

## 1-irregular mesh를 이용한 편미분 방정식의 수렴성에 관한 연구 (A study for pointwise by a 1-irregular mesh)

李 炯, 陳 祺 範  
(崇實大學校)

FEM(Finite Element Method)의 pointwise convergence는 mesh size와 허용오차와의 관계를 분석해 보려는 것이다. 이들 상호 관계에 관한 연구는 FEM에 의한 근사식의 질을 높이는 데 중요한 계기가 되어 결과 예측을 하는데 효과적이다. 본 논문은 1-irregular mesh를 이용한 세분화(refinement)로 미지점(unknown node)의 수를 최소화 하면서 원하는 점에서의 수렴성을 비교 분석하였다.

### ABSTRACT

The pointwise convergence define the relation-ship between the mesh-size and the tolerance. This will play an important role in improving quality of finite element approximate solution. In this paper, We evaluate the convergence on a certain unknown point with a 1-irregular mesh refinement.

This means that the degree of freedom is minimized within a tolerance.

### I. 서론

경계 조건이 복잡한 편미분 방정식의 computer를 이용한 근사해는 FEM(Finite Element Method)이 널리 사용된다.

이 방법은 문제의 영역을 작은 요소(element)로 나누고 주어진 조건을 만족하는 shape function을 이용하여 해에 접근한다.

이때 최적해를 얻기 위하여 요소를 세분하거나 다항식의 최고 차수를 높이는 방법을 사용한다. 요소를 세분화 한다는 것은 mesh size의 크기를 줄이는 것을 의미하며, 이에 따라 영역내부의 미지점(unknown node)의 수가 2-D(dimension)일 경우 기하급수적으로 증가하게 된다.

효과적인 FEM의 개선방법은 해를 얻기 위한 미지점의 수를 최소화하거나 각요소에서의 Shape function의 최고차수를 적절히 높여가면서 주어진 허용오차 범위내에서 근사해를 얻는 방법이다. 이때 증가되는 node수에 따라 상대오차의 관계를 유도한다면 오차의 추정이 예측된다.

일반적으로 mesh size가 줄어들면 오차는 줄어들지만 전체 영역에서의 미지점 수의 증가를 크게 변화하므로 특정점 근방에서만 local refinement에 의하여 근사해를 구하는 경우가 많다.

그러나 본 논문에서는 제한된 범위 내에서 특정점의 근사값을 추정하는 문제에 대해서 1-irregular mesh를 이용하여 미지점의 수를 최소화하면서 수렴성을 좋게하는 pointwise convergence문제를 연구하였다.

II. Pointwise Convergence

Trial solution  $\tilde{U}_n(x,y) = \phi_0(x,y) + \sum_{j=1}^n a_j \phi_j(x,y)$ 에서 pointwise convergence는

$n \rightarrow \infty$ 일때  $|u(x,y) - \tilde{U}_n(x,y)| \rightarrow 0$  이 된다.

이론적으로 FEM의 수렴은 uniform convergence에 의하여 성립되므로 energy error의 추정이 일 반적이다.

그러나 근사해로 이루어진 수열  $\tilde{U}_1(x,y), \tilde{U}_2(x,y), \dots, \tilde{U}_m(x,y), \tilde{U}_n(x,y)$ 에서

$\tilde{U}_1(x,y) = \phi_0(x,y) + \sum_{j=1}^1 a_j \phi_j(x,y), \tilde{U}_n(x,y) = \tilde{U}_1(x,y) + \sum_{j=1+1}^n a_j \phi_j(x,y)$ 라고 할 때

$m, n \rightarrow \infty$ 에서  $|\tilde{U}_m(x,y) - \tilde{U}_n(x,y)| \rightarrow 0$  이 성립한다면,  $\tilde{U}_m(x,y), \tilde{U}_n(x,y)$ 은 극한값을 가질수 있지만  $\tilde{U}_m(x,y) \rightarrow U(x,y)$ 에 수렴한다고 볼 수 없다.

III. A 1-Irregular Mesh

1. Mesh Refinement

FEM에서 새로운 node를 증가시키는 방법으로는

- 1) Grid Refinement
- 2) Mesh Refinement
- 3) Spectral Order Enrichment 의 세가지가 있다.

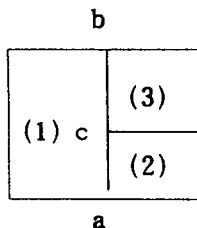
이때 생성되는 한개의 element에서의 수렴성은 Aspect ratio, Skewness, Taper의 상태에 따라 영향을 받는다.

또한 전체 영역에서는 각 element간의 node의 위치 및 mesh size크기에 따라 차이가 난다.

이를 요소간 continuity를 고려한 mesh refinement는 다음과 같이 구분할 수 있다.

- a) Regular mesh refinement
- b) Irregular mesh refinement
- c) 1-Irregular mesh refinement

이들 중 node를 하나씩 증가시키며 mesh refinement를 하는 1-Irregular mesh refinement는 (fig. 1)과 같다.



(fig.1) 1-irregular mesh refinement

여기에서 가장 크게 문제시 되는 것은 각 element들 간의 연속성이다. (그림 1)에서 element(1)과 element(2), element(3)과는 경계선에서 연속이 되어야 한다. 그러나 각 element에서 얻어진 shape function의 차수가 서로 다를 경우에는 연속성이 없기 때문에 이 때에는 hlerarchical shape function을 이용하요 연속되게 만들어 준다. [5] 예를 들어 1-dimension에서 shape function의 차수가 p일때까지 찾아보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 N_0(x) &= 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\
 N_0(x) &= x, & 0 \leq x \leq 1 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 N_p(x) &= 1-(2x-1)^p, & P : \text{even} \\
 &= (2x-1)^p - (2x-1), & P : \text{odd}
 \end{aligned}$$

이것을 2-dimension 으로 확장하여 tensor product를 사용하면

$$N_p(x,y) = N_p(x) \cdot N_p(y), \quad 0 \leq x, y \leq 1 \text{ 이 된다. [2]}$$

만일 shape function의 차수가 element (1)에서는 3차이고 element (2)에서는 2차, element (3)에는 p=3 인 다항식이 더해져야 하고, element (3)에는 p=2, p=3 인 다항식이 더해져야 한다.

## 2. 잔류치 기법

잔류치 기법은 잔류함수를 정의하고, 그 함수에 근사함수를 대입시켜 그 적분이 0에 근사시키는 방법이나, 하나의 잔류함수에서 유한(n개)의 미지함수를 구할 수 없으므로, 서로 다른 n개의 무계함수와 잔류함수의 1차 결합으로 연립방정식을 형성하고, 이 연립방정식의 해를 구하면 n개의 미지함수 해가 된다.

잔류치 기법에는 무계함수의 선정방법에 따라 Galerkin법, 최소제곱법, 선점법(collocation method), 선구간법(subdomain method)등 4가지 종류가 있으나, 가중함수와 형상함수(기저함수)를 동일하게하므로 수치계산을 간편하게 처리할 수 있는 Galerkin법을 주로 활용하고 있다.

일반적으로 두 변수를 포함하는 2계의 편미분방정식의 일반적인 형태는 다음 식과 같다.

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_x(x,y) \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha_y(x,y) \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \right) + \beta(x,y)U(x,y) = f(x,y) \quad (2-1)$$

여기서  $U(x,y)$  는 미지함수이며  $\alpha_x(x,y)$ ,  $\alpha_y(x,y)$ ,  $\beta_x(x,y)$  및  $f(x,y)$ 는  $x, y$ 에 대한 기지함수이다.

식 (2-1)에 관한 해석적해법이 어려운 경우, 전영역을 유한의 요소들로 분할하고, 분할된 하나의 요소(e)에서 미지계수  $\alpha_i$ 와 다항식  $\phi_i$  의 1차결합으로 나타내면 다음과 같이 근사화된다.

$$\check{U}^{(e)}(x, y, a) = \sum_{j=1}^n a_j \phi_j^{(e)}(x, y) \quad (2-2)$$

식 (2-1)로 부터 잔류함수(residual)는 다음과 같이 정의된다.

$$R(x, y/a) = -\frac{\partial}{\partial x} (a_x(x, y) \frac{\partial \check{U}^{(e)}(x, y/a)}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y} (a_y(x, y) \frac{\partial \check{U}^{(e)}(x, y/a)}{\partial y}) + \beta(x, y) \check{U}^{(e)}(x, y/a) - f(x, y) \quad (2-3)$$

식(2-3)은 미지함수 대신 근사함수를 대입하였으므로 그 값이 0이 되지 않는다.  $\check{U}^{(e)}(x, y/a)$ 가 미분방정식의 좋은 근사해가 되도록 하기 위하여 가능한한  $f R(x, y/a)$ 를 최소화 해야 할 필요가 있다. 즉, 정해에 가까운 근사해란  $R(x, y/a)$ 가 0이 가깝게  $a_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ )를 정하는 것이고, 이를 위한 직접적인 방법은 다음과 같다.

$$\int^{(e)} R(x, y/a) dx dy = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2-4)$$

그러나 식(2-4)는  $n$ 개의 미지수  $a_j$ 에 대하여 하나의 식밖에 얻을 수 없으므로  $n$ 개의 식을 얻기 위하여 가중함수(weight function)  $w_j$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )을 도입하고 잔류함수와 그 곱의 적분값을 0으로 한다.

이때 가중함수  $w_j$ 를 형상함수  $\phi_j$ 로 놓으면

$$\int^{(e)} R(x, y/a) \phi_i^{(e)}(x, y) dx dy = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2-5)$$

이 되는데, 이를 Galerkin 기법이라 한다.

여기서 근사해를 풀기 위하여 식(2-5)에서 식(2-3)을 대입하면 식(2-6)을 얻는다.

$$\int^{(e)} \int [-\frac{\partial}{\partial x} (a_x(x, y) \frac{\partial \check{U}^{(e)}(x, y/a)}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y} (a_y(x, y) \frac{\partial \check{U}^{(e)}(x, y/a)}{\partial y}) + \beta(x, y) \check{U}^{(e)}(x, y/a) - f(x, y)] \phi_i^{(e)}(x, y) dx dy = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2-6)$$

윗 식(2-6)을 풀기 위하여 좌측 항인 2차 미분식의 차수를 줄이고, 이를 각각의  $a_i$  에 관한 행렬 형태인 요소방정식으로 만들어 준다.

우선 두 함수 곱의 형태로된 식의 미분에서 연쇄법칙을 적용하면 식(2-6)의 앞쪽 두항이 변형되어 다음식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 & - \int^{(e)} \int \left[ - \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_x \frac{\partial \check{U}^{(e)}}{\partial x} \phi^{(e)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha_y \frac{\partial \check{U}^{(e)}}{\partial y} \phi^{(e)} \right) \right] dx dy \\
 & + \int^{(e)} \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_x \frac{\partial \check{U}^{(e)}}{\partial x} \phi^{(e)} \right) \frac{\partial \phi_i^{(e)}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha_y \frac{\partial \check{U}^{(e)}}{\partial y} \phi^{(e)} \right) \frac{\partial \phi_i^{(e)}}{\partial y} \right. \\
 & \left. + \beta \check{U}^{(e)} \phi_i^{(e)} - f \phi_i^{(e)} \right] dx dy = 0 \quad i=1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2-7}$$

식 (2-7)에 좌측 두항을 Green의 정리에 적용하면 식(2-8)이 된다.

$$- \int^{(e)} \left[ \left( \alpha_x \frac{\partial \check{U}^{(e)}}{\partial x} \phi_i^{(e)} n_x^{(e)} + \alpha_y \frac{\partial \check{U}^{(e)}}{\partial y} \phi_i^{(e)} n_y^{(e)} \right) \right] ds \tag{2-8}$$

윗 식을 간단히 요약하면 다음과 같다.

$$\tau_n^{(e)} = \tau_x^{(e)} n_x^{(e)} + \tau_y^{(e)} n_y^{(e)} \tag{2-9}$$

이때  $\tau_x^{(e)} = -\alpha_x \frac{\partial \check{U}^{(e)}}{\partial x}$ ,  $\tau_y^{(e)} = -\alpha_y \frac{\partial \check{U}^{(e)}}{\partial y}$  이며 이 식을 (2-8)에 대입하고 그 결과를 식

(2-7)에 대입하면 다음 식으로 간단히 표현된다.

$$\begin{aligned}
 & \int^{(e)} \int \left[ \left( \alpha_x \frac{\partial \check{U}^{(e)}}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi_i^{(e)}}{\partial x} + \left( \alpha_y \frac{\partial \check{U}^{(e)}}{\partial y} \right) \frac{\partial \phi_i^{(e)}}{\partial y} \right] dx dy \\
 & = \int^{(e)} \int \mathcal{F}_i^{(e)} dx dy - \int^{(e)} \tau_n^{(e)} \phi_i^{(e)} ds \quad i=1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2-10}$$

이어서 식(2-2)을 식 (2-10)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\sum_{j=1}^n \left( \int^{(e)} \int \frac{\partial \phi_i^{(e)}}{\partial x} \alpha_x \frac{\partial \phi_j^{(e)}}{\partial x} dx dy + \int^{(e)} \int \frac{\partial \phi_i^{(e)}}{\partial y} \alpha_y \frac{\partial \phi_j^{(e)}}{\partial y} dx dy \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \int^{(e)} \int \phi_i^{(e)} \beta \phi_j^{(e)} dx dy \\
& = \int^{(e)} \int \hat{f}_i^{(e)} dx dy + \int^{(e)} \tau_n^{(e)} \phi_i^{(e)} ds \quad i=1, 2, \dots, n
\end{aligned} \tag{2-11}$$

위의 식 (2-11)을 매트릭스 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(e)} & K_{12}^{(e)} & \dots & K_{1n}^{(e)} \\ K_{21}^{(e)} & K_{22}^{(e)} & \dots & K_{2n}^{(e)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1}^{(e)} & K_{n2}^{(e)} & \dots & K_{nn}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^{(e)} \\ F_2^{(e)} \\ \vdots \\ F_n^{(e)} \end{pmatrix} \tag{2-12}$$

식 (2-12)의 행렬 형태 식을 간단한 벡터형으로 요약하면 다음과 같다.

$$[K](A) = (F) \tag{2-13}$$

이때 [K]와 (F)의 요소는 아래와 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{(e)} &= \int^{(e)} \int \frac{\partial \phi_i^{(e)}}{\partial x} \alpha x \frac{\partial \phi_j^{(e)}}{\partial x} dx dy + \int^{(e)} \int \frac{\partial \phi_i^{(e)}}{\partial y} \alpha y \frac{\partial \phi_j^{(e)}}{\partial y} dx dy \\
& + \int^{(e)} \int \phi_i^{(e)} \beta \phi_j^{(e)} dx dy
\end{aligned} \tag{2-14}$$

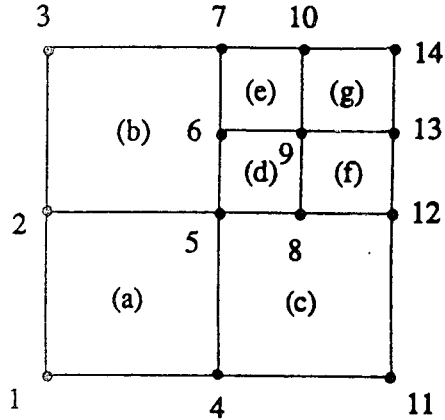
$$F_i^{(e)} = \int^{(e)} \int \hat{f}_i^{(e)} dx dy + \int^{(e)} \tau_n^{(e)} \phi_i^{(e)} ds \tag{2-15}$$

따라서, 위의 식 (2-14), (2-15)에 의하여 규칙적 매쉬분할에서 하나하나의 요소방정식이 형성되어 수치해석과정으로 처리된다.

1-불규칙 매쉬분할은 이웃요소산 절점의 위치가 일치하지 못하므로 연속이 되지 못한다. 따라서 1-불규칙 매쉬에서 요소간 연속성을 유지시키기 위한 관계식을 다음과 같이 설정하여 수치 모형을 구축한다. 미분방정식과 경계조건을 만족시켜 주어야하고, 모든 요소를 결합시킬때, 요소간 경계선이 일치되어야 한다.

요소방정식의 flux term에 대한 선적분은 요소별로 구하여지고, 각 절점에서 nodal flux은 모든 요소에서 flux integral을 결합시킨 합으로 계산되므로, flux integral은 다음과 같이 나타난다.

$$F\tau_i^{(e)} = \int \tau_i^{(e)} - n\phi_i^{(e)} ds$$



(fig.2) Node numbers of 1-irregular mesh

Fig.2 의 절점 5에서 flux integral 다음 식으로 표현된다.

$$F\tau = \int_{5-n}^7 \phi_2^{(b)} ds + \int_6^5 \tau^{(d)} ds ,$$

$$+ \int_{12}^5 \tau^{(c)} - n \phi_4^{(c)} ds '' + \int_5^8 \tau^{(d)} - n \phi_4^{(d)} ds '' ,$$

위의 방법으로 연속성을 유지시키고, flux integral을 구하면 1-불규칙 매쉬를 수치해결 구할 수 있다.

### 3. Error Estimation

편미분 방정식의 경계치 문제인

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c \quad \text{in } \Omega \quad u = f \quad \text{on } \partial\Omega$$

에서 piecewise polynomial로 이뤄진 근사해인

$$\tilde{U} = a_0 N_0 + \sum_{i=1}^n a_i N_i \quad (N_i \text{ 는 polynomial}) \text{로서}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = 0 \quad \text{를 만족하는 값을 찾고자 한다.}$$

실제 이 문제의 출발은 weak solution을 찾는 문제인데 어떤 공간함수 내의 모든  $v$  에 대하여

$$\int_{\Omega} \left[ -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right] v \, dx \, dy = 0 \quad \text{를 만족하는 } U \text{를 찾는 문제가 되고 Green의 정리를 사용하여}$$

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\partial v / \partial n) ds \quad \text{로 변형한 다음 } U \text{ 대신 } \tilde{U} \text{를}$$

사용하면 각각의 오차  $E$ 를  $E = \tilde{U} - U$ 라 한다. 여기서  $\tilde{U}$ 와  $U$ 는 함수이기 때문에 norm을 사용해야 한다.

$$\|E\| = \left[ \int E^T E \, d\Omega \right]^{1/2} \text{로 정의한다.}$$

여기서  $l = (\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2)$ 이다.

$$\begin{aligned} \|E\| &= \int_{\Omega} (U - \tilde{U}) l (U - \tilde{U}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (U - \tilde{U}) (lU - l\tilde{U}) d\Omega = \int_{\Omega} (UlU - U\tilde{U}l - \tilde{U}lU + \tilde{U}l\tilde{U}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} UlU d\Omega - \int_{\Omega} U\tilde{U}l d\Omega \quad (\because \tilde{U}lU = 0 \text{ 이므로}) \\ &= \int_{\Omega} (\partial U / \partial x)(\partial U / \partial x - \partial \tilde{U} / \partial x) + (\partial U / \partial y)(\partial U / \partial y - \partial \tilde{U} / \partial y) d\Omega \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} (\partial \tilde{U} / \partial n)(U - \tilde{U}) ds \end{aligned} \quad (\text{Eq.1})$$

식 (Eq.1)의  $\partial \tilde{U} / \partial n$ 는 각 요소 (a), (b), (c)를 접촉시킬 때 발생하는 값으로 형상함수들이 불연속일 때 나타나며, 형상함수의 차(order)와 비례하는 값으로  $d$ 값의 영향을 받는다. 만약 근사다항식을 이웃하는 요소와 연속성을 유지시켜 주면,

$$\int_{\partial\Omega} (\partial \tilde{U} / \partial n)(U - \tilde{U}) ds = 0 \text{이 된다.}$$

(Eq. 1)의 첫번째항의 오차는 보간 다항식의 오차에 의해 결정되고 mesh크기에 비례하여 얻어지는 값으로  $O(h^2)$  정도이다.

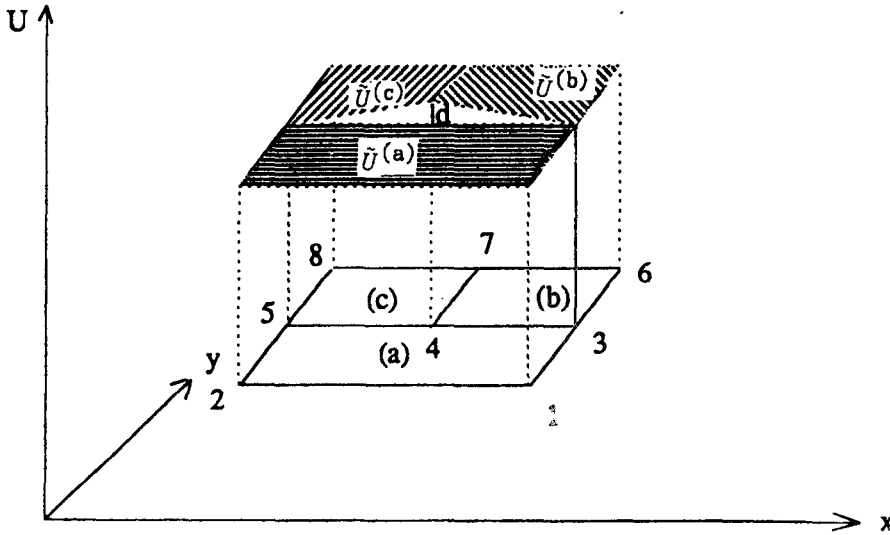
trial function을  $\sum_{i=1}^m a_i N_i$ 로 했을 때 mesh를 증가시키면서 hierarchical mode를 사용한다면 오차

는  $a_{m+1} N_{m+1}$ 에 크게 영향을 받게되어



$$\|E\|^2 = \left[ \int N_{m+1}(LN_{m+1})d\Omega \right]^{-1} \left[ \int N_{m+1}d\Omega \right]^2 \frac{\int R_w^2 d\Omega}{\int d\Omega}$$

이 되고,  $N_{m+1} = x(1-x)/h^2$  라 할 때  $\|E\|^2 = (h^{2/12}) \int R_w^2 dx$  이 된다. [5] (이때  $R_w = lU$ )



(fig.3) A mesh of three  $C^0$ -quadrilateral elements and the corresponding trial solution.

#### IV. A Test Case

본 논문에서는 아래와 같은 Laplace 방정식의 경계치 문제를 연구대상으로 삼았다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ in } D = \{(x,y) \mid 0 < x < 3, 0 < y < 3\}$$

$$u(x,0) = x^4$$

$$u(0,y) = y^4$$

$$u(x,3) = 81 - 54x^2 + x^4$$

$$u(3,y) = 81 - 54y^2 + y^4$$

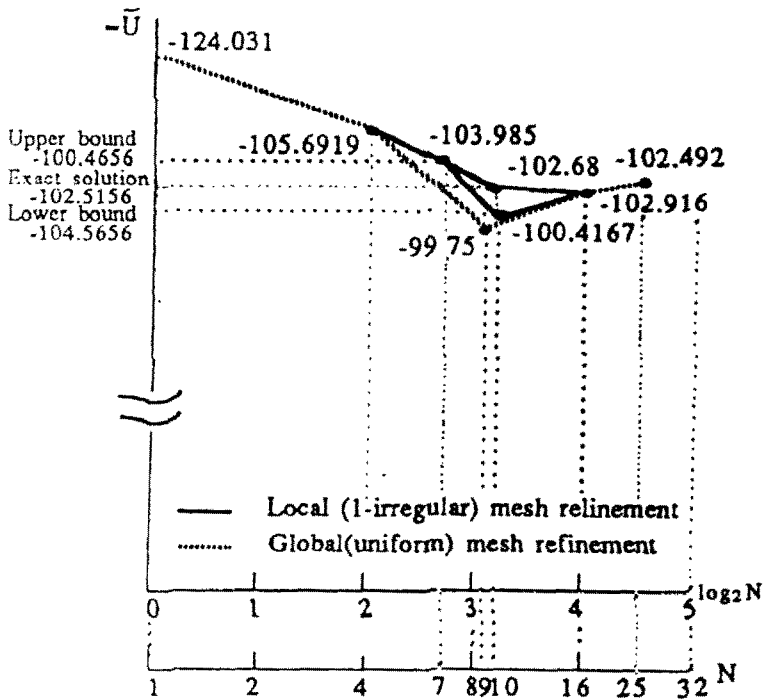
여기서 trial function  $u(x,y) \approx U(x,y) = \sum_{j=1}^n a_j \phi_j(x,y)$ 에서 각 요소를 bilinear shape function 으

로 나타내면  $u(x,y) \approx U(x,y) = \sum_{j=1}^4 a_j \phi_j(\xi, \eta)$ 로 변형시켜 근사치를 구했다.

### V. Numerical Results

등간격 요소분할과 1-불규칙 요소분할을 비교하기 위하여 요소수의 증가에 따른 수치해와 오차의 변화상태를 고찰한다. 미지결점수의 증가와 이에 따른 정점오차는 등간격 요소분할에서 요소수는 기하급수적으로 증가하므로, 로그(log) 제산을 하였다.

요소수를 2의 지수에 비례하여 나타낼 때 수치 수렴성 비교는 Fig. 4와 같다.

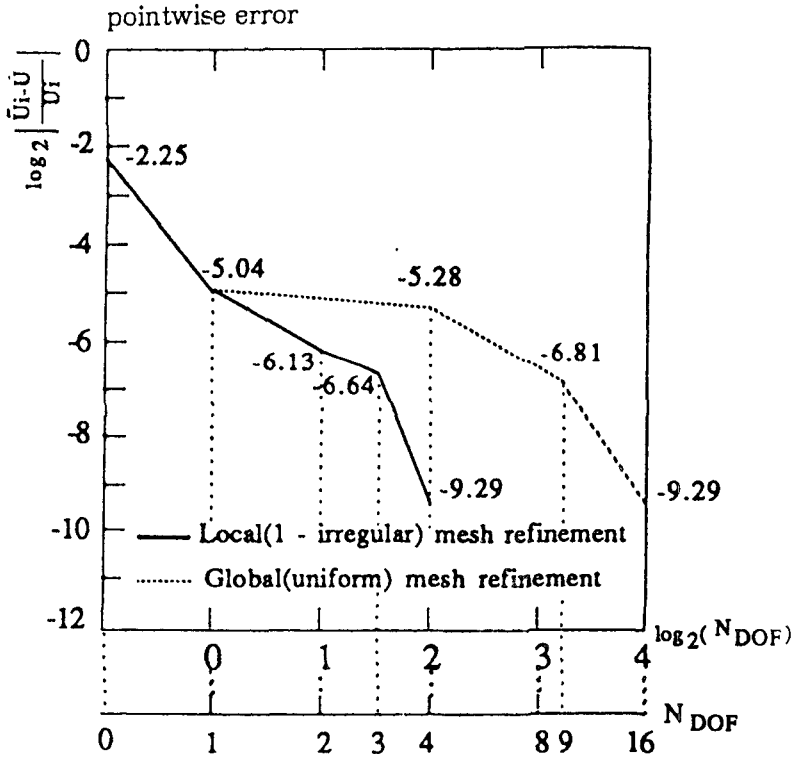


(fig.4) Sequence of approximate solution converging to the exact solution by increasing elements number(N)

Fig.4는 요소수의 단계별 증가를 등간격으로 분할할 경우에 요소수는 4개에서 9개까지 한 단계 높여 각각의 근사해를 구하나, 국소적 1-불균형 매쉬 분할은 4, 7 및 10개의 요소수에서 근사해를 구할 수 있어, 또 하나 중간 단계의 요소분할을 생성시켜 이에 따른 개선된 해가 나타난다.

요소수 9에서 16개로 한 단계 높여 근사해를 구하는 경우에도 요소수 10의 중간단계 요소분할을 생성시켜 개선된 해가 나타난다.

미지절점수를 증가시킬 때 오차의 감소상태를 비교하면 Fig.5과 같다.



(fig.5) Sequence of pointwise error by increasing unknown node

Fig.5에서 미지절점수의 증가가 등간격 분할일 경우에 오차는 점선과 같이 접근하며, 국소적 1-불균형 요소 분할은 실선과 같이 접근한다.

오차의 변화상태는 1-불균형 분할에서 미지절점수가 2개일때, 등간격 분할에서 미지절점수가 4개일때 보다 감소하였으며, 미지절점수가 4개일 때 등간격분할에서 미지절점수가 16개에서와 같은 정도로 오차가 감소하는 사실이 나타나있다.

국소적 1-불균형 요소 분할은 수치해의 단계를 세분화시키고 그에 따른 오차는 적절한 국소영역

의 선정에 따라 훨씬 적은 미지절점에서 정해에 접근됨을 확인할 수 있었다.

## VI.결론

본 논문에서는 1-irregular mesh refinement를 이용하여 unknown node의 수를 최소화함으로써 방정식의 변수를 줄일수 있었고 이에 따른 오차의 누적과 컴퓨터의 기억용량과 처리시간의 효율성을 높이면서 원하는 point에서의 수렴성을 비교 분석하였다. 그 결과 허용오차 범위내에서 unknown node의 수를 4개까지만 증가시켜도 exact solution에 근사한 해를 얻을 수가 있었다.

## Reference

- [1] David S. Burnett, Finite Element Analysis, Addison-Wesley Publishing Co., pp. 78-86, 1985.
- [2] Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 6th Ed., John Wiley & Sons, pp. 1085-1091, 1988.
- [3] J. Tinsley Oden, "The Best PEM", Finite Elements in Analysis and Design 7, pp103-114, 1990.
- [4] Leon Lapldus, George F. Pinder, Numerical Solution of Differncial Equations in Science and Engineering, John Wiley & Sons, pp. 90-97, 1982.
- [5] O.C.Zienkewlez and K.morgan, Finite Elements and Approximation, John Wiley & Sons, pp. 172-177, 1983.
- [6] R.J.Melosh "Finite Element Analysis Convergence Curves." Finite Elements in Analysis and Design 7, pp. 115-121, 1990.
- [7] 유동원, 이형, "一般化된 陽型의 Euler解法의 수렴성", 중앙대학교 기초과학연구소, 1990, 12월.
- [8] 李 炯, 羅 相洞: 포아송 방정식에서 1-irregular mesh를 이용한 요소법의 수렴성에 관한 연구, [한국통신학회 논문지] 제10권 제11호: pp. 1194-1200, 1991.
- [9] 金 命烈, 陳 祺範 "數值解析", 産學社, 1983.