한국수학교육학회지〈수학교육〉
1992. 8. 제 31 권 제 3 호 73-82

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Aug. 1992: Vol. 31, No. 3, 73-82

수학과 교육과정의 구성주의 관점

신 현성 (강원대학교)

1. 문 제

수학과 교육과정의 20년사를 돌이켜보면 구조주의와 형식주의(formalism) 는 학교수학의 내용구성, 교수 학습에 지대한 영향을 주었다. 이때는 수 학구조의 학습이 강조되면서 몇가지 당위성이 제시되었다. 즉 수학의 깊은 이해를 위해서는 구조가 도입되어야 한다든지, 구조의 학습은 유사하거나 새로운 문제상황에 지식의 전이를 용이하게 하며 지식의 보존을 증진시며 준다든지, 구조는 문제해결을 용이하게 해준다든지 등과 같은 것들이 있었 다.

이러한 관점들이 가치가 있는 것이드래도 이기간 동안의 프로그램에 참석 한 많은 수학교사들의 경험과 관찰에 의하면 이러한 목표는 달성하기 어려 웠다는 공통인식이 있었다. 이 현상은 다른나라에서도 일어났고 후로이덴탈 (Freudenthal,1986)의 "60년대의 새수학운동에 도입했던 구조는 학생들의 학습패턴을 고려하기 보다는 수학자들의 시각에 그 구성을 맞추었고 이것이 프로그램이 성공하지 못한 한 원인이 되었다"는 비판과 맥을 같이 한다. 그 후, 우리나라는 이 운동의 효과를 깊이 분석하지 않고 덜 구조화되면서 학 생들의 학습패턴을 고려한 교육과정을 만들려 노력했다. 그래서, 어려운 수 학내용을 대폭 줄이고 기초내용을 강조하면서 생활과 관련이 깊은 내용을 도입 했다든지, 문제해결을 강조하려 했다든지, 심리학쪽에서 제시하는 학습이론을 가능한 반영시킬려 했다든지 등 전체적인 인상은 수학의 구조를 유지하면서 개념의 표현, 기초기능, 문제해결 등을 강조한다는 느낌을 주었 다.

좀 더 포괄적으로 이야기하면 수학의 구조에 인지구조를 고려하여 수학과 교육과정을 구성하자는 관점이 있었다(신현성, 1991). 그러나, 인지구조를 수학적구조에 접근시키는 명확한 방법을 교재개발을 통해 제시하지 않았던 관계로 문제해결, 기초기능, 수학적 태도등의 중요한 요소가 본래의 성격을 충분히 표출시키지 못하였다. 즉, 이것들이 수학적 구조와 결합이 되었을 때 어떤 효과를 준다는 당위성을 보이는 구체적 교재 개발을 소홀히 했다는 비판이 있었다. 이 글은 미래지향적인 수학과 교육과정을 구성한다면 중심 이 되는 이슈는 현재의 교실상황에서 찾아야 하고 필요하면 다른나라에서 탐구되었던 아이디어를 도입함으로써 새로운 수학교육의 운동을 시도해 본 다는 것과 관련이 있다.

아래 내용은 평준화 지역에서 우수한 고등학생의 풀이를 나타낸 것이다 (인터뷰, 1991).

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 구간 $[a,\ b]$를 n등분한 각 분점을 차례로

$$a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$$

라고 하면,

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{n-1})\Delta x$$

[풀이과정]

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

이 보기는 우리나라 고등학생들이 수학을 어떻게 인식하고 있는가를 알아 보는데 이용한 측정 문항 중의 하나이다. 중부지역을 중심으로 실시한 조사 에서 부분적으로 몇가지 관찰된 점이 있었는데 이를 종합해 보면,

첫째는 학생들이 수학 과정을 소홀히 한다는 것이다. 수학의 큰 특징은 수학이 만들어져가는 과정을 중시하는 학문이다. 과정속에서 여러가지 사고 가 일어날 수 있으며 수학의 태도는 과정의 탐구속에서 형성된다고 볼 수 있다. 페르메의 정리를 일반화하는 과정에서 보인 오일러의 탐구과정이라든 지 수학의 한 체제(예를 들면, 비유리드의 탄생)가 만들어져가는 과정을 보면 발견과정, 구성해가는 과정은 수학의 중심사고임을 알 수 있다.

둘째는 학생들이 수학적 사고의 완성단계인 엄격한 기호의 표현과 이들간 의 관계에 너무 집착한다.

인간은 수학적인 도래를 발견했을 때 비형식적으로 수학적 아이디어를 탐 구하게 되고 이 과정을 형식적인 표현을 엄격하게 도입하여 나타내게 된다. 따라서, 수학을 공부하는 학생들에게 엄격하게 표현된 형식관계를 강조했을 때, 학생들은 표현뒤에 숨은 사고를 경험해 보지 못하게 되므로 이해가 어 렵게 되어 수학적 사실로 분류하고 외우게 된다.

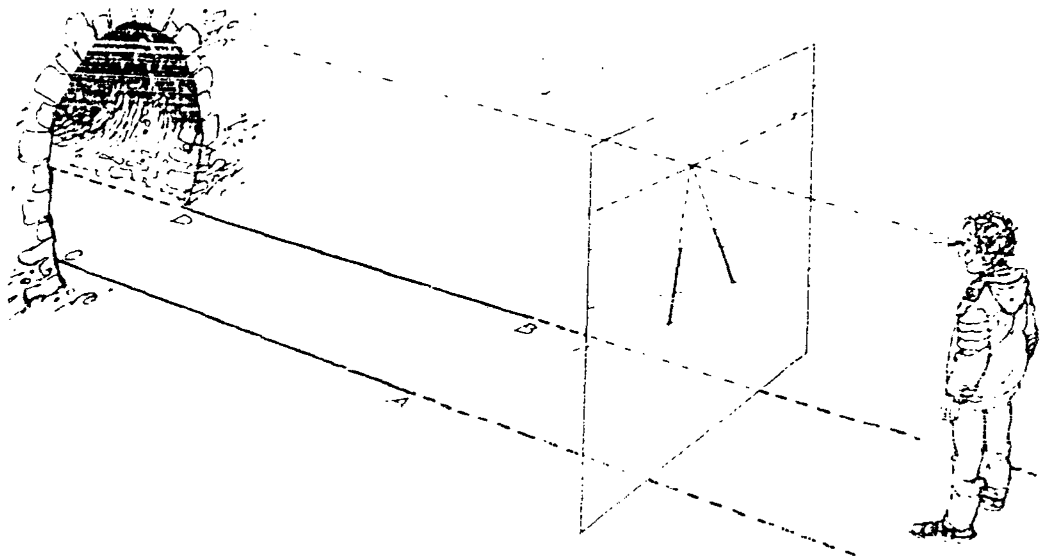
세째는 수학에 대한 센스(Sense)교육이 약화되었다. 수학을 완성된 결과 로부터 시작되는 사고활동으로 볼 것인가? 또는, 수학적으로 미완성된 수학 적 상황에서 수학화하는 과정을 강조하는 사고활동으로 볼것인가?는 수학의 역사에서 잘 보여지고 있다. 예를 들면, 뉴톤시대의 미적분의 발생과정과 칸토르 이후의 수학의 발생과정을 보면 수학적인 상황설정에 큰 차이를 두 고 있음을 알 수 있다. 센스교육은 학습자가 각자의 눈으로 보는 관점을 중 요시한다. 개인의 보고 느낀 감각이 만들어진 수학의 획득에는 도움이 되지 않지만 만들어져가는 수학을 탐구할 때는 큰 역활을 하게된다. 국민학교때 부터 계산활동을 강조하고, 세기(Counting)와 같은 쉐입(Scheme)을 수학에 서 중요시 하는 것을 센스교육과 관련이 있다.

네째는 학생들이 수학에 대한 흥미, 태도등을 상실해 가고 있다. 수학은 흥미와 관심을 가지고 있는 사람들이 보여 마치 예술을 창조하는 것처럼 시 작한 학문이라는 전문가들의 인식을 제쳐두고래로 일반사람도 느낄만큼 수 학에 대한 동기유발이 학교교육에서 약화되었다.

위의 4가지를 강조할 수 있는 학교수학의 활동이 무엇인가? 는 많이 연구 되어야 할 과제이다. 4가지 문제를 보는 관점에 따라 사람마다 독특한 방 법이 창안될 수 있다. 다만, 여기서는 구성주의 이론을 간단히 소개해 보고 이러한 문제점을 극복할 수 있는 부분적인 접근방법을 생각해 본다.

2. 구성주의(CONSTRUCTION)

다음 그림은 교실에서 일어나는 특별한 상황이 된다. 수학교사는 학생들 에게 "레일을 관찰자의 시선방향으로 볼 때 끝없이 평행한가?"라는 질문을 주고 가만히 있을때 대부분의 학생들은 "그렇다"라고 대답하지만, 한 학생 이 레일을 한없이 연장할 때 수렴한다라고 말하면서 다른 학생은 틀린대답 이라고 말하지만 수학교사는 앞에 나와서 설명을 해보라고 한다.



이 교실 상황에서 교사는 틀렸다고 넘어갈수도 있다. 그러나, 교사는 학 생들 앞에서 설명해 보라고 한다. 다음 토론 과정으로 들어갔다. 물론, 교 사가 토론과정에서 어떤 질문을 통해 토론을 유도할 것인가는 가장 중요한 문제가 된다. 우리가 볼때는 어떤 적절한 환경만 조성이 되면 이 학생의 아 이디어는 다는 학생들이 경험해보지 못한 새로운 수학의 체제로 들어가는 출발점(사영기하, 또는 위상)이 될 수 있다. 이러한 생산적인 학생의 아이 디어를 교사는 놓치고 갈 수 있는가? 이후의 상황전개는 여기서 중단해본 다.

교실에서는 수학을 보는 두가지 관점이 있다. 하나는 수학이 가르쳐야 할 것은 지식이 성문화된 것으로 보며, 이 경우는 학생들이 알아야 할 지식이 어떤 것인가? 라고 항상 반문한다. 모든 교육적 체계가 이러한 관점으로 조 직되었다고 볼 수 있다. 다른 하나는 지식을 학습자가 관계와 패턴을 구성 해나가는 활동(activity)으로 보는 관점이다(Kieren,1990). 여기서 이야기하려는 것은 후자에 관련된 구성주의이다. 구성주의는 지식의 실체와 그것 과 세계와의 관계 및 경험을 통해 인간이 세계를 합리화하려는 시도와 그것 의 관계등에 대한 철학적인 입장이며 교육보다 폭넓은 관점을 가지고 있으 나 서론에서 제기한 수학교육의 위기문제를 해결하는데 실질적인 접근방법 을 제시한다는 의미에서 강한 실천방법을 암시하고 있다. 이 관점으로 보면 지식의 근원은 대상(object)에 가해진 학습자의 활동에 근원을 두고 있으나 대상은 이미 준비

되어진 상태로 있는 것이 아닌 정신적 구성(mental construct)이라는 것이다. 사실주의자들과는 대조적으로 구성주의자들은 지 식은 학습자의 행동(action)과 경험에 밀접하게 관련되어 있지, 결코 분리 되어 있지 않는 상태라는 것이다. Kilpatrick(1987)은 이러한 구성주의자의 지식과 학습에 대한 견해를 간단히 두가지의 원리로 요약했다.

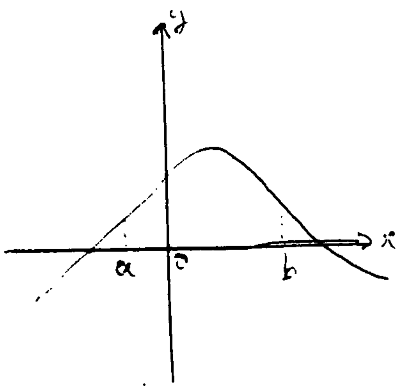
(1) 지식은 환경으로부터 수동적으로 받는 상태가 아닌 인지하는 주체에 의 해 활동적으로 구성된다.

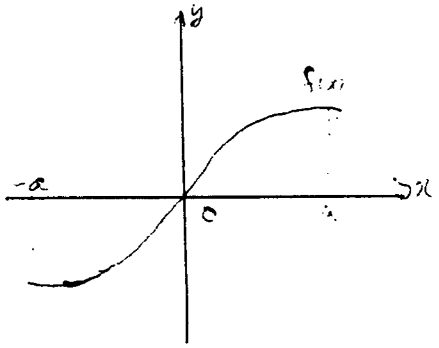
(2) 학습(coming to know)은 자신의 실험적 세계를 조직하는 적응과정 (adaptive process)이다. 그것은 학습자의 마음 밖에 이미 존재해 있는 세계를 발견하는 것이 아니다.

앞에서 든 보기는 두번째의 원리를 잘 설명해 주고 있다. 레일의 평행관 계는 이미 잘 정의된 수학적인 대상이다. 교실에서는 "평행이다"와 "평행이 아니다"라는 선택의 문제만 있으며, 이러한 관점이 프라토닉(Platonic)관점 이다. 평행임을 안다는 것은 레일과 잘정의된 평행선과 비교함으로써 두개 사이에 존재하는 일치점을 찾게 된다. 다음 학습자가 할 일은 본인의 생각과는 상관없이 "평행"이라고 답변하게 된다. 보기에서, 영리한 이 학생의 당돌한 답변의 뜻을 어렴풋이 알게 될 때는 우리는 당황해진다. 즉, 우리가 평행이란 종전의 관점으로 이학생의 생각을 받아들일 것인가? 하는 문제는 "이다", "아니다"의 관점이 아니라 우리가 받아들인 것이 무엇이며 어떻게 그것은 유용한가?에 관련된 것이다.

인간이 세계를 이해하게 될 때 우리는 가설을 세우고 이를 증명하기 위해 비교를 통해 객관적인 참을 찾게 된다. 그러나 만일 이 객관적인 답이 인간 의 능력 밖에 존재 한다면 우리는 가설을 증명할 방법이 없다. 구성주자의 견해는 우리는 객관적인 참을 결코 알 수 없을 뿐이고 (비록 존재하더라도) 우리가 할 수 있는 일은 관찰되어지는 것을 설명하려 노력한다든지 관찰에 알맞는 정리를 확인하는 정도이라는 것이다.

Von Glasersfeld(1983)는 인간이 환경을 이해하는데 (또는, 수학의 세계) "fit" 라는 단어를 사용하여 설명하려 한다. 즉, 수학의 세계를 설명하는데 우리가 지각(perceive)한 것에 맞추는 (fit) 수학의 정리들을 발견하는 것 이 필요하다는 것이다. 이러한 이론을 "viable" 이라고 한다. 조랑말이 사막 에 놓여져 있을 때 생존을 위한 viable한 여러 수단들을 찾아냈을 때는 살 게 되지만 그렇지 못할 때는 죽게된다.





정적분의 값을 구할 때 A라는 학생은 연속함수 $f(x) > 0$에 대해 해보고 정적분의 값은 양의 함수에서만 존재하게 되므로 정적분의 값을 넓이라고 한다. 그러나, $\int_{-1}^{1} xdx$ 와 같이 함수값이 음인 부분과 양인 부분이 있을 때의 적분은 넓 이의 개념이 아님을 알게 되어 자기 사고가 일관성이 없음을 알게 되고, 이 후에는 교사나 동료들과 오랜 대화속에서 정적분을 구하는 viablemean으로 써 정적분은 넓이라는 알고리즘을 포기하게 된다. 여기서 중요한 점은 viability가 실패하게 되는 Constraint문제이다.

Von Glasersfeld(1982)는 피아제의 생각도 기본적으로 구성주의자의 견해 로 본다. 구성주의자 견해로는 $\frac{1}{3}$의 뜻은 아동들에게 이용가능한 쉐임 (schemes)에 기초를 한 그들의 해석으로 본다. 수학에서 의미발전의 기본단 계를 이러한 쉐임의 구성으로 본다.

피아제에게도 지식구성의 초보는 쉐임이다(Piaget, 1980). 쉐임의 조정 (coordinate)은 몇 단계로 나누게 하는데 쉐임의 초기단계는 대략 행동주 의자들이 말하는 자극(운동감각패턴)에 대응하는 용어이며, 두번째 부분은 초기단계에 이어지는 행동(response) 또는 조작(개념적 행동)이다. 세번째 부분은 활동의 후속사건(보강)이다 (Von Glasersfeld,1980)

여기서 행동주의자와 구성주의자들의 견해차이는 자극에 있는데 Piaget (1964)는 이것에 대해 "자극을 구조속에 동화될 때에 한에서 자극이 된다" 와 같이 말했다.

앞에서 이야기한 데로 지식은 이미 만들어져 준비된 상태로 이 사람에서 저 사람으로 전이되지 않으며 모든 아동들은 자기자신의 경험위에 스스로 그것을 만들어간다. Piaget도 안다는 것은 실체를 변환의 조직(system of transformation)속에 동화시키는 것이라는 점을 강조한다. 이러한 변환의 조직(쉐임)은 반영적 추상과 과정을 거쳐 구성된다. 한편 앞에서 Kilpatrick이 제시한 두가지 원리를 좀더 수학의 학습상황에 알맞게 이야기 해보면, 학생들은 환경 또는 교사로부터 수동적으로 지식을 물려받는 것이 아니고 능동적으로 자기 스스로 구성한다는 것인데 수학에서는 이해하기 어 려운 면이 있으나 여기서는 수학이라는 환경과 학생들은 별개의 것으로 독 립되어 있다는 뜻으로 보지 말고 학생들의 마음속에 존재한다고 보아야 한 다. 교사는 다만 수학이라는 환경과 학생개인간에 중재자 역활을 한다. 예 를 들면 학생들의 수학적인 구성을 도우는 일을 하는데 반복적인 행위로 인 도하는 것보다 그들이 이해를 생성할 수 있도록 과정을 구상하는 것 등이 다. 특히, 학생들이 수학에 대한 센스를 만드는 일은 중요한 의미를 가지고 있다. 교사는 학생들의 사고에 깊은 통찰을 가지고 있어야 한다.

"Coming to know" 에 대해 Kilpatrick(1987)은 몇가지의 교육적 연습문제 를 제언했다.

(a) 학생들의 마음속에 진행되고 있는 과정은 나타난 행위보다 더 재미 있는 대상이 된다.

(b) 언어 교환은 학생들이 학습을 인도하는 과정이지 지식을 그대로 전하는 과정이 아니다.

(c) 교사의 인터뷰는 학생들의 인지구조를 파악하는 일뿐만 아니라 그들을 수정하는데 필요한 시도가 된다.

(d) 교사의 기대에 못미치는 학생들의 성취는 그들의 노력을 이해하기 위한 수단이 될 수 있다.

특히 위의 (c), (d) 는 학생들의 인지구조를 파악하고 수정하며 그 결과를 교 육과정에 반

영하는 연구방법으로 제시해서 될 수 있다. 앞의 보기에서 정적 분의 값을 넓이로 생각하고 있는 생각은 그 학생의 인지구조의 단면을 보여 주게 된것이고 이후 교사는 적절한 제언을 통해 바로 잡도록 도와줄 수 있 었다. 여기서 정적분의 값에 대한 생각이 일관성이 없다는 조건(constraint)으로 잘못 구성된 것을 관찰할 수 있었다. 학생들이 어떤 조건 (constraint)을 가지고 있는가?를 알고 제기하는 일은 중요하지만 이를 쉽 게 발견 할 수 없는 점이 있다. 이것에 대해서는 인터뷰방법이 효과적이다. 지금까지 제시된 구성주의자들의 교수 학습에 대한 아이디어를 볼 때 Ahmed(1987)가 제시한 "수학은 실험, 질문, 반영, 발견, 창조, 토론등에 의 해서 진행될 때만 효과적으로 학습된다"에 공감을 주게된다. 따라서, 학생 들에게는 최소한의 사실적 지식만을 요구하고 대부분은 특별한 사고기술을 훈련시킬 수 있는 장면(situation)다루는 경험을 시켜야 한다는 것이다.

수학의 철학에서는 구성주의를 보통 직관주의와 관련시킨다. 직관주의에 대한 인식론은 어떤 수학, 어떤 방법, 어떤 진술등이 수학의 구성과정에서 수학의 확실성을 주기 위하며 도입되어야 하느냐?에 관심이 많다. 따라서 직관주의 관점의 학습은 다분히 현재 진행되고 있는 수학의 체계를 의식하 게 된다. 그러나, 학생들이 활동적으로 자기마음속에서 어떻게 구성해가며 개인이 어떻게 지식을 얻게 되는가에 관심이 많다(Lerman, 1985). 직관주의 와 거리가 있지만 수학에서 구성(Construction)에 관한 대표적인 예가 있 다. 수학에서 무한의 개념은 칸토르(Cantor)에 의해 정확히 수학적으로 공 식화가 되었고, 그 당시에는 수학자들에게는 그의 발상이 특이해서 받아들 이지 않을 만큼 놀라운 면이 있었다. 그의 아이디어에 의하면 초월수는 구 체적으로 하나를 보여주지 않더라도 초월수는 존재한다는 것을 증명할 수 있었다. 그러나, Liouville는 초월수를 구체적으로 하나 잡고 가 초월수

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{10} + \frac{1}{a0^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \dots \\
&= \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{24}} + \dots \\
&= 0.11000100000000000000000010\dots
\end{aligned}
$$

임을 증명함으로써 존재성에 대한 증명을 끝냈다. 이 두가지 증명방법은 존 재성을 증명하는데 대표적인 접근방법이다(Praeger, 1969).

또 다른 개념 구성과정을 보면 유리수에서 실수를 구성해가는 과정도 대 표적인 예가 될 수 있다. 이러한 방법은 초월수의 존재와 실수의 존재라는 환경을 수동적으로 받는 상태가 아닌 주체에 의한 활동적 구성과정을 나타 내는 보기가 된다. 다만, 지금까지 이야기한 구성주의의 관점과 틀린점은 어떤 수학적 공리 체제안에서 이루어졌다는 사실이다.

3. 수학의 교수학습 전략

앞에서는 우리나라의 수학교육의 문제점을 몇가지 제시했고 이러한 문제를 해결하는 개혁운동의 접근방법을 탐구하기 위하여 구성주의의 관점을 복습 해보았다. 이론의 일부는 우리나라

교실 현실에서 맞지 않다는 것을 느낀 다. 유클리드 기하의 초보단계를 학습하고 있는 상황에서 사영기하학과 같 은 위계가 높은 내용이 학생들한테서 나왔을 때 교사가 어떻게 적응해야하 는 문제는 어려운 것이다. 이런 관점으로 초 중등학교의 교수과정을 수정 할 수는 없다. 그러나, 현재 학교수학의 지식구조(공리체계)를 유지하면서 수학의 교수 학습에 구성주의 관점을 일부 도입 할 수 있는 방법을 모색해 볼 수 있다는 것이다. 앞에서 문제점으로 지적된 것을 종합해보면 수학의 과정을 경험시키는 문제, 엄격한 수학적 표현에 집착하는 문제, 수학에 대 한 센스교육문제, 수학에서의 흥미문제 등으로 요약할 수 있다.

이러한 문제를 어떻게 해결할 것인가?에는 구성주의 입장에서 상당한 접 근방법을 얻어 올 수 있다. 구성주의의 관점을 교실상황에 맞게 추려보면 몇가지로 요약할 수 있다.

첫째는 수학을 보는 관점을 바꾸어야 한다는 것이다. 수학에 대한 교사와 학생들의 신념은 교실에서 수학이 실제 행하여지는 방법과 밀접한 관계가 있다. 수학이 관계와 규칙의 모임이라는 신념을 가지고 있으면 교실의 상황 도 규칙을 기억하고 응용하는 수업으로 가게된다. 그러나, 교사나 학생이 창조와 발견의 분위기로 충만되어 있다면 교실상황은 다르게 진행된다. 학생들의 생산적인 사고활동을 무시할 필요는 없다.

둘째는 교사와 학생간에 수학의 교환이 이루어져야 한다. 교사는 마지막 답을 말할때를 잘 판단해야 한다는 것이다. 앞의 이론전개에서로 학생A가 정적분의 값에 대한 constraint를 교사와 의견교환을 통해 제거함으로써 새 로운 구성이 일어나는 것을 보았다.

세째는 학습과제 선택과 교사의 질문은 중요한 수업의 요소가 된다. 수학 에서 기본이 되는 쉐임은 어떤 것들이 있으며, 활동적으로 이 쉐임들을 어 떻게 형성할 것인가에 대한 문제는 항상 고려되어야 한다. 정적분에서 필 요로 하는 쉐임중의 하나는 분할이라는 정신활동인데 우리나라의 경우 국민 학교 저학년 때부터 나오기 시작한다. 우리의 관심은 현재 교육과정에서 action schemes이 어떤 반영적 추상화의 과정을 거치는가? 그 과정의 제시 는 의미심장한가? 이과정에서 어떤 장면을 도입하여 학생들의 구성과정을 도와 주어야 할 것인가? 등이 중요시 된다.

네째는 이해를 생성하는데 목적을 두는 과정지도가 강조되어야 하며, 능 동적인 학생의 참여를 권장해야 한다.

다섯째는 문제 해결적인 장면부터 수학적 아이디어가 출발해야 한다.

지금까지 이야기한 교육의 문제나 구성주의로 부터 얻어낼수 있는 교수 학습이론등을 종합해서 어떤 학습모델을 생각해야 할 것인가?는 쉬운 문제 가 아니다. 그러나, 전체적으로 볼 때 문제해결 장면의 도입부터 시작하여 과제선정을 통해 교사와 학생간의 충분한 대화가 있도록 하는 문제가 충분 히 오리엔트된 학습이 모델설정에 반영되어야 할 것 같다. 다음과 같은 미 분계수의 개념탐구를 알아보자.

$\Delta x_1 = 0.5$ 일 때, $\frac{(1+0.5)^2-1^2}{0.5} = 2.5$
$\Delta x_2 = 0.4$ 일 때, $\frac{(1+0.4)^2-1^2}{0.4} = 2.4$
$\Delta x_3 = 0.3$ 일 때, $\frac{(1+0.3)^2-1^2}{0.3} = 2.3$
$\Delta x_4 = 0.2$ 일 때, $\frac{(1+0.2)^2-1^2}{0.2} = 2.2$
$\Delta x_5 = 0.1$ 일 때, $\frac{(1+0.1)^2-1^2}{0.1} = 2.1$
$\Delta x_6 = 0.05$ 일 때, $\frac{(1+0.05)^2-1^2}{0.05} = 2.05$
$\ldots$

수열 $\{\frac{f(1+\Delta x_n)-f(1)}{\Delta x_n}\}$ 에서

$$2.5, 2.4, 2.3, 2.2, 2.1, 2.05, \ldots\ 2, 00001, \ldots$$

$\Delta x \to 0$ 일 때 $\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$ 은 2로 간다. 지금,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = 2 \quad (\text{미분계수})$$

같은 방법으로 계산기를 동원하여 $x = \ldots, 2, 3, 4, 5 \ldots$ 일 때의 미분계수를 구해보고 오른쪽 그림 에 찍어본다. 모눈종이에서 이 그래프는 $y = 2x$ 임을 알 수 있다.

4. IMP 프로그램

지금까지는 우리나라의 교실에서 일어나는 수학의 교수 학습이 우리가 원하는 곳으로 가고 있지 않다는 것을 부분적인 자료를 통하여 소개되었다. 그리고, 이러한 현상을 극복하고 수학교육이 바람직한 곳으로 흘러 가도록 수학교육의 개혁운동이 필요하다는 의견을 제시했다.

지금까지 제시한 여러 아이디어를 종합해 보면 우리의 교실환경이 너무 형식수학(formal mathematics)으로 흐르고 있다는 인식이다. 엄격한 기호나 수학적 문장으로 표현된 교과서 형태에서부터 수학을 출발하여 수학적 구조 탐구로 가고 있다는 것이다. 그러나, 수학은 인간의 자유로운 사고 과정을 기호와 수학적 문장으로 표현한 산출로 볼 때 수학이 만들어져가는 과정을 학생들에 경험 시키지 못한다면 바람직한 교육이 되지 못한다는 것을 알 수 있다. 수학적 구조에서 일어나는 사고를 엄격한 기호나 문장을 통해서만 사 고하도록 강조하는 것은 학생들을 쉽게 피곤하게 만들 수 있다. 따라서, 수 학이 만들어져가는 수학적 과정을 경험시키는 일을 우리는 형식수학이기전 에 학생들에게 주어야 한다. 이는 본문에서 Kilpatrick이 구성주의의 교육 적 연습에서 제시한 이해를 생성하는 수학적 과정을 강조한 것과 뜻이 통한 다.

이러한 의미로 비형식적 수학(informal mathematics)을 잠정적으로 정의 해 둔다. 이 비형식적 수학은 수학적 과정을 중시할 뿐만 아니라 개념형성 의 전단계로서 주로 교사의 언어로 표현된다.

IMP 프로그램은 이러한 비형식적인 수학을 교사주도에 의해 실시하며 학생 들과의 대화를 중시하고 수업에서는 수학의 과정에 학생들이 능동적으로 참 여하게 하며, 학생들이 viable mean을 활동적으로 찾도록 배려하며, 교사가 질문을 통해 학생들의 coustraints를 제거해 주는 수업방식을 택하게 된다. 가장 어려운 점은 교재개발과 평가의 문제가 됨직하다. 평가문제는 단순히 학교만 제한시킬 영역이 아니고 수학학력고사등과 같은 국가단위 시험에도 반영이 되어야 한다.

왜나하면 우리나라의 평가특정상 대입시험에 이러한 관점이 없어지면 학 교에서는 효과적으로 이운동을 전개 할 수 없기 때문이다. 1MP프로그램은 특성상 다음 몇 단계의 연구를 거쳐 프로그램을 확정하게 된다.

(1) **중등학생들이 사용하는 비형식 수학의 형태.** 우리나라 중고등학생들이 독특하게 사용하는 비형식적인 수학이 어떤 종 류가 있으며 형식수학에 대한 학생들의 시각을 적당한 실험방법에 의해 조 사해 보는 단계이다. 학생들은 형식적 수학을 접근할 때 자기자신의 독특한 기능과 사고가 있다는 것을 가정한다. 여기에서는 주로 학생들의 오류분석 과 사용전 전략의 분석, 수학을 하는 센스를 조사해보는 단계이기도 하다. 몇 편의 연구에서 우리나라 중고등 학생에 사용하는 전략이나 수학의 시각 등이 분석되었다.

(2) **수학적 사고 유형의 분석.** 이 단계에서는 수학에서 중요시하는 수학적 사고유형(수학적 행위)을 분 류해보고 중등수학에 이들이 어떻게 반영하고 있는지를 조사해 보는 단계이다. 이러한 사고유형이 분류되면 우수집단의 교육, 평준화된 집단의 교육등 에서 필요로 하는 교육내용이 정리될수 있으며 현행교육과정의 약점을 보완 할 수 있다. 분류된 수학적 사고유형이 어떤 형태로 교재화하느냐 하는 문 제는 다음 단계의 핵심연구과제가 된다.

(3) **교수 학습모형의 설정.** 문제 장면을 설정하여 개념의 이해를 생성하는, 문제해결을 중시하는, 토 론을 통하여 viable mean을 만들고 constraint를 학생 스스로 제거하고, 활 동적으로 쉐임을 만들어가는 교수 학습모형을 제시하게 된다. 이 단계에서 가장 중요시되는 것은 교재개발의 문제가 된다.

(4) **평가 모형의 설정.** 구성주의 관점에서 학교수학을 설계할때는 평가의 관점 설정이 매우 중요 하며 이 정신은 이 프로그램에서 유효하다.

결론적으로 우리나라의 수학교육의 운동은 나름대로 특성을 가졌지만 출 발과 끝맺음의 동기가 명확지 못했다는 비판을 들어왔다. 새 수학 운동도 마무리를 잘했다고는 볼 수 없었다. 우수한 인적자원을 수학교육의 개선운 동에 어떻게 참여 시킬 것인가?를 깊이 생각해야 할 단계이다. 수학교사, 수학교육연구자, 행정 연구자 등이 적극적으로 참여하는 수학교육개선운동 이 새수학 이후 20년만에 일어나야 할 시점에 왔음을 느낄수 있다.

참 고 문 헌

1. Praeger, A., *Example, Mathematics and Logic : Retrospect and Prospects.*, New York : Mentor Books., 1968..
2. Sfard, A., *On the dual nature of mathematical Conceptions. Educational Studies in Mathematics,*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers., 1991..

3. Kieren, T,, *Children's mathematics for children. In L.steffe,Transforming early Childhood Education: Hillsdale,*, Lawrence Erlbaum Press., 1990.
4. What Coustructivism might in mathematics Education?. In PME-XI proceeding, Montreal..
5. Von Glaserfeld,E., *An interpretation of Piaget's Coustructivism.*, Revue Internationale de Philosophie,, 1982.
6. ________, *Learning as a Coustructive Activity,*, In PME-NA Proceedings, Montreal,, 1983.
7. ________, *The Concept of equilibration in Constrictivist theory of knowledge,*, In: F.Benseler, P,M.Hejl.(ed.)Autopoiesteis, Communication and Society, New York: Campus..
8. Piaget. J., *The Psychogenesis of knowledge and its epistemological Significance.*, In: Massimo Piatell-Palmarini(ed.)Language and Learning: The debate between Piaget and chomsky. Cambridge, MA: Havard Umiversity press..
9. Ahmed, A, *Better mathematics: A Curriculum development study based on the low Attainers in Mathematics Project,*, London: Her Majesty's Stationery Office..