

反復荷重을 받는 흙의 構成關係式 開發

Development of Constitutive Equation for Soils Under Cyclic Loading Conditions

張 秉 郁* · 宋 昌 燮**
Chang, Pyoung Wuck · Song, Chang Seob

Summary

Various soil behaviors usually occurring in the geotechnical problems, such as, cutting and embankments, stability of slope, seepage, consolidations, shearing failures and liquefaction, should be predicted and analyzed in any way. An approach of these predictions may be followed by the development of the constitutive equations at first and subsequently solved by numerical methods.

The purpose of this paper is to develop the constitutive equation of sands under monotonic or cyclic loadings. The constitutive equation which is based on elasto-plastic theory, modified anisotropic consolidated stress parameter by Sekiguchi et al and Pender's theory is derived. And the equation is included a new stress parameter, hardening function, Bauschinger's effects and Pender's theory.

The model is later evaluated and confirmed the validity by the test data of Ottawa sand, Banwol sand Hongseong sand.

The following conclusions may be drawn :

1. The constitutive equation which is based on elasto-plastic theory, modified anisotropic consolidated stress parameter by Sekiguchi et al and Pender's theory is derived. The equation is included a new stress parameter, hardening function, Bauschinger's effect and Pender's theory.

2. For Ottawa sand, the result of the constitutive equation shows a better agreement than that of Oka et al. The result of axial strain agrees well with the tested data. However,

* 서울대학교 農業生命科學大學

** 서울대학교 大學院

키워드 : 反復荷重, 構成關係式, 彈·塑性理論, 非
等方壓密應力係數, 硬化函數, 바우징거
효과

the result of horizontal strain is little bit off for the cyclic loadings or large stress. It is thought that the deviation may be improved by considering Poisson's ratio and precise measurement of shear modulus.

3. Banwol sand is used for the strain and stress tests with different relative densities and confining pressures. The predicted result shows a good agreement with the tested data because the required material parameters were directly measured and determined from this laboratory.

4. For Hongseong sand, the tests under same amplitude of cyclic deviatoric stress shows a similar result with the tested data in absolute strain. It shows the acute shape of turning point because the sine wave of input is used in the test but the serrated wave in prediction.

I. 緒 論

最近 컴퓨터의 發達과 더불어 土質工學에서는 有限要素法으로 대표되는 數值解析 方法이 크게 이용되고 있고, 이 중 흙의 構成式을 적용한 境界值 問題의 解析이 활발하여 土質力學의 理論化가 많은 발전을 하게 되었다. 信賴度가 높은 構成式을 開發하여 盛土나 掘鑿, 斜面安定, 浸透水量, 壓密, 剪斷破壞, 液狀化 등의 地震現像 등, 여러가지 흙의 舉動을 사전에 豫測하고 이에 대비한다는 것은 土質工學에서 대단히 중요한 부분이다. 따라서 實驗室 또는 現場에서의 實測值를 이용하고 模擬發生技法을 이용하여 보다 信賴度 높은 構成式을 開發하기 위하여는 地盤을 모델화하고 적당한 解析方法을 선택하여야 한다.

지금까지 많은 構成式이 제안되어 왔으나 흙의 性質은 彈性, 塑性, 彈塑性 등 어느 한 재료로 표현할 수 있는 재료가 아니며, 더우기 하나의 方程式에 의해 흙 材料의 舉動을 대표할 수 없다. 따라서 대부분의 構成式들은 이러한 복잡한 흙의 性質을 理想化하여 特殊目的에 따라 開發된 近似式을 構成式으로 채택하고 있는 형편이다. 이 중에서도 地震의 影響에 의해 발생 가능한 液狀化 現像 또는 反復荷重에 의한 흙의 舉動을 모델화한 研究는 부진한 狀態이다.

본 研究는 土質工學의 理論化 및 數值解析 解析法의 應用性에 그 目的을 두어, 單純荷重, 反復荷重을 받는 모래의 構成式을 開發하여 흙의 舉動을 精確하게 豫測하고 實測值와 비교하여 適用性을 검토하므로써, 耐震 設計 및 施工의 基礎資料로서 提供할 수 있게 함이다.

II. 構成式의 誘導

物體는 外力을 받아 變形이 순간적으로 생기고 外力을 제거하면 원래의 상태로 되돌아가는 彈性的 應答과 동시에 정도의 차이는 있지만 外力을 제거했다라도 殘留變形이 있게 된다. 이것을 増分理論에 의하여 總 變形率 増分은 彈性變形率 増分과 塑性變形率 増分の 總합으로 나타낼 수 있다.

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \dots\dots\dots(1)$$

여기서, $d\epsilon_{ij}$: 총 變形率 増分
 $d\epsilon_{ij}^e$: 彈性變形率 増分
 $d\epsilon_{ij}^p$: 塑性變形率 増分

1. 彈性變形에 관한 構成式

彈性變形에 대한 應力-變形率 關係는 彈性 理論에 의해서 다음과 같이 유도된다.

$$d\epsilon_{ij}^e = \frac{dS_{ij}}{2G} + \frac{dI_1}{9K} \cdot \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots(2)$$

여기서, $d\epsilon_{ij}^e$: 彈性 變形率 増分
 dS_{ij} : 偏差應力 増分
 K : 體彈性係數
 G : 剪斷彈性係數
 dI_1 : 제1차 不變量 増分

2. 塑性變形에 관한 構成式的 誘導

흙은 과거에 받은 荷重의 履歷에 따라서 應力-變形率 關係가 달라지게 된다. Oka¹⁰⁾ 등은 過壓密과 正規壓密을 區分하게 되는데 境界를 다음 식으로 나타내고 있다. 즉,

$$f_b = \eta^*_{(0)} + M_m^* \cdot \ln\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{me}}\right) \quad \dots\dots\dots(3)$$

여기서, σ_m : 平均有效應力
 σ_{me} : 先行壓密應力

$\eta = \sqrt{\eta_{ij} \cdot \eta_{ij}}$: 非等方壓密 狀態의 應力變數

$$\eta^*_{(0)} = \sqrt{(\eta_{ij} - \eta_{ij(0)}) \cdot (\eta_{ij} - \eta_{ij(0)})}$$

M_m^* : 最大 壓縮시의 η 값

$$\eta_{ij} = S_{ij}/\sigma_m$$

$\eta_{ij(0)} = (S_{ij}/\sigma_m)_{(0)}$
 : 非等方壓密 終了시 η_{ij} 값

S_{ij} : 偏差應力 텐서

彈性領域이 없는 경우 Hill⁴⁾의 非關聯 流動則을 적용하면 塑性變形 増分은 다음 식과 같다.

$$d\epsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} \cdot df \quad \dots\dots\dots(4)$$

여기서, f_p : 塑性 포텐셜 函數
 f : 塑性 降伏函數
 Λ : 陽의 比例常數 ($\Lambda > 0$)

塑性 포텐셜 函數는 Oka¹⁰⁾ 등에 따르면 다음과 같이 정의된다.

$$f_p = \eta^* + M^* \cdot \ln(\sigma_m/\sigma_{m(n)}) = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

여기서, $\eta_{ij(n)}$ 과 $\sigma_{m(n)}$ 은 η_{ij} 와 σ_m 의 n 번째 應力의 方向이 변하는 점에서의 값이다. η^* 는 應力變數이며, Sekiguchi & Ohta¹⁴⁾ 등이 定義한 것과 같으며 다음 식으로 나타난다.

$$\eta^* = \sqrt{(\eta_{ij} - \eta_{ij(n)}) \cdot (\eta_{ij} - \eta_{ij(n)})} \quad \dots\dots\dots(6)$$

또한, M^* 는 다음과 같이 정의된다.

$$M^* = \frac{\eta}{\ln(\sigma_m/\sigma_{me})} \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$\sigma_{me} = \sigma_m \cdot \exp(\eta/M_m^*)$$

따라서, 현재의 應力狀態(S_{ij} , σ_m)이 결정되면 M^* 를 알 수 있게 된다.

降伏函數는 非關聯 流動則을 적용하여 다음과 같이 정의한다.

$$f = \eta^* \quad \dots\dots\dots(8)$$

Fig. 1은 塑性 포텐셜 曲線 $f_p=0$ 와 塑性 降伏線 $f=\eta^*$ 인 경우의 圖式的인 그림이다. 그림에서 P_n 은 塑性 포텐셜 曲線(Plastic potential curve) f_p 와 塑性 降伏線(Plastic yield line) f 가 통과하는 현재의 應力狀態를 나타내는 점이다. M_f 는 破壞線, M^* 은 最大 壓縮시의 應力比를 나타내는 선이다. M^* -선은 材料가 最大 壓縮을 일으킬 때의 應力比에 해당하는 일정한 應力線이다. 境界面의 内部에서 즉, 過壓密 狀

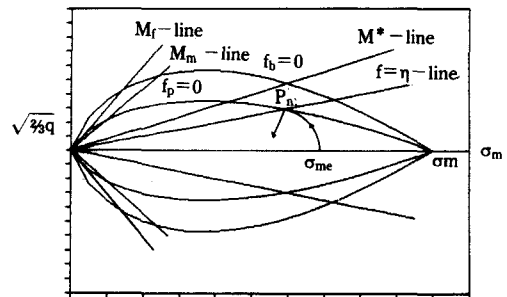


Fig. 1. Schematic diagram of the potential surface and yield line

態에서는 M^* 가 M_m 에 도달하면 $M^* = M_m$ 의 값을 유지하게 된다. 모래의 경우 $M^* = M_m$ 의 관계는 항상 유지되는 것으로 하면, 이 경우의構成式은 Nishi와 Esashi⁹⁾의 모델과 같은 경우가 된다.

硬化函數를 구하기 위하여 應力-硬化係數 (Strain-hardening parameter, γ^*)를 도입하면 다음과 같다.

$$\gamma^* = \sqrt{e_{ij}^p \cdot e_{ij}^p} \dots\dots\dots(9)$$

여기서, e_{ij}^p : 塑性 偏差 變形率 成分

應力과 變形的 雙曲線 關係는 Duncan & Chang²⁾, Kondor⁷⁾, Hardin & Drnevich³⁾ 등에 의하여 사용되어 왔다. 그러나, 反復 시의 應力-變形 關係는 제대로 설명할 수가 없다. 따라서, 본 研究에서는 다음 식과 같이 應力係數 (Stress parameter, η^*)와 應力-硬化係數 (Strain-hardening parameter, γ^*)의 關係를 도입하며, 이 關係를 그림으로 도시하면 Fig. 2와 같다.

$$\gamma^* = \frac{M_f + \eta_{max}}{G'} \cdot \frac{\eta - \eta_n}{(M_f + \eta_{max}) - R \cdot (\eta - \eta_n) \cdot (-1)^n} + \gamma_n^* \dots\dots\dots(10)$$

여기서, M_f : 破壞시의 η 의 값
 G' : $n - \gamma^*$ 曲線에서의 初期 接線 係數

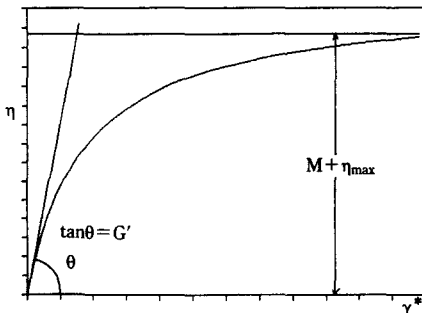


Fig. 2. Hyperbolic representation of strain-hardening parameter

- η_n : 變化點에서의 η 의 값
- η_{max} : n 번째 反復시의 最大 η 값
- γ_n^* : 變化點에서의 γ^* 값
- n : 變化點의 數
- R : 바우징거 效果를 고려한 常數

그런데, 식(4)의 塑性 變形量 增分($d\epsilon_{ij}^p$)은 塑性 偏差 變形率 增分($d\epsilon_{ij}^p$)와 塑性 體積變形率 增分($d\epsilon_{kk}^p$)으로 構成되어 있으므로 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$d\epsilon_{ij}^p = d\epsilon_{ij}^p + \frac{1}{3} \cdot d\epsilon_{kk}^p \cdot \delta_{ij} \dots\dots\dots(11)$$

또한, 塑性 포텐셜 函數 f_p 는 σ_m 과 S_{ij} 의 函數이므로 Chain 법칙에 의하여 다음과 같이 바꾸어 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_m} \cdot \frac{1}{3} \cdot \delta_{ij} + \frac{\partial f_p}{\partial S_{ij}} \dots\dots\dots(12)$$

따라서, 식(4), 식(5), 식(9), 식(10), 식(11), 식(12)으로부터 Λ 를 구하면

$$\Lambda = \frac{1}{G'} \cdot \frac{(M_f + \eta_n)^2}{(M_f + \eta_n - R \cdot (\eta - \eta_n))^2} \cdot \frac{\gamma^*}{e_{ij}^p} \cdot \frac{\eta \cdot \sigma_m}{\eta_{ij} - \eta_{ij}(n)} \cdot \frac{d\eta}{df} \dots\dots\dots(13)$$

그러므로, 식(13)을 代入하여 각 塑性變形成分 增分을 계산하면

$$d\epsilon_{kk}^p = \Lambda \cdot \left\{ \frac{M^*}{\sigma_m} - \frac{S_{k1}}{\eta \cdot \sigma_m^2} \cdot (\eta_{k1} - \eta_{kl}(n)) \right\} \cdot df \dots\dots\dots(14)$$

$$d\epsilon_{ij}^p = \Lambda \cdot \frac{\eta_{ij} - \eta_{ij}(n)}{\eta \cdot \sigma_m} \cdot df \dots\dots\dots(15)$$

식(14)과 식(15)을 식(11)에 代入하면 總 塑性 變形量 增分($d\epsilon_{ij}^p$)을 구할 수 있다.

$$de_{ij}^p = \Lambda \cdot \left\{ \frac{\eta_{ij} - \eta_{ij(n)}}{\eta \cdot \sigma_m} + \frac{M^*}{3\sigma_m} - \frac{S_{kl}}{3\eta \cdot \sigma_m^2} \cdot (\eta_{kl} - \eta_{kl(n)}) \right\} \cdot df \quad \dots\dots\dots(16)$$

따라서, 식(2)의 彈性變形量(de_{ij}^p)를 고려하여 構成式을 나타내면 다음과 같다.

$$de_{ij} = \frac{dS_{ij}}{2 \cdot G} + \frac{dI_1}{9 \cdot K} \cdot \delta_{ij} + \Lambda \cdot \left\{ \frac{\eta_{ij} - \eta_{ij(n)}}{\eta \cdot \sigma_m} + \frac{M^*}{3\sigma_m} - \frac{S_{kl}}{3\eta \cdot \sigma_m^2} \cdot (\eta_{kl} - \eta_{kl(n)}) \right\} \cdot df \quad \dots\dots\dots(17)$$

III. 프로그램의 構成

본 프로그램은 기 誘導된 構成式에 의하여 주어진 應力에 따라 변하는 變形率을 계산하기 위한 것으로서 斜面의 安定, 沈下, 壓密度 등을 推定하기 위해서는 약간의 修正을 하여야 한다. 흐름도는 Fig. 3과 같다.

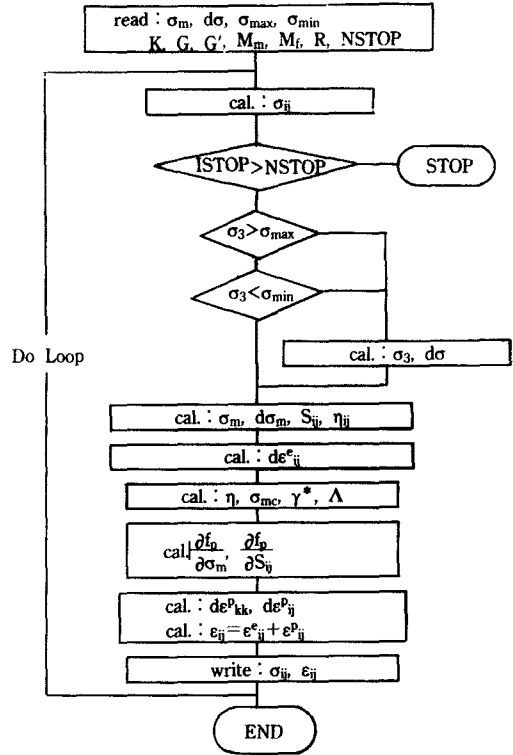


Fig. 3. Flow chart

Table-1. 모래의 物理的 性質

	Ottawa sand	Banwol sand	Hongseong sand*
G _s	2.67	2.64	2.67
C _v	2.10	1.84	3.40
e _{max}	0.82	0.80	1.48
e _{min}	0.54	0.68	0.81
Avg.grain size	0.40	0.45	0.29
USCS	SP	SP	SW-SM

*洪城모래는 1978년 10월 7일 발생한 洪城地震 地域에서 채취한 것임.

Table-2. 각 試料의 材料常數

Sample	Dr	K	G	G'	M _m	M _f	R	σ _c	σ _{max}	σ _{min}
Ottawa	-	11000	2100	750	0.96	1.55	1.07	10 ^{psi}	50	10
Banwol sand	20	300	350	620	0.95	1.26	1.75	1.20	4.62	1.20
	40	400	400	750	0.98	1.32	1.79	0.80	3.23	0.80
	60	550	500	800	0.99	1.37	1.60	0.80	3.66	0.80
	80	850	650	900	1.16	1.42	1.65	1.20	5.21	1.20
Hongseong	58	550	180	1500	0.80	1.80	1.00	1.00	0.75	0.25

IV. 實驗値와의 比較 및 考察

본 研究에서는 Ottawa 모래, 半月地域 모래, 洪城의 모래의 試驗 結果를 中心으로 살펴보고자 한다. 分析에 사용된 각 모래의 物理的 性質은 Table-1, 材料常數는 Table-2와 같으며, 粒度曲線은 Fig. 4에 나타나 있다.

1. Ottawa 모래

본 研究에 사용된 資料는 ASCE의 Workshop⁶⁾에서 다루어진 資料를 사용하였으며, 모래의 프로그램에 사용된 入力常數는 Table-2와 같으며, 應力 増分法에 따라 應力의 増分은 0.05 psi씩 증가시키면서 計算을 한 結果를 Fig. 5에 나타나 있다.

Fig. 6은 본 研究의 結果와 比較하기 위하여

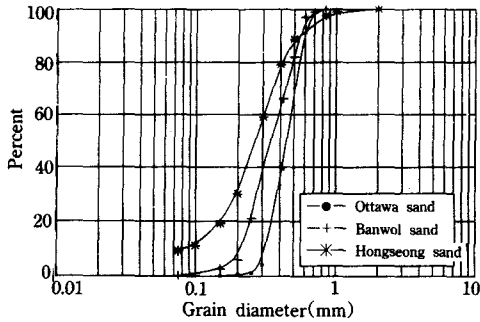


Fig. 4. Grain size distribution

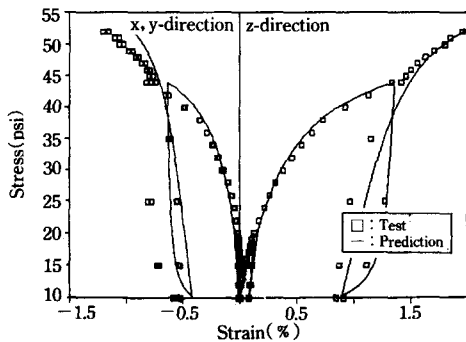


Fig. 5. Stress-strain relationships of prediction and test result for Ottawa sand

Oka⁶⁾ 등에 의해 誘導된 構成式을 利用하여 計算한 結果를 引用한 것으로, Fig. 5와 Fig. 6을 比較하면 Oka⁶⁾ 등의 結果는 初期 部分에서는 比較적 試驗値와 비슷하지만 應力이 증가함에 따라 상당히 큰 차이를 보이는 반면, 본 研究의 結果는 實驗 結果와 일치함을 알 수 있다. 그러나, 應力이 破壞點 가까워지면 x,y 方向의 變形率은 실제의 결과보다 더 크게 나타나는데 이는 포아슨 比를 고려하면 實測値에 近접한 結果를 얻을 수 있으리라 사료된다.

2. 半月地域 모래

半月地域의 모래는 본 研究室에서 시험한 結果¹⁶⁾ 앞에서 유도된 構成式을 적용한 것이다. 資料는 相對密度와 拘束壓을 달리했을 때의 結果를 사용했으며, 材料常數는 Table 2에 주어진 것과 같고, 適用結果는 Fig. 7 ($D_r=40\%$)에 나타나 있다.

3. 洪城모래

洪城地域의 모래는 1978년 洪城地震시 주요 被害地域인 洪城邑 내의 심도 6m에서 채취한 것으로 試驗資料는 都 등¹⁵⁾의 試驗結果를 이용하였다. 適用結果는 Fig. 8에 나타나 있다. Fig. 8은 時間에 따른 軸應力의 變化를 나타내고

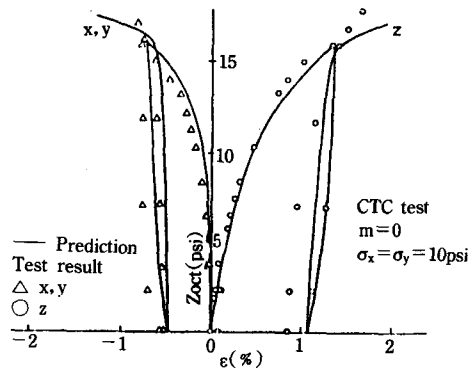


Fig. 6. Stress-strain relationships of prediction and test result for Ottawa sand (by Oka et al, 1980)

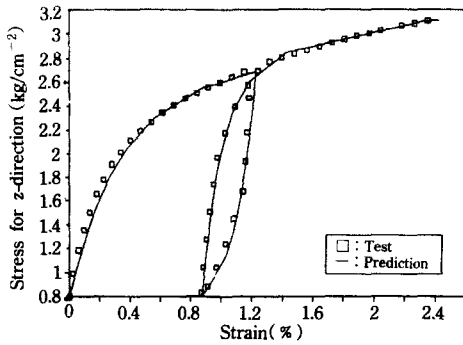


Fig. 7. Stress-strain relationships of prediction and test result for Banwol sand ($D_r=40\%$)

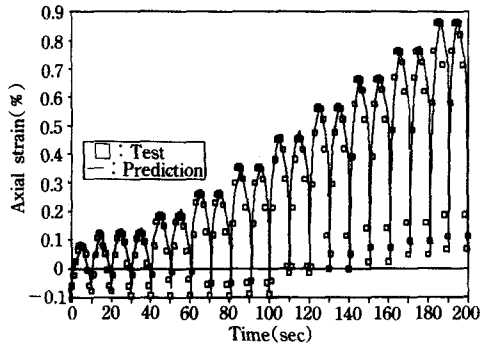


Fig. 8. Strain-time relationships of prediction and test result for Hongseong sand

있다. Fig. 8에서 荷重의 方向이 바뀔때 나타나는 銳角形態의 變形率은 實荷重은 사인파형을 가진 應力이 주어졌으나 본 研究에서는 直線의 應力으로 변하는 톱니파형의 應力으로 대치하여 適用하였으므로 이러한 結果를 나타낸 것으로 思料된다.

V. 結 論

1. 構成關係式의 誘導는 彈·塑性 理論에 바탕을 두고 Sekiguchi 등의 非等方壓密 應力變數와 Pender의 理論을 修正하여, 새로운 應力變數, 硬化函數와 bauer장거 效果를 고려한

變數를 導入하여 誘導하였다.

2. Ottawa 모래에 대한 適用 結果, Oka 등의 結果 보다 훨씬 實測值에 가까웠으며, 軸方向의 變形은 거의 實測值에 近接하게 나타났으나 橫方向의 變形은 反復 시나 큰 應力에서는 다소 實測值에 벗어나는 結果를 보였는데 이는 포아슨 比에 대한 고려와 剪斷彈性係數의 精確한 測定으로 補完될 수 있을 것으로 思料된다.

3. 半月地域의 모래는 相對密度와 拘束壓을 달리 하였을 때의 軸應力과 軸方向 變形에 대하여 適用하였는데 각각의 경우 모두 實測值에 近接하게 나타났는데 이는 본 研究室에 材料常數를 決定하는 試驗을 行하여 보다 精確한 豫測이 가능했다.

4. 洪城地域의 모래는 같은 크기의 軸差應力을 反復하여 계속 作用시킬 때 發生하는 軸變形에 대해 적용하였는데 變形의 絕對量은 試驗值과 거의 類似하였다. 그러나, 反復시 나타나는 銳角形態는 적용한 應力의 形態가 試驗에서는 사인파형을 가졌으나 본 研究에서는 톱니파형을 적용한 結果로 思料된다.

본 研究는 '90년도 教育部 學術振興財團의 研究費 支援에 의하여 遂行된 것으로 이에 깊은 感謝를 표한다.

參 考 文 獻

1. Baladi, G. Y. and B. Rohani, 1979, Elasto-plastic model for saturated sand, J. Geotech. Eng. Div., ASCE, No. GT4, pp. 465-480.
2. Duncan, J. M & C. Y. Chang, 1970, Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils, J. Geotech. Eng. Div., ASCE, Vol. 96, No. SM5, pp. 1629-1653.
3. Hardin, B. O & V. P. Drnevich, 1972, Shear Modulus and Damping in Soils: Design Equations and Curves, J. Geotech. Eng. Div.,

- ASCE, Vol. 98, No. SM7, pp. 667-692.
4. Hill, R., 1950, The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford At The Clarendon Press.
 5. Ichikawa t. K. & T. Kawamoto, 1988, Incremental theory of elastic and plastic under cyclic loading, Numerical Methods in Geomechanics, pp. 327-333.
 6. Koichi A., T. Adachi & F. Oka, 1980, Constitutive models for clays and sands., Proceedings of the workshop on Limit equilibrium, plasticity and generalized stress-strain in Geotechnical engineering, ASCE, pp. 815-838.
 7. Kondner, R. L. 1963, Hyperbolic Stress-Strain Response ; Cohesive Soils, J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, Vol. 89, No. SM1, pp. 115-143.
 8. Morz Z., V. A. Norris & O. C. Zienkiwicz, 1979, Application of an anisotropic hardening model in the anlysis of elasto-plastic deformation of soils, Geot., Vol. 29, No. 1, pp. 1-34.
 9. Nishi, K & Y. Esashi, 1978, Stress-Strain relation of sand based on elasto-plasticity Theory, Proc. of JSCE. No. 280, Dec., pp. 111-122.
 10. Oka F., 1988, A cyclic viscoplastic constitutive model for clay, Numerical Methods in Geomechanics, pp. 293-297.
 11. Panda, G. N. & O. C. Zienkiewicz, 1982, Soil mechanics-transient and cyclic loads, V. Wiley & Sons.
 12. Pender, M. J., 1982, A model for the cyclic loading of overconsolidated soil, Soil mechanic-transient and cyclic loads, V. Wiley & Sons, pp. 283-311.
 13. Provost, J. H., 1977, Mathematical modeling of monotonic and cyclic undrained clay behavior, Int. J. Anul. Meth.
 14. Sekiguchi, H. & H. Ohta, 1977, Induced anisotropy and time dependency in clays, Proc. Specialty Session 9, 9th ICSMFE, Tokyo, pp. 229-238.
 15. 都德鉉, 張秉郁, 1990, 우리나라 飽和砂質地盤의 液狀化 포텐셜 評價, 大韓土質 工學會誌, 제6권 3호, pp. 41-51.
 16. 宋昌燮, 1990, 砂質土의 排水三軸壓縮試驗에서의 強度特性, 서울大學校 大學院 碩士學位論文, 서울大學校.