

# Winkler 地盤上에 놓인 矩形板의 解析

## An Analysis of the Rectangular Plates on an Winkler's Foundation

朴        根        洙\*  
Park,    Keun    Soo

### Summary

This study was carried out to investigate the mechanical behaviour of the plate on a Winkler's foundation according to the soil-structures relative stiffness and the applicability of the conventional analysis method.

For the above purpose, Winkler's constant of 4, 15, 25 and  $100\text{kg/cm}^2/\text{cm}$  was considered and the plate thickness of 20, 30, 50, 100 and 150cm was adopted.

Results obtained from the numerical examples are summarized as follows :

1. The effects of elastic foundation is considerable for plates with small flexural rigidity.
2. As the Winkler's constant increases, the bending moment in the plate becomes localized near the loading point.
3. The stresses evaluated by the conventional method were not correct even for rigid ground such as rock.
4. If the relative stiffness of the plate is very large, for example the plate thickness is larger than 100cm, the conventional analysis method can be justified for the design purposes.
5. On assumption the flexural rigidity of the plate is infinite, the interaction of soil and plate can be ignored in design consideration.

The numerical examples in this paper show that when the plate thickness is more than 100cm, the effects of elastic foundation almost disappear.

In practical design, soil-plate interaction should be taken into account, because the 100cm-thickness of the plate will not be practical value in usual sites.

\* 金光企業(株)

키워드 : Winkler 地盤, 矩形板, 彈性地盤, 板-地盤  
相互作用, 地盤 支持力 係數

## I. 序 論

一般으로 모든 構造物은 地盤上에 놓이게 된다. 이때 構造物과 地盤 사이의 相互作用問題는 大端히 複雜한 樣狀을 나타내게 되며 따라서 正確한 解釋을 하는 것은 어려워지게 마련이다. 萬一 地盤이 構造物을 支持하기에 알맞지 않은 경우에는 構造物 下部에 擴大基礎를 設置하되로서 上部荷重의 地盤에의 轉達媒體로서의 機能을 하도록 한다. 이러한 板에 대한 一般의인 設計方法에서는 地盤上의 板이 無限한 剛性을 갖는다고 假定하되로서 地盤의 反力分布를 單純한 靜力學的 平衡條件으로부터 決定하게 된다. 그러나 이러한 假定은 典型的인 不合理性을 內包하고있다. 왜냐하면 板-地盤사이의 柔軟性으로 인해서 載荷點 附近 領域에 심한 反力 集中 現像이 생기기 때문이다. 따라서 現實의인 解析을 위하여 地盤이 彈性的으로 舉動한다고 假定하되로서 自然狀態의 地盤條件을 滿足하지는 않겠지만 實際의인 有用한 情報를 얻을 수 있다. 板과 地盤의 相互作用問題를 解決하기위해 地盤을 彈性體로 假定하는 力學的인 모델은 Winkler 基礎로 假定하는 경우와 Boussinesq 基礎로 假定하는 경우로 大別할 수 있다. Winkler 基礎는 地盤自體가 갖는 荷重分散能力을 無視하는 것이다. 그러나 實際의 地盤은 어느程度의 荷重分散能力을 갖고 있으며 그것을 考慮에 넣는 것이 妥當하다. 이와같이 地盤의 荷重分散能力을 考慮한 모델은 Boussenisq 地盤이라한다. 그러나 이러한 解析方法에서는 地盤의 임의의 1점의 反力은 그 점의 變形뿐 만 아니라 基礎地盤全體의 變形의 影響을 받게되므로 컴퓨터프로 그램상 상당한 어려움이 있으며 대단히 큰 컴퓨터 容量을 必要로 하므로 본 研究에서는 地盤을 Winkler 基礎로 假定하기로 한다. 본 研究의 目的은 板과 地盤의 相對的인 剛性에 따라 地盤위에 直接 놓인 板의 力學的인 舉動이 어떻게 달라지는가를 數值的으로 究明함과 同時에

여기서 解析된 結果를 모두 實行的인 解析方法의 結果와 比較하되로서 慣行的인 解析方法의 適用性을 檢證하는데 있다.

## II. 解析方法

### 1. 基本假定

가. 地盤의 垂直처짐은 反力強度에 比例한다 (Winkler 假定).

나. 鐵筋 콘크리트는 鐵筋斷面積을 無視한 總斷面積만을 考慮하고 等方, 均質이고 應力과 變形率은 正比例한다.

### 2. 有限要素 모델

要素內的 變位  $\{ \delta \}$  에 대한 近似函數를 設定함에 있어서 Fig. 1과 같은 自然座標系를 考慮하고 2차의 補間函數로서 다음과 같은 形狀函數를 考慮한다.

偶節點 :

$$N_i(\xi, \eta) = (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1)/4$$

邊節點 :

$$\xi_i = 0, N_i(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 + \eta_0)/4 \quad \dots (1)$$

$$\eta_i = 0, N_i(\xi, \eta) = (1 + \xi_0)(1 - \eta_0^2)/2$$

$$\text{단 } \xi_0 = \xi * \xi_i, \eta_0 = \eta * \eta_i$$

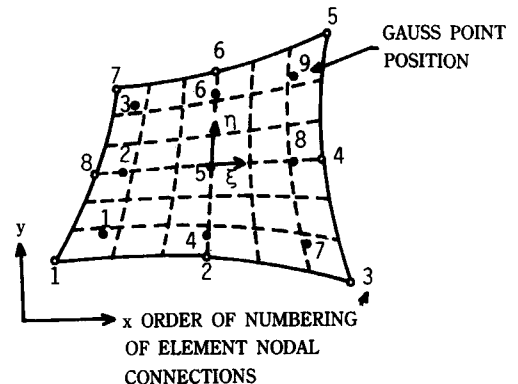


Fig. 1. Orientation of local axes  $\xi, \eta$  and order of gauss point numbering for two dimensional parabolic isoparametric element

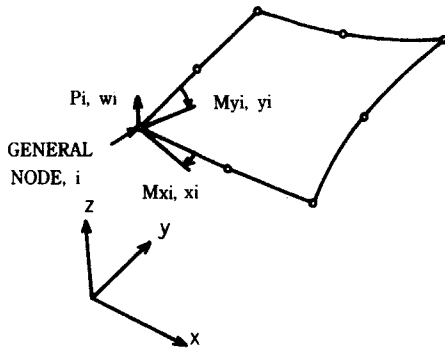


Fig. 2. Genral forces and displacements for plate bending element

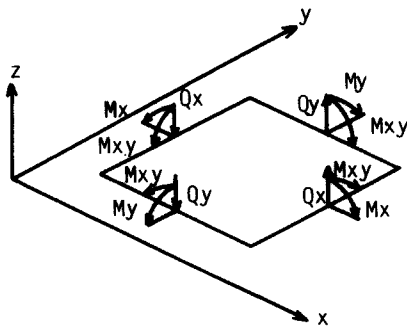


Fig. 3. Sign convention for bending moments and shear forces(+ve sence indicated)

### 3. Winkler 地盤要素의 剛度行列

Winkler 基礎는 Fig. 4에 보인 바와 같이 地盤을 스프링 支持로 모델화한 것이고 그의 剛性은 地盤의 支持力係數로서 나타낼 수 있다. 즉 節點에서의 反力은 그 節點의 垂直變位에 比例한다고 假定한다. 이러한 모델에서는 한 節點에서의 反力은 다른 節點의 變位의 影響을 받지 않게되므로 表面內의 變位는 基礎底面으로부터 받는 反力強度에 比例하게된다. 즉

$$q_z = k * w$$

단  $k$ 는 地盤支持力 係數(kg/cm<sup>2</sup>/cm)

이러한  $q_z$ 에 대한 等價節點力系  $P_i$ 는 假想일의 原理에 의하여 다음과 같이 評價될 수 있다.

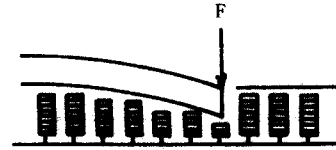


Fig. 4. Winkler foundation

$$\delta W_i^T P_i = \int_A (\delta w)(kw) dA$$

$$\text{단 } W_i^T = [W_1, W_2, \dots, W_8] \dots \dots \dots (3)$$

$$P_i^T = [P_1, P_2, \dots, P_8]$$

식(3)을 식(2)에 代入하면 다음과 같은 剛度方程式을 얻는다.

$$P_i = K_w^e W_i \dots \dots \dots (4)$$

$$\text{단 } K_w^e = \int_A N^T k N dA$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k N^T N \det J d\xi d\eta ; \text{地盤剛度行列}$$

$$\text{단 } N = [N_1, N_2, \dots, N_8]$$

이경우 地盤의 剛度行列  $K_w^e$ 는 節點間의 相互作用이 없기 때문에 全體剛度行列의 對角線上要素에 重疊되게된다.

### 4. 컴퓨터 프로그램

본 論文에서 使用된 프로그램은 1개의 주프로그램과 19개의 부프로그램으로 構成되어 있으며 그의 흐름도는 Fig. 5와 같다.

### III. 數值例 및 考察

앞에서 說明한 모델 및 프로그램을 使用하여 Fig. 6과 같은 矩形板(6m\*6m)이 Winkler 地盤上에 놓인 경우를 解析하였으며 이때 使用된 材料係數는 다음과 같다.

콘크리트板 :

$$E_c = 240000 \text{ kg/cm}^2 \quad ; \text{彈性係數}$$

$$v_c = 0.17 \quad ; \text{poisson比}$$

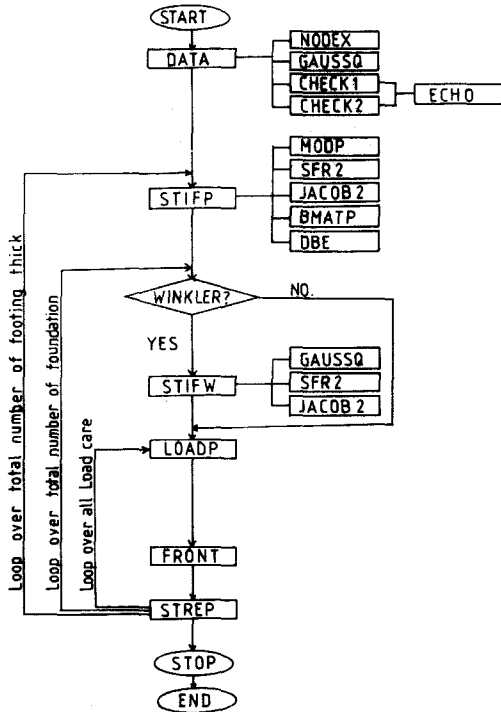


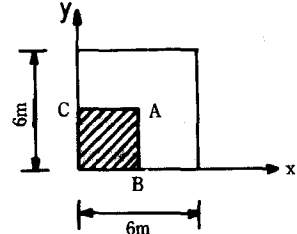
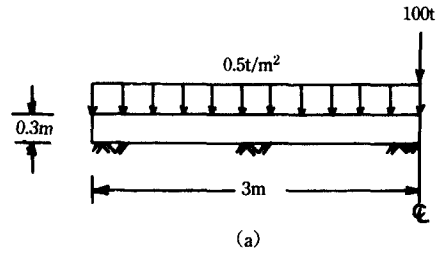
Fig. 5. Computer program flow chart

$t=20, 30, 50, 100$  및  $150\text{cm}$  ; 板의 두께  
 $\rho=2500\text{kg/m}^3$  ; 콘크리트 自重  
 地盤條件 :

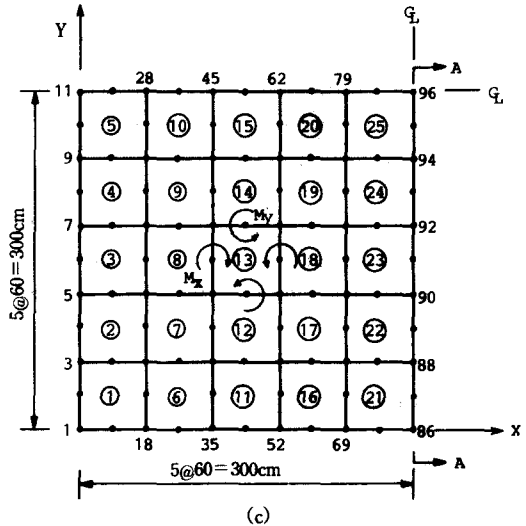
$K=4, 15, 25$  및  $100\text{kg/cm}^2/\text{cm}$  ; 地盤 支  
 持力 係數

물론 여기서 사용된 矩形板의 두께  $100\text{cm}$  및  $150\text{cm}$ 는 實際的인 設計值數는 아니지만 地盤上의 板이 無限한 剛性을 갖는 경우 慣行的인 設計方法의 妥當性을 檢證하기 위해서 취해졌으며 地盤의 支持力係數  $100\text{kg/cm}^2/\text{cm}$  역시 剛體에 가까운 즉 岩盤과 같은 경우를 考察하기 위한 것이다. 萬一 適當한 境界條件만 導入되면 板의  $1/4$ 만을 解析하여도 된다. 여기서 解析된 모든 結果와 慣行的인 設計方法-反力이 地盤變位와 無關하게 均等하게 分布한다는 假定-의 結果值와 比較하므로써 慣行的인 方法의 適用性이 檢討되었다.

板의 中央斷面(section A-B)에서의 모멘트



(b)



(c)

Fig. 6. Rectangular plate on an Winkler foundation

變化를 矩形板 두께별로 圖示하면 Fig. 7~16과 같다. 그림에서 보는 바와같이 板의 두께가 얇은 경우 慣行的 解析方法과의 差異는 심하게 나타나고 있으며 특히 地盤의 支持力 係數가 클수록 慣行的 解析方法에 의한 解析結果의 誤差는 크게 나타나고 있음을 알 수 있다. 慣行的 解析方法에 의한 結果는 實際보다 크게 評價되고 있음을 알 수 있으며 板에 作用되고 있는 모멘트는 板이

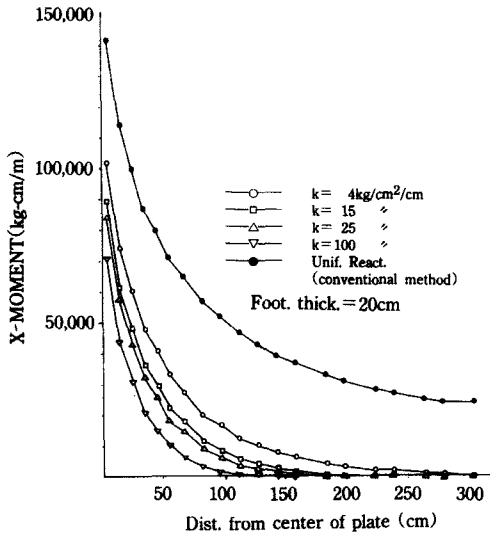


Fig. 7. X-Moment of footing thickness 20cm

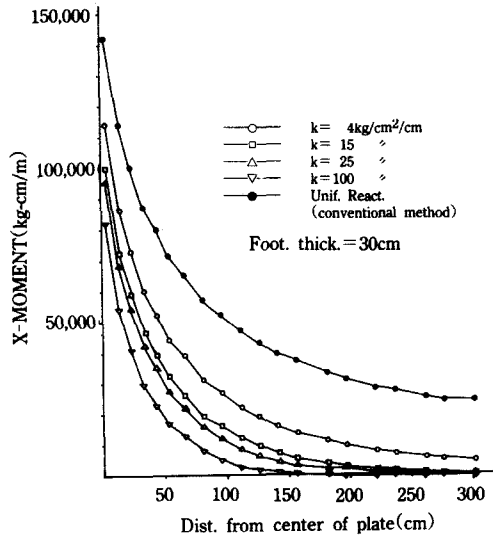


Fig. 9. X-Moment of footing thickness 30cm

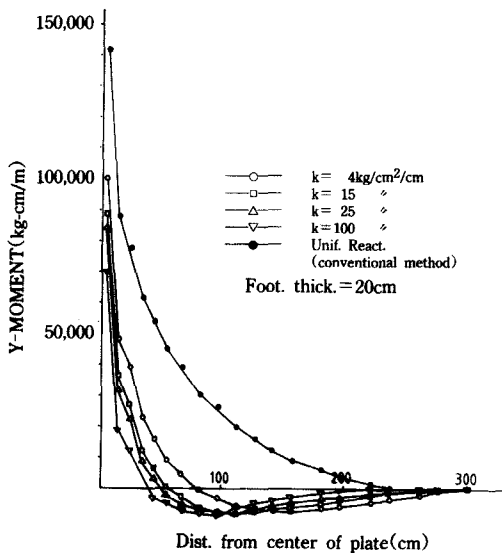


Fig. 8. Y-Moment of footing thickness 20cm

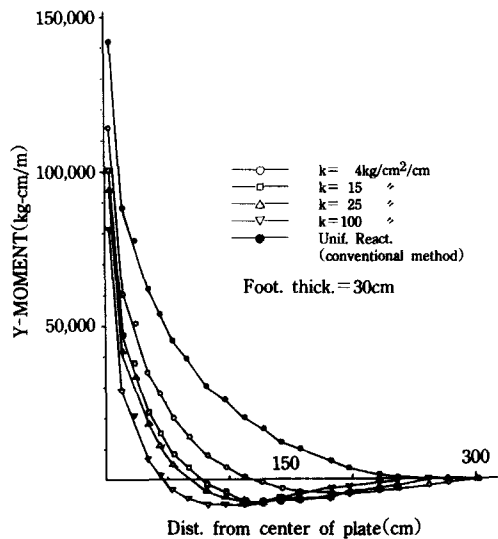


Fig. 10. Y-Moment of footing thickness 30 cm

堅固한 地盤 위에 놓일수록 작아지는 것을 알 수 있으며 載荷點 附近 領域에만 모멘트가 發生되고 있다. 즉 載荷點에서 멀리 떨어진 곳에는 모멘트가 발생하지 않는 傾向이 地盤이 堅固할수록 심하게 나타나고 있다. 특히 X-모멘트의 경우 板의 緣端에는 實際로 거의 모멘트가 作用되지

않는데 慣行的 解析方法에 의하면 상당한 크기의 모멘트가 作用되고 있는 것으로 算出되었다. 板의 두께가 두꺼워짐에 따라 慣行的 解析方法에 의한 解析結果의 誤差는 漸次로 減少되고 있음을 볼 수 있으며 두께 150cm의 경우에는 相互作用을 고려하는 경우와 거의 一致하는 것을 알 수 있다.

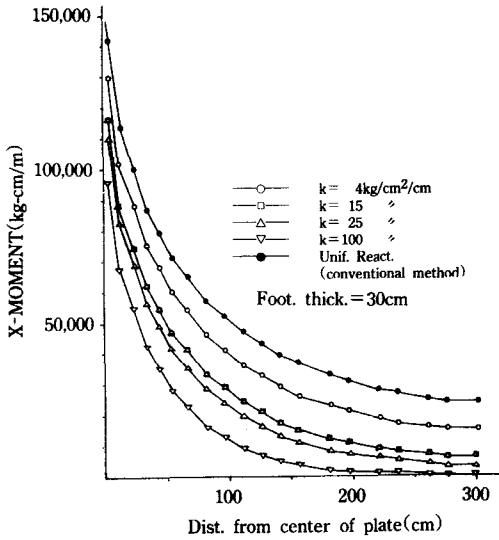


Fig. 11. X-Moment of footing thickness 50 cm

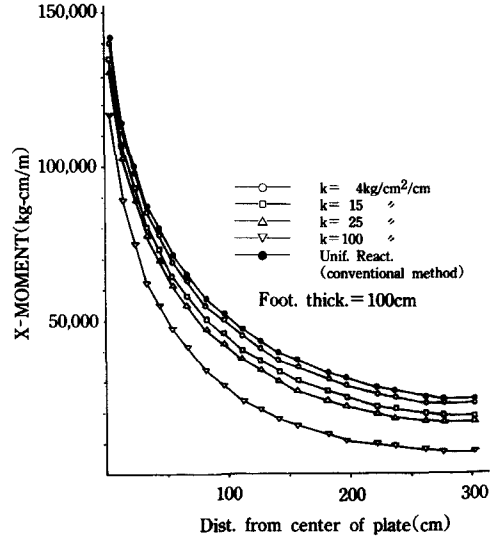


Fig. 13. X-Moment of footing thickness 100 cm

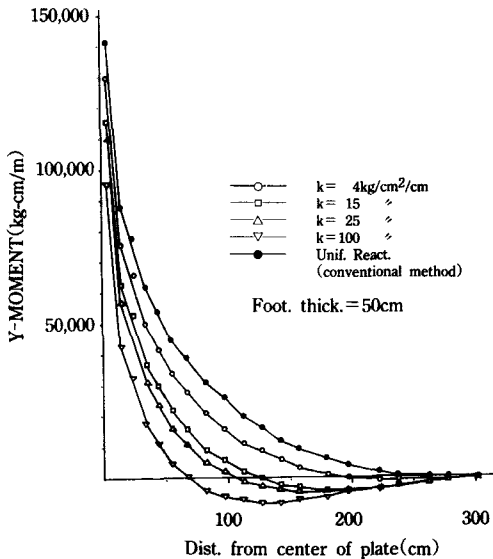


Fig. 12. Y-Moment of footing thickness 50 cm

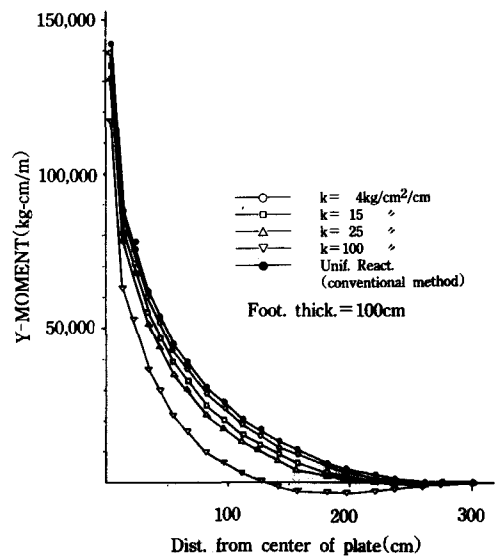


Fig. 14. Y-Moment of footing thickness 100 cm

이러한 결과는 文獻<sup>9)</sup>의 결과와 잘 일치되고 있다. 보 이론에 의한 결과와의 비교 圖示는 省略하였지만 實際로 보 이론에 의한 값은 훨씬 더 큰 값이 算出되는 것은 쉽게 알 수 있다.

좀 더 確實하게 알아보기 위하여 板의 中央

에서의 모멘트(X-모멘트와 Y-모멘트가 同一)를 慣行的 解析方法에 대한 百分率로 나타내면 Fig. 17과 같다.

板의 두께가 얇을수록 慣行的 解析方法에 의한 결과는 誤差가 심하게 나타나고 있음을 더 確

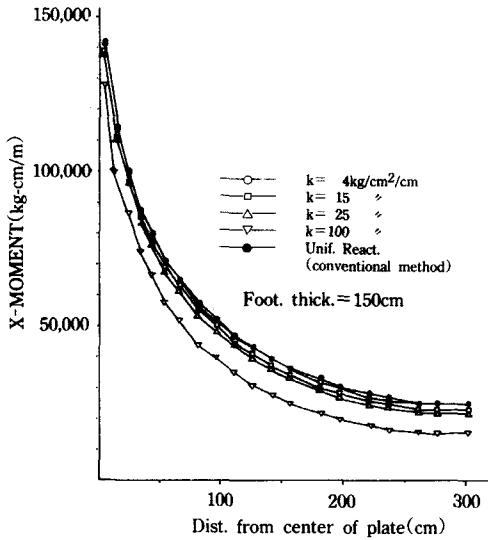


Fig. 15. X-Moment of footing thickness 150 cm

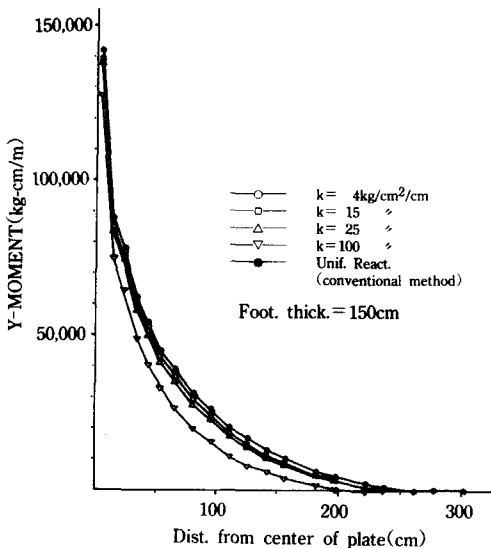


Fig. 16. Y-Moment of footing thickness 150 cm

實하게 알 수 있다. 즉 地盤의 影響이 큰 것을 알 수 있다. 만일 板의 두께가 150cm 정도로 되면 地盤의 影響은 無視될 수 있다고 할 수 있다. 다시 말하면 相互作用을 無視하고 慣行的 解析方法에 의하더라도 約 10 퍼센트 誤差 範圍 내

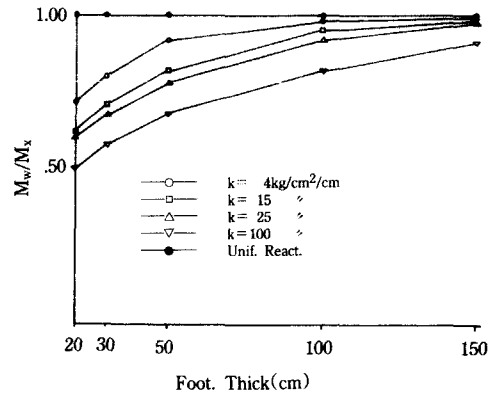


Fig. 17. Comparison of Winklers results vs. Conventional results

에서 算出될 수 있다.

#### IV. 結 論

본 論文은 Winkler 地盤上에 놓인 矩形板의 力學的인 舉動이 板과 地盤의 相對剛性에 따라 어떻게 달라지는가를 數值的으로 究明하고 同時에 慣行的인 解析方法의 適用性을 알아보는데 그 目的이 있다. 이를 위하여 矩形板의 두께를 20, 30, 50, 100 및 150cm로 變化시켰으며 地盤의 支持力係數를 4, 15, 25 및 100kg/cm<sup>2</sup>/cm로 하였다. 이러한 解析結果들로부터 다음과 같은 몇가지 結論을 얻을 수 있었다.

1. 板의 두께가 얇을수록 地盤의 影響이 크게 나타났다.
2. 地盤이 堅固할수록 板에 發生하는 굽힘모멘트는 載荷點附近 領域에 局限되었다.
3. 地盤이 剛體와 같은 岩盤일 경우에도 慣行的 解析方法에 의한 結果는 誤差가 큰 것으로 나타났다.

4. 地盤剛性에 比해서 板의 剛性이 클수록 慣行的 解析方法의 適用性은 良好하였다.

5. 地盤上에 놓인 板이 無限한 剛性을 갖는 경우에는 地盤과 板 사이의 相互作用은 無視될 수 있으며 따라서 慣行的 解析方法이 適用可能할

것으로 判明되었다. 본 論文에서의 경우 板의 두께가 100cm 以上일 경우 慣行的 解析方法的 適用성이 認定되었지만 이러한 값은 實際設計 值數와는 상당한 거리가 있다고 할 수 있다.

이상의 結果를 綜合할 때 彈性地盤상의 板의 解析에 있어서 地盤-板의 相互作用이 考慮되어야 할 것이며 또한 地盤의 支持力係數에 따라서 板에 發生하는 모멘트는 크게 影響을 받으므로 地盤의 支持力係數는 신중하게 決定되어야 할 것으로 思料된다.

### 參 考 文 獻

1. Bela Goschy, 'soil-foundation-structure interaction', journal of the structural div., A. S. C. E., Vol. 14, No. ST. 5, May, 1978, pp : 749-766.
2. Cheng Y. K. and Zienkiewics O. C., 'plates and tanks on elastic foundation-application of F. E. M.-', Int. j. solids structures, 1965, vol. 1 pp : 451-461.
3. Hinton and D. R. J. Owen 'finite element programming', Academic Press Inc. Ltd. 1977.
4. John Duncan Davis, 'The influence of support conditions on the behaviour of cylindrical concrete tanks', Proc. of The institution of civil engineers, 1962, pp : 379-388.
5. Richard Bolton, 'stresses in circular plates on elastic foundation', Journal of the engineering mechanics div., A. S. C. E., Vol. 98 No. EM3, june, 1972, pp : 629-640.
6. 조 진구, 조 현영, '지반과 구조물 사이의 상호작용을 고려한 농업용 사이로의 해석에 관한 연구(1)', 한국농공학회지 제27권 제3호, 1985, pp : 38-46.
7. \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, '\_\_\_\_\_ (2)', \_\_\_\_\_ 제27권 제3호, 1985, pp : 97-108.
8. \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, '\_\_\_\_\_ (3)', \_\_\_\_\_ 제29권 제2호, 1987, pp : 51-64.
9. \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, '\_\_\_\_\_ (4)', \_\_\_\_\_ 제30권 제2호, 1988, pp : 32-42.