.

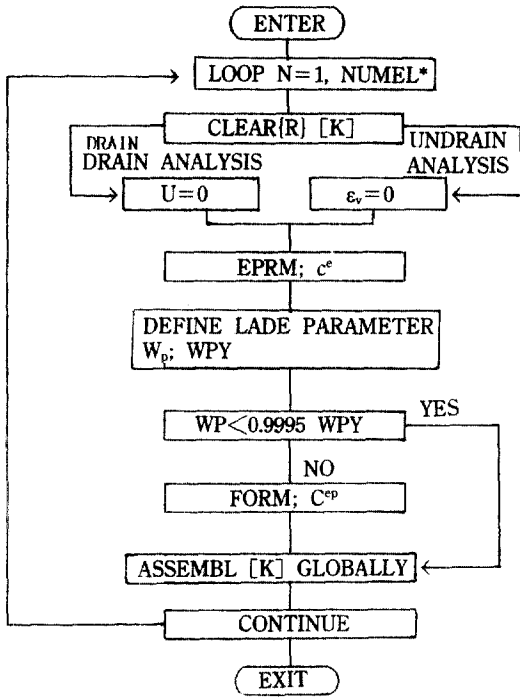


*그림 2 참조

그림 1. Flow chart of main program

2.4 유한요소프로그램의 흐름도

본 프로그램에서 사용된 주 알고리즘의 흐름도는 그림 1에 나타내었으며 강성매트릭스([K])를 만드는 알고리즘은 그림 2에서 보여주고 있다.



*NUMEL: NUMBER OF ELEMENT

그림 2. Flow chart of global stiffness assembly

3. 시 험

3.1 시료조제

단일항복면 구성모델의 토질매개변수를 결정하기 위해 백마강유역에서 채취한 모래를 자연건조시킨 후 체가름시험으로 #60는 전부 통과하고, #200에 모두 잔류한 시료의 최대간극비(e_{max})와 최소간극비(e_{min})를 측정하여 상대밀도(Dr)를 60%가 되도록 시료의 초기간극비(e_{scp})를 결정한다. 이와 같이 준비된 시료를 사용하여 등방압축시험 및 구속압력, σ_c 를 1, 2, 4 kg/cm²로 각각 달리한 일련의 배수 삼축압축시험을 하였다. 그리고 본 논문에서 사용된 시료의 물리적 특성은 표 1에 나타난 바와 같으며 시료의 크기는 직경 50 mm, 길이 100 mm의 원통형으로

표 1. Physical properties of Baekma river sand

비 중	e_{max}	e_{min}	e_{scp}	Dr
2.706	1.255	0.973	1.0858	0.60

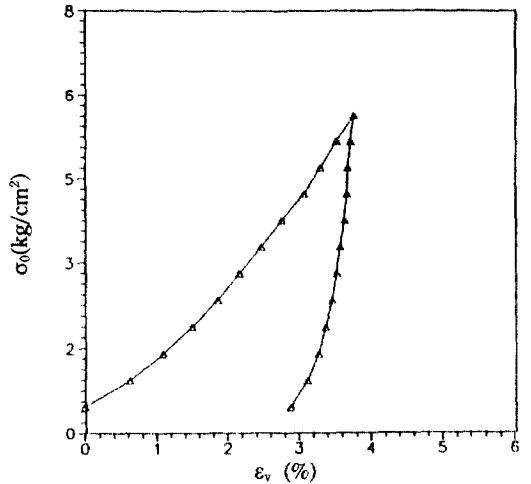


그림 3. Isotropic compression tests for Baekma river sand

하였다.

3.2 시험 내용

실내에서 공기건조한 백마강모래를 등방압축시험과 배수삼축압축시험을 실시 하였다. 그림 3은 등방압축시험으로서 구속압력, σ_c 를 0.5 kg/cm²씩 변화시키면서 매 단계마다 체적변형률(ϵ_v)을 측정된 결과를 나타낸 것이고, 그림 4는 각각 구속압력, σ_c 을 1, 2, 4 kg/cm²로 달리하여 배수 삼축압축시험한 결과를 축변형률(ϵ_1) - 축차응력($\sigma_1 - \sigma_3$) 및 축변형률(ϵ_1) - 체적변형률(ϵ_v)의 관계로 나타낸 것이다. 이 때 탄성계수(E_{ur})를 결정하기 위해 연속적으로 loading-unloading-reloading을 수행하였으며 전단속도는 0.02 mm/min로 하였다.

3.3 토질매개변수결정

삼축시험결과로부터 단일항복면 구성모델에 필요한 토질매개변수를 결정하는 작업은 매우 복잡한 과정을 거쳐야 하며, 또한 수작업으로 결정할 때는 많은 시간이 소요되고 다소 오차가 유발될 우려가 있다.

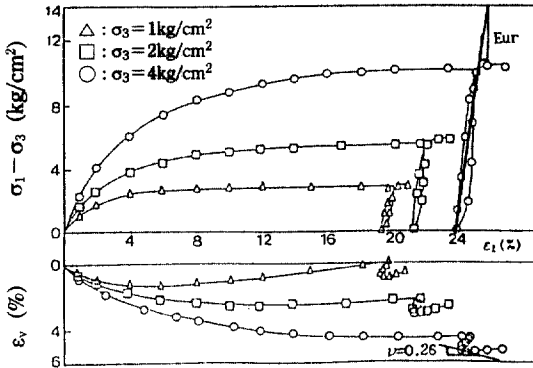


그림 4. Result of drained triaxial compression tests for Baekma river sand

따라서, 본 논문에서는 신속하고 보다 더 신뢰할 수 있는 토질매개변수를 결정하기 위해 시험데이터를 이용 회귀분석(regression analysis)하여 토질매개변수를 결정하는 프로그램을 개발하였다. 본 토질매개변수결정 프로그램의 흐름도는 그림 5와 같다.

이 프로그램에 의하여 결정된 토질매개변수는 표 2에 나타낸 바와 같다.

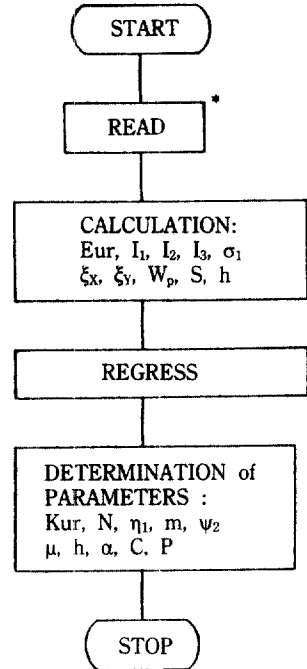
3.4 토질매개변수의 검증

결정된 토질매개변수의 타당성을 검증하기 위하여 증분식을 이용하여 개발된 프로그램에 이 토질매개변수를 입력자료로 사용하여 축변형률에 대한 응력-변형률 및 체적변형률을 계산하고 이렇게 계산된 결과를 토질매개변수결정 프로그램에 입력자료로 다시 사용하여 결정된 토질매개변수와 이 때의 상관계수를 표 3에 나타내었다. 표에 나타낸 바와 같이 항복기준에 관련되는 토질매개변수 h 와 α 만을 제외하고 모든 토질매개변수의 상관계수는 1.0으로서 완벽한 상관성을 나타내고 있으며 h 와 α 도 각각 0.89 및 0.97로서 강한 상관성을 나타낸다. 따라서 본 연구에서 개발한 토질매개변수 결정 프로그램과 결정된 토질매개변수의 정도는 매우 높다는 것을 알 수 있다.

4. 흙의 거동해석

4.1 개요

본 논문에서 개발된 단일항복면 구성모델을 사용



*READ DATA Pr: Proving Ring 읽음값
D1: 축변위 읽음값
Dv: 체적변형 읽음값
N1: Loading End
N2: Unloading End
N3: Reloading End
 σ_3 : 구속압력

그림 5. Flow chart of program to determine soil parameters

표 2. Mean parameters determined from test data

Model componet (1)	Parameter (2)	Parameter Determined
Elastic behavior	Modulus number K_{ur}	348
	Exponent	n 0.74
	Poisson's ratio	ν 0.28
Failure criterion	Intercept	η_1 33.
	Exponent	m 0.13
Plastic potential	Intercept	Ψ_2 -3.353
	Exponent	μ 2.22
Yield criterion	Exponent	h 0.676
	Constant	α 0.146
Hardening function	Intercept	C 0.00064
	Exponent	p 1.865

표 3. Parameters determined by feed back from prediction

Model componet (1)	Parameter (2)	Parameter by feed back	Correlation (r ²)
Elastic behavior	Modulus number	K _{ur}	348
	Exponent	n	0.74
	Poisson's ratio	v	0.28
Failure criterion	Intercept	η ₁	33.
	Exponent	m	0.13
Plastic potential	Intercept	Ψ ₂	-3.353
	Exponent		2.22
Yield criterion	Exponent	h	0.676
	Constant	α	0.146
Hardening function	Intercept	C	0.00064
	Exponent	p	1.865

한 지반 변형해석용 유한요소프로그램의 정도를 확인하고 실용성을 검증하기 위하여 본 연구에서 시험한 백마강 모래에 대한 삼축압축시험 자료와 Seed 등⁽¹¹⁾의 문헌에 나타난 Sacramento river sand의 삼축시험자료를 가지고 수치해석한 결과와 시험결과를 비교하고자 한다. 유한요소망은 원형삼축압축 시험의 1/4부분만을 채택하여 그림 6과 같이 축대칭조건으로 가정하였다.

4.2 흙의 배수거동에속

그림 7, 그림 8 및 그림 9는 백마강 모래의 배수 삼축압축시험결과를 축차응력(σ₁-σ₃)과 축변형률(ε₁)의 관계 및 체적변형률(ε_v)과 축변형률(ε₁)의 관계로 나타낸 것이다. 동일한 구속응력에서 3회씩 시험한 결과이다. 이들 시험 자료를 이용하여 회귀 분석하여 구한 토질매개변수에 의한 Lade의 단일항복면 구성모델을 사용하여 예측한 값을 실선으로

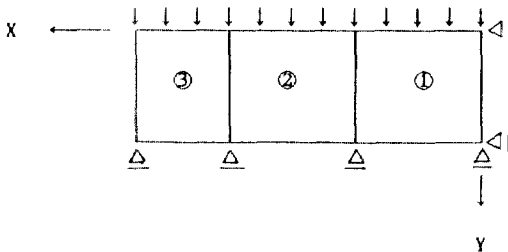


그림 6. Finite element mesh

하여 나타냈다. 그림 7의 σ_c=1 kg/cm²인 경우에는 축변형률에 대한 축차응력 및 체적변형률의 예측치가 실험치보다 다소 크게 나타나고 있어 양자간에 약간의 편차를 보이고 있으나, σ_c=2 kg/cm² 및 σ_c=4 kg/cm²의 경우는 초기부분에서 약간 큰 값을 보일 뿐 축변형률이 증가함에 따라 양자간에 매우 좋은 일치치를 보이고 있다(그림 8~9 참조). 그러므로 본 논문에서 개발한 유한요소프로그램이 배수거동을 예측하는데 그 정도가 매우 높다는 것이 확인되었다. 따라서 단일항복면구성모델을 사용하여도 복합항복

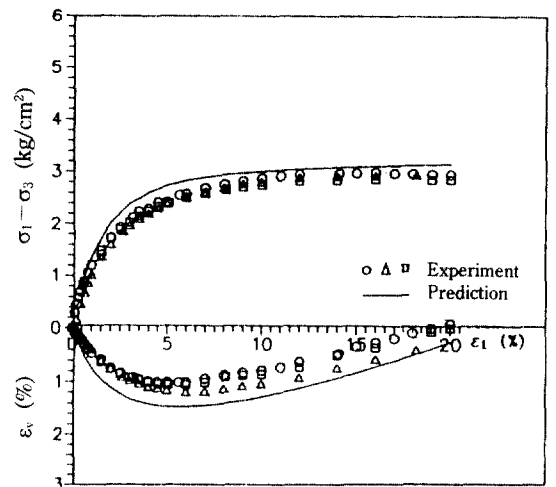


그림 7. Drained triaxial compression tests for σ_c=1 kg/cm² on Baekma river sand

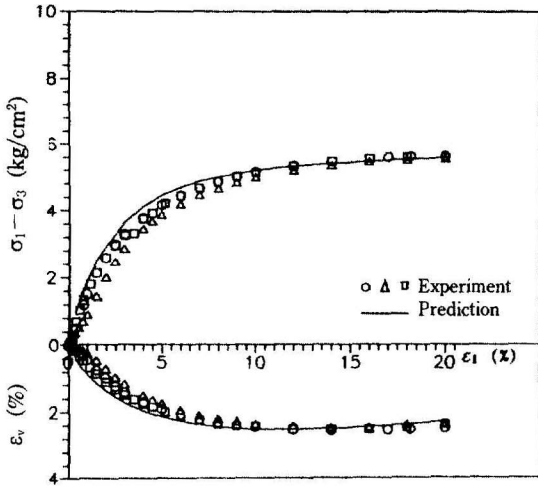


그림 8. Drained triaxial compression tests for $\sigma_c = 2$ kg/cm² on Baekma river sand

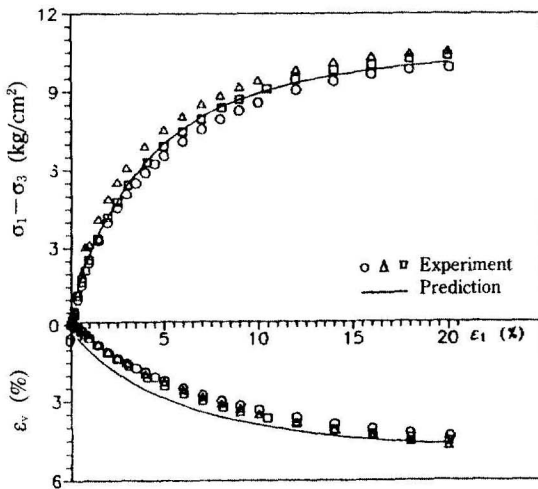


그림 9. Drained triaxial compression tests for $\sigma_c = 4$ kg/cm² on Baekma river sand

면과 같은 해석결과를 기대할 수 있으며 이는 모델을 표현하는 수식의 간단한 표현으로 계산 시간을 줄일 수 있는 이점이 있다고 판단된다.

4.3 흙의 비배수 거동예측

단일항복면 구성모델을 선정하여 하중 증가가 있을 때 체적변화가 생기지 않는다는 조건에 입각하여 2장에서 설명한 유효요소법에 근거한 프로그램을 사용하여 비배수조건에서의 간극수압 증가량을 계산한

다. 그리고 본 프로그램의 타당성을 확인하기 위하여 백마강 모래의 시험결과를 수치해석결과와 비교한 것이 그림 10, 그림 11 및 그림 12이고 Seed와 Lee⁽¹¹⁾의 Sacramento river sand 시험결과와 비교한 것이 그림 13, 그림 14 및 그림 15이다. 백마강모래에 대하여 구속응력, σ_c 를 1, 2, 4 kg/cm²로 달리하여 응력비(σ_1/σ_3)-축변형률의 관계를 나타낸 것이 그림 10a~12a이고 간극수압(U)과 축변형률(ϵ_v)의 관계를 나타낸 것이 그림 10b-12b이다. 전자에 있어서는 3 경우 축변형률이 10%까지는 예측치가 실험치보다 약간 큰 값을 보이거나 축변형률이 증가함에 따라 양자가 근접하는 경향을 보인다. 또 후자(간극수압과 축변형률관계)에 있어서는 구속응력, σ_c 가 1 및 2 kg/cm²의 경우는 축변형률 5%까지의 초기단계에서는 예측치와 실험치가 완전히 일치하고 있으나 축변형률이 증가함에 따라 예측치가 실험치보다 작은 값을 보이고 있다. 이에 반하여 구속응력, σ_c 가 4 kg/cm²의 경우는 축변형률의 12%까지는 예측치가 실험치보다 약간 큰 값을 보이거나 축변형률이 증가함에 따라 그 반대 현상을 나타내고 있다. 이상의 사실로 미루어 보아 백마강 모래에 대한 축변형률에 대한 응력비 관계는 모든 경우 거의 같은 경향을 보이거나 간극수압은 구속응력, σ_c 가 1 및 2 kg/cm²과 구속응력, σ_c 가 4 kg/cm²간에 약간의 상이한 양상을 보이고 있으나 대체적으로 예측치와 실험치 사이에는 근접한 경향이 있다고 판단된다. 다음으로 Sacramento river sand의 경우를 살펴보면 구속응력, σ_c 를 3, 5 kg/cm² 및 12.65 kg/cm²로 달리하여 비배수 시험한 결과, 응력비(σ_1/σ_3)와 축변형률관계를 나타낸 것이 그림 13~15a이고 간극수압(U)과 축변형률(ϵ_v) 관계를 나타낸 것이 그림 13~15b이다. 전자의 경우 구속응력, σ_c 가 3 kg/cm² 이외는 축변형률 12% 이내의 초기단계에서는 예측치가 실험치보다 큰 값을 보이거나 축변형률이 증가함에 따라 매우 좋을 일치를 나타내고 있다. 그러나 구속응력, σ_c 가 12.65 kg/cm²에서는 축변형률이 5%까지는 예측치와 실험치가 좋은 일치를 보이거나 축변형률이 증가하게 되면 예측치가 약간 작은 값을 보이고 있다. 후자의 경우(간극수압과 축변형률의 관계)는 구속응력, σ_c 가 3 kg/cm²에서는 축변형률 10%까지는 예측치와 실험치가 좋은 일치를 나타내고 있으나 축변형률이 증가함에

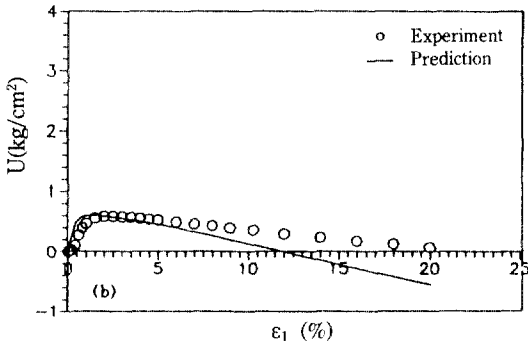
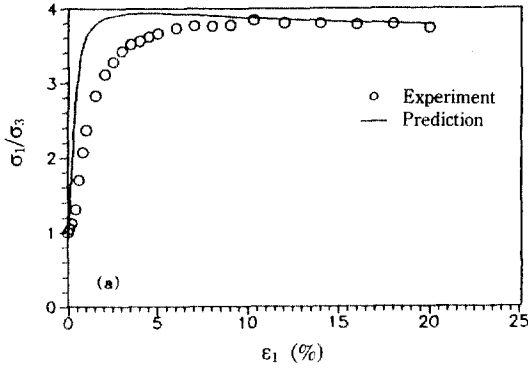


그림 10. Undrained triaxial compression tests for $\sigma_c=1 \text{ kg/cm}^2$ on Baekma river sand

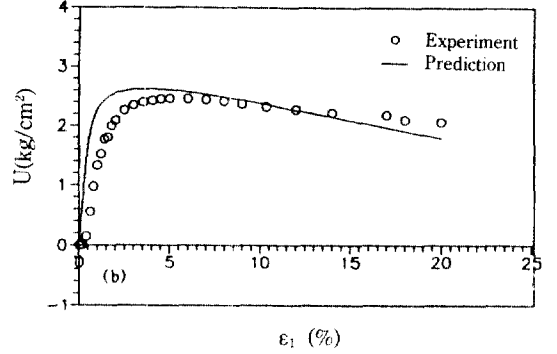
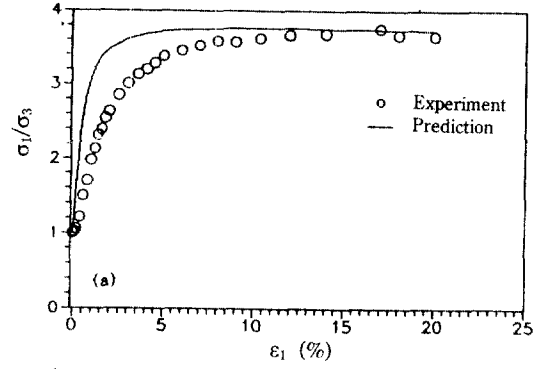


그림 12. Undrained triaxial compression tests for $\sigma_c=4 \text{ kg/cm}^2$ on Baekma river sand

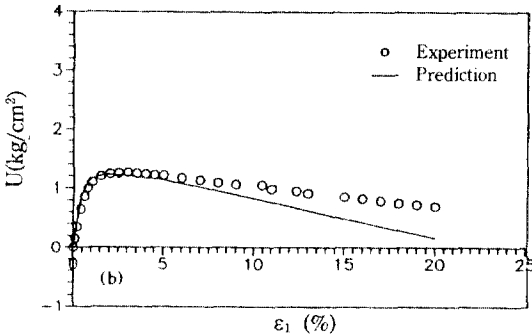
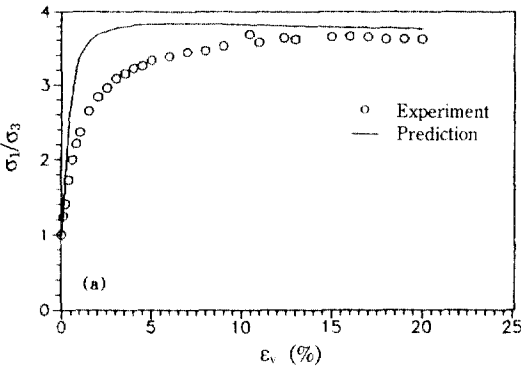


그림 11. Undrained triaxial compression tests for $\sigma_c=2 \text{ kg/cm}^2$ on Baekma river sand

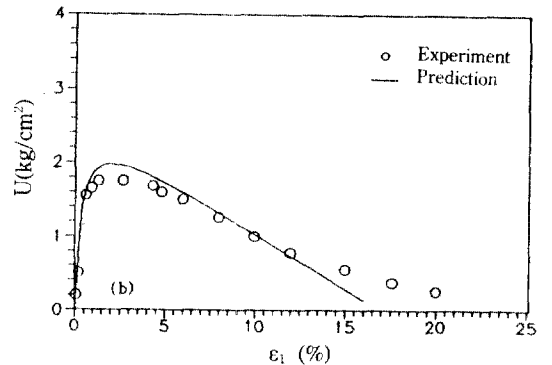
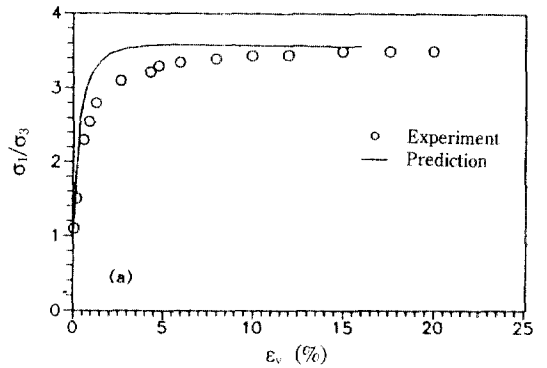


그림 13. Undrained triaxial compression tests for $\sigma_c=3 \text{ kg/cm}^2$ on Sacramento river sand

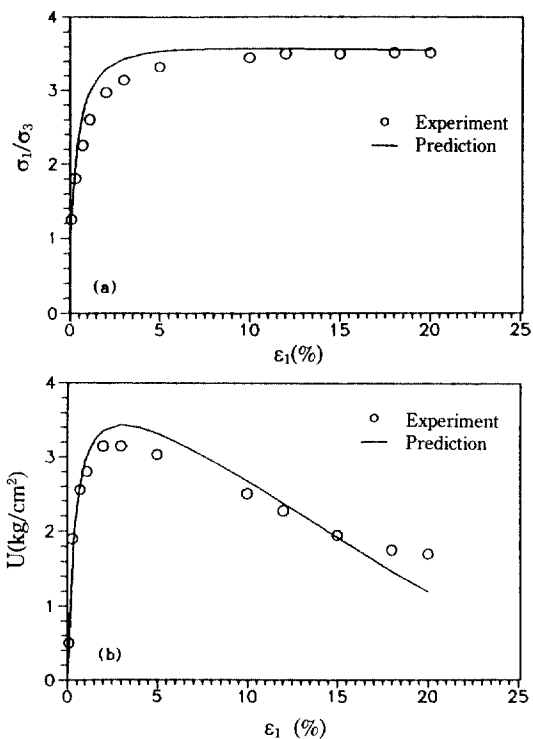


그림 14. Undrained triaxial compression tests for $\sigma_c = 5 \text{ kg/cm}^2$ on Sacramento river sand

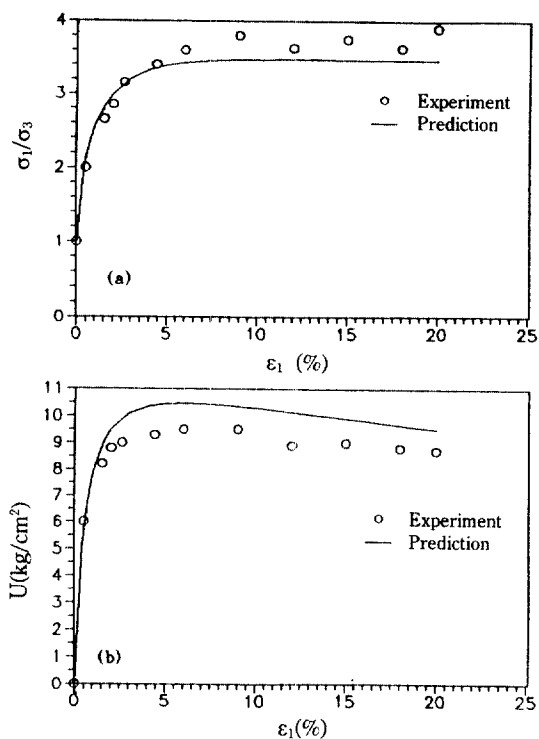


그림 15. Undrained triaxial compression tests for $\sigma_c = 12.65 \text{ kg/cm}^2$ on Sacramento river sand

따라 예측치가 실험치보다 작은 값을 보인다. 다만 구속응력, σ_c 가 12.65 kg/cm^2 에서는 시종 예측치가 실험치보다 약간 큰 값을 보이나 근접하고 있음이 확인된다. 이상을 종합하여 볼 때 백마강 모래와 Sacramento river sand에 대한 배수시험 결과와 수치해석 결과는 대응성이 좋으므로 배수거동을 위한 본 프로그램의 실용성은 높다고 할 수 있다.

이상의 사실로 미루어 보아 입상토의 배수 삼축 시험결과를 이용하여 구한 토질매개변수를 그대로 사용하여 배수거동을 유추하여도 시험치와 예측치간에 좋은 일치를 보이고 있으므로 제하조건에 따라 입상토로 구성된 지반거동해석을 배수 혹은 비배수조건을 임의로 선택하여 해석하는 것이 가능하게 되었다.

5. 결 론

현재까지 제안된 탄소성모델 가운데서 그 정도가

높다고 평가되고 있는 Lade의 단일 항복면 구성모델을 사용, 입상토의 비배수거동을 해석하기 위하여 하중을 작용하였을 때 체적변화가 없다는 사실에 입각하여 체적변화를 억제하여 간극수압을 구하는 Christian기법에 의한 유한요소 프로그램을 개발하고 이 프로그램에 의하여 백마강모래에 대한 배수 및 비배수 삼축시험자료와 Seed⁽¹¹⁾ 등의 시험자료를 이용하여 수치해석결과와 시험자료를 비교하였다. 또한 본문에서는 간단한 삼축압축시험으로부터 Lade 단일항복면 모델에 필요한 11개나 되는 토질 매개변수를 손쉽게 결정하는 프로그램개발도 함께 수행되었다. 수치해석 결과와 시험관측치를 비교한 바 다음과 같은 주요 결과를 얻을 수 있었다.

1) 개발된 토질매개변수 결정프로그램에 의하여 종래의 수작업에 비하여 정도높은 매개변수를 매우 쉽게 구할 수 있다.

2) 단일항복면 구성모델을 사용하여 입상토의 배수거동 해석이 가능하며, 그 결과는 높은 정도를

나타냈다. 단일항복면모델을 사용하면 복합항복면에 비하여 거의 같은 정도를 기대하면서 경제성을 기할 수 있다고 판단된다.

3) 입상토의 배수거동에 의한 시험자료를 사용하여 개발된 유한요소 프로그램에 의하여 정도 높은 비배수거동을 해석할 수 있다.

4) 이제까지 이론 위주로 연구되어 온 Lade 구성모델을 사용한 유한요소프로그램 개발에 의해서 Lade 모델의 현장에의 적용성을 높일 수 있게 되었다.

참 고 문 헌

1. Lade, P.V., 1977, "Elasto-Plastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil with Curved Yield Surfaces". *Int. J. Solids and Structs*, Pergamon press Inc. New York, Vol.13, pp.1019-1035.
2. Kim, M.K. and Lade, P.V., 1988, "Single Hardening Constitutive Model for Frictional Materials, I. Plastic Potential Function". *Computers and Geotechnics*, 5(4), pp.307-324.
3. Lade, P.V. and Kim, M.K., 1988a, "Single Hardening Constitutive Model for Frictional Materials, II. Yield Criterion and Plastic Work Contours". *Computers and Geotechnics*, 6(1), pp.13-29.
4. Lade, P.V., and Kim, M.K., 1988b, "Single Hardening Constitutive Model for Frictional Materials, III. Comparisons with Experimental Data". *Computers and Geotechnics*, 6(1), pp.30-47.
5. Skempton, A.W., 1954, "The Pore Pressure Coefficients A and B." *Geotechnique*, London, England, Vol.4, No.4, pp.143-147.
6. Henkel, D.J. and Wade, N.H., 1966, "Plane Strain Tests on a Saturated Remolded clay". *Journal of the Soil Mechanics and Foundations*, Division, ASCE. Vol.92, No. SM 6, pp.67-80.
7. Shibata, T., and Karube, D., 1965, "Influence of the Variation of the Intermediate Principal Stress on the Mechanical Properties of Normally Consolidated Clays". *Proceedings of the 6th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Vol.I, pp.359-363.
8. Roscoe, K.H., Schofield, A.N., and Worth, C.P., 1958. "On the Yielding of Soil". *Geotechnique*. London, England, Vol.8, No.1, pp.22-52.
9. Roscoe, K.H., and Burland, J.B., 1968, "On the Generalized Stress Strain Behaviour of 'Wet' Clay", *Engineering Plasticity*, Cambridge Univ. Press. pp.535-609.
10. Christian, J.T. 1968. "Undrained stress distributions by numerical method" *Journal of the soil mechanics and foundations*, Division, ASCE, Vol.94, No.SM6, pp.1333-1345.
11. Seed, H.B. and Lee, K.L. 1967. "Undrained strength characteristics of cohesionless soils". *Journal of the Soil Mechanics and Foundations*, Division, ASCE, Vol.93, No.SM6, pp.333-360.

(接受 : 1992. 2. 10)