

문제설정의 교수=학습에 관하여 (1)

정 지호 (동국대학교)

임 문규 (국제대학교)

1. 序 言

오늘날 수학교육에서는 여러가지 측면에서 나뉠대로의 목적과 방법에 관한 연구가 행하여져 오고 있다. 이 논문에서 논하고자 하는 문제설정의 교수=학습도 수학교육에서의 여러가지 목적과 함께 하나의 방법으로서 연구 실천할 가치가 있다고 생각된다.

小論에서는 일본과 미국등의 선행연구를 참고로 하여 문제설정의 語義를 정의하고, 문제설정의 교수=학습의 意義 및, 문제설정의 유형과 實例, 문제설정의 책략 및 단계, 문제설정의 수업 전개에 방법에 관하여 간단히 논하기로 한다.

2. 문제설정의 語義에 대하여

수학교육에서 사용되는 [문제설정]의 교수=학습이란 쉽게 얘기하면 [문제 만들기]의 교수=학습을 의미한다. 비슷한 말로는 [문제構成]이라든지 [作問]등의 용어의 의미와도 같게 쓸 수 있다고 생각된다. 미국에서 사용되고 있는 Problem Generation, Problem Posing, Problem Formulation 등의 용어가 사용되고 있다. 어느 것도 수학의 문제나 정리 등을 만들어 가는 것을 의미한다. 영어의 의미로 보면, Problem Generation(문제生成)...Problem Posing(문제설정)...Problem Formulation(문제의 定式化)의 순서로 문제가 확립되어 가는 단계로 생각되지만, 이 논문에서는 위의 용어와 의미를 포괄적으로 묶어서 [문제설정]이란 용어를 사용하기로 한다.

3. 문제설정의 교수=학습의 意義

수학교육에서 문제설정의 교수=학습의 의의를 정리 하여 보면, 목표 및 성취도 중심으로는 다음과 같은 것을 들 수 있다.

- (1) 자연현상과 사회현상을 수리적으로 보는 능력과 태도를 몸에 익히는데 도움이 된다.
- (2) 상황 및 문제에 대한 요소의 분석력을 키우는데 도움이 된다.
- (3) 요소의 결합 및 문제의 구성력을 키우는데 도움이 된다.
- (4) 산법의 의미를 깊게 이해하는데 도움이 된다.
- (5) 식의 기능을 이해시키는데 도움이 된다.
- (6) 수학적 용어의 의미를 깊게 이해하는데 도움이 된다.

또한, 학생 및 태도 중심으로 생각하면 다음과 같은 것을 들 수 있다.

- (1) 학생들이 적극적으로 수업에 참여하게 되며, 발표의 횟 수가 많아진다.
- (2) 학생들에게 이미 배운 지식을 종합적으로 사용하는 기회를 줄 수 있다.
- (3) 학력이 낮은 학생이라도 그 나름대로의 평가 의미있는 문제를 만들 수 있게 된다.
- (4) 발견 및 타인에게서 인정받는 즐거움의 기회가 많아진다.
- (5) 자기의 능력에 맞게 누구라도 학습에 몰두하도록 격려하게 된다.
- (6) 항상 문제를 발전시킬려고 하는 태도가 만들어 진다.
- (7) 개별학습과 집단학습의 조화를 이루는 수업이 전개 될 수 있다.
- (8) 다양한 관점에서의 평가가 가능하게 된다.

이상의 문제설정의 교수=학습에 대한 수학교육의 목표와 성취도 및 학생 과 태도 중심적 목표를, 금후의 문제설정의 교수=학습의 연구 및 실천을 위하여 새로운 측면에서 종합하여 아래와 같이 분류하였다.

1) 지식, 이해에 관한 면

- (a) 수학의 개념형성을 촉진하는데 도움이 된다.
- (b) 이해의 폭과 깊이를 확대한다.
- (c) 장기 기억으로 연결된다.

2) 수학적 사고에 관한 면

- (a) 분석력과 통합력이 길러진다.
- (b) 實用力과 응용력이 길러진다.
- (c) 일반화하는 사고가 길러진다.
- (d) 유연한 사고력과 창조력이 길러진다.
- (e) 보다 발전적인 사고력이 길러진다.

3) 관심, 태도에 관한 면

- (a) 자주적인 학습능력을 향상시키는데 도움이 된다.
- (b) 흥미와 관심을 갖게되어 적극적인 수업태도가 길러진다.

4) 문제설정력의 육성

- (a) 수학화하는 능력이 육성된다.
- (b) 문제해결의 발전적 활동이 가능하게 된다.

4. 문제설정의 유형과 實例에 대하여

문제설정의 유형으로는 여러가지가 생각될 수 있지만, 필자는

- 1) 실 세계적인 상황(Situation)(未 수학적 세계)으로부터의 문제설정,
- 2) 수학적 세계로부터의 문제설정

로 둘로 크게 나누어 유형화 하였다.

여기서 말한 실 세계적인 미 수학적 세계란 아직 수학적 되어있지않은 상황을 의미 하며, 수학적 세계란 이미 식이나 수학의 문제 및 정리화된 상황을 의미한다.

많은 수학적 발견 및 활동은 미수학적인 세계에서 수학적인 세계에로 개발과 발견이 라고 생각된다. 실제로 국민학교 단계에서는 많은 현실세계의 상황으로부터의 문제설정의 교수=학습이 가능하지만, 중, 고교의 단계에서는 수학의 체계 및 학문 중심으로 현실 세계와 점점 유리되어 가므로 수학 내용과 관련되는 실세계적인 상황을 부여하여 문제 설정의 교수=학습을 하기 위해서는 많은 노력 및 연구가 필요하다고 생각된다.

이하에서는 위의 두가지 유형에 대하여 좀더 구체적으로 논하기로 한다.

1) 실세계적인 상황(未 수학적 세계)으로부터의 문제설정,

현실의 상황에서 부터의 문제설정의 교수=학습은 수학자가 실제로 수학을 만들어 내는 것과 같이 학생들에게 수학적 활동을 행하게 할 수 있으므로 매우 적절한 교수=학습의 타임으로 생각되어진다. 물론 현실의 상황이라도 될 수 있는 한 수학의 내용을 많이 품고있으며, 교과서의 단원내용과 맞는 상황을 제시하는 것이 중요하다고 생각된다.

실제로 문제설정의 교수=학습에 적용가능하다고 생각되는 실세계적 상황으로는 다음 과 같은 것이 생각된다.

(1) 상황으로 부터의 문제설정

- a) 일상생활의 日課: 가정생활, 학교생활, 시장보기, 통학, 여러가지 행사, ...
- b) 놀이, 게임: 술레잡기, 줄넘기, 제기차기, 운동의 시합, ...

(2) 대상 및 소재로 부터의 문제설정

- a) 뉴우스의 내용: 신문, 잡지, 텔레비전, ...
- b) 역사: 수학자와 과학자의 전기, 역사적 사실, ...
- c) 서적: 교과서, 참고서, 전기, ...
- d) 타 교과목의 내용: 과학, 사회, 국어, 음악, 체육, ...
- e) 그림, 모형: 여러가지 그림, 사진, 건축물, 다리, ...
- f) 옛날 이야기: 전설, 이야기, ...

(3) 현실의 가까운 주위로 부터의 문제설정

- a) 현존의 사물: 학교, 친구, 가족, 교통기관, ...

2) 수학적 세계로부터의 문제설정

위에서도 언급한 바와같이 수학적 세계란 이미 수학의 내용 및 교재 안에서 다루어 지고있는 용어, 기호, 식, 정리, 문제등을 의미한다.

실제로 문제설정의 교수=학습에서 다룰 수 있는 구체적인 내용을 살펴보면 다음과 같은 것 들을 들 수 있다고 생각된다.

(1) 수학의 문제 이외의 내용으로 부터의 문제설정:

- a) 용어: 길이, 무게, 넓이, 부피, 단위, 삼각형, 곱셈, 배수, 분수, 부등식, 함수, 미분, 적분, 수열, ...

- b) 숫자 및 문자: 3, 4, 7, 50, 100, x , y , a , S , V ,
- c) 도형 및 모형: 점, 선, 삼각형, 평행사변형, 사각형, 구의 모형, 원추의 모형, ...
- d) 그래프: 함수의 그래프, 통계의 그래프, ...
- e) 식: 여러가지 공식, 방정식, 부등식, ...
- f) 자료: 여러가지 통계자료, 학급의 신장, 인구통계, 가계부, ...
- g) 기호 및 부호: \int , \subseteq , \subset , \geq , \sum , \prod , $\sqrt{\quad}$, $+$, $-$, ...
- h) 도구: 삼각자, 분도기, 콤팩스, ...

(2) 수학의 문제로부터의 문제설정

교과서나 참고서의 문제라 하더라도 문제를 푸는 과정이나 문제를 푼 후에 그 문제와 유사하거나 새로운 문제를 만들게 하는 문제설정의 학습을 하게 할 수 있다.

이 이외에도 완성된 수학의 문제가 아니라 조건이 과부족한 문제라든지, 질문이 없는 문제상황만을 제시하는 등의 문제설정의 교수=학습이 가능하리라 생각된다. 이들을 좀 더 구체적으로 정리하면 이하의 것들을 들 수 있다.

- a) 원 문제와 유사 또는 새로운 발전적인 문제설정
- b) 다양한 해결방법에 따른 문제설정
- c) 일반에서 특수에와 그의 역에로의 문제설정
- d) 조건이 과부족한 문제해결에서의 문제설정
- e) 질문이 없는 문제상황에서의 문제설정

3) 문제설정의 실예에 대하여

여기에서는 필자가 실제로 조사한 문제설정의 실예를 몇가지 들도록 한다.

(1) 학생들 주위의 가까운 임의의 상황

<상황 1> 오른쪽과 같이 어린이들이 있다고 하자.
이것을 보고 스스로 생각하여 여러가지 문제를 만들어 보자.



이 상황은 일본의 국민학교 4학년과 중학교 2학년을 대상으로 1988년 5월에 필자가 문제설정의 조사를 한 것이다.

그 때 학생들이 실제로 만든 문제 중에서 국민학교 4학년이 만든 문제를 몇가지 아래에 들기로 한다.

a) 어린이 8명이 있다. 모두 어머니에게서 100원씩 받았습니다. 3사람이 와서 그들은 돈을 갖고 있지 않으므로 어떻게 돈을 나누면 똑같이 나눌 수 있을까요?

b) 어린이 몇 사람이 있습니다. 그 어린이들이 50원씩 내어서 과자를 샀습니다. 합계가 400원이었습니다. 어린이는 몇 사람일까요?

c) 어린이가 카-네이션을 샀습니다.꽃집에 가니까 카-네이션은 백합의 $\frac{1}{3}$ 의 값이었습니다. 백합은 장미다발의 $\frac{1}{2}$ 입니다.백합다발은 장미다발의 2배입니다.백합다발은 은방울꽃 다발의 $\frac{2}{4}$ 입니다.은방울꽃 다발의 값은 800원입니다.백합,카-네이션,장미다발의 값을 쓰세요.

d) 순희의 우산에는 물방울이 256개 있습니다.동수의 우산에는 물방울의 수가 순희의 4배의 갯수가 있습니다.동수의 물방울의 수는 몇 개일까요?또한 차이는 몇 개 일까요? 합하면 몇 개 일까요?

e) 어린이가 6명 있습니다.3사람씩 조를 만들고 싶었습니다.몇개의 조를 만들 수 있을까요?

f) 어린이가 8명 있습니다.한 개의 과자를 똑같이 나눌려고 생각합니다.나눌때 친구들이 3명 왔습니다.또 3명에게 작게 나누면 한 사람의 몫은 얼마정도 일까요?

g) 어린이가 18명이 있어서 가와 나의 조로 나눕니다.가의 사람 수는 나의 사람 수보다 4사람이 더 많습니다.또 15명의 어린이들이 와서 가의 조에 6명,나의 조에 9명 들어갔습니다.가,나의 조에는 각각 몇명이 되었습니까?,또 어느 조가 몇명 더 많습니까?,전부 몇명이 되었습니까?

h) 어린이 몇 명이 있습니다.제일 큰 어린이는 13살,가장 작은 어린이는 5살입니다.두 번째로 큰 어린이는 11살입니다.어린이의 수는 제일 큰 어린이의 나이 곱하기 두번째로 큰 어린이의 나이를 제일 작은 어린이의 나이로 나눈 수입니다.어린이의 수는 몇 일까요?.....

(2)수학적인 임의의 상황

<상황 2> 오른쪽과 같이 점이 있다고 합시다.

이것을 보고 여러가지 문제를 만들어 봅시다.

. .
. .

이 상황에서 국민학교 4학년이 만든 문제의 몇가지 예를 들면 다음과 같다.

a) 우리 가족은 4사람입니다.그리고 레스토랑에 들어가서 아버지가 200원 짜리를 15장 주문하고,어머니가 2장 주문하고,내가 20장,여동생이 1장 샀습니다.모두 몇장입니까?

b) 東국민학교의 가로 길이는 10km,세로는 1112km입니다.차이는 얼마입니까?

c) 이 점이 사탕이라고 합시다.1개 10원의 사탕을 10개 샀습니다.모두 몇 개 일까요?

d) 나의 아버지의 체중은 54kg이고,어머니의 체중은 56kg,형의 체중은 32kg,나의 체중은 34kg입니다.합해서 몇 kg이 됩니까?

e) 우리마을 공민관의 책은 489권이 있습니다.東區 도서관에는 책이 185권 있습니다.우리 공민관의 책은 東區도서관의 몇 배입니까?

f) B君的 집에서 A君的 집까지는 32분 걸립니다.1시 25분에 B君的 집까지 간다면 몇시 몇분에 도착될까요?

g) 50m 달리기에서 A君은 8초 6입니다.B君은 10초 8입니다.차이는 몇 초입니까?

h) 금붕어를 낚는데 A 군은 20마리, B 군은 3마리, C 군은 4마리를 낚고, D 군에게서 5마리를 받으면 몇마리가 됩니까?

i) 500kg까지 실을 수 있는 트럭이 있습니다. 50kg의 철을 20개 운반하려고 합니다. 트럭이 몇 대 필요할까요?

5. 문제설정의 책략 및 단계

1) 문제설정의 책략에 대하여

前節의 문제설정의 유형에 공통으로 적용될 수 있는 일반적인 문제설정의 책략의 몇 가지를 생각하면 다음과 같은 것들을 들 수 있다.

- (1) 자유롭게 폭 넓고 다양하게 생각 할 것
- (2) 자기 스스로도 문제를 만들 수 있다는 자신을 갖고 여러모로 시행착오를 할 것
- (3) 지금까지의 학습경험 및 지식에서 유사한 문제등과 연결시킬 것
- (4) 여러모로 많은 의문을 품을 것
- (5) 자기 주위의 가까운 것에 대하여 생각 할 것
- (6) 자기가 생각한 것은 모두 기록하든지 발표할 것
- (7) 새롭고 발전적인 문제를 만들려고 노력 할 것
- (8) 상황 및 속성과 숫자등을 변경하고 逆으로도 생각하여 볼 것
- (9) 처음에는 자기가 풀 수 있는 문제를 만들어 볼 것
- (10) 일반화 하든지 특수화 할 것
- (11) 차원을 확대 및 축소할 것
- (12) 다른 도형을 생각해 볼 것
- (13) 다른 단위 및 연산을 생각해 볼 것
- (14) 다른 단원 및 타 교과와 연결지워 생각해 볼 것

이 이외에도 여러가지의 문제설정의 책략이 가능하리라 생각된다. 문제설정의 교수= 학습에서는 처음에는 기성의 문제, 정의, 정리, 수학용어등과 같이 낮은 것부터 시작 하여, 점차 어려운 실 세계적 상황 및 미 수학적 세계에로의 문제설정으로 진행하여 가는 것이 바람직하다고 생각된다. 즉, 처음에는 기성의 문제에서 숫자를 바꾸든지, 상황 및 속성을 바꾸어 보도록 하여, 문제설정에 대하여 흥미와 관심, 문제를 만들 수 있다는 자신감을 가지게 하여, 임의의 실 세계적인 상황으로부터 수학의 문제를 만들게 하는 것이 문제설정의 교수= 학습의 바람직한 순서로 생각된다. 왜냐하면 현실세계로부터 수학의 문제를 발견하든지 만드는 것은 수학자의 수학화하는 활동과 유사한 매우 어려운 문제이기 때문이다.

2) 문제설정의 단계에 대하여

S.I. Brown 과 M.I. Walter 는 [The Art of Problem Posing(문제설정의 기술)]에서 피타 고라스의 정리로부터 문제설정의 단계를 다음과 같이 논하고 있다.

1 단계: 속성을 열거할 것

2단계:What-if-not?의 의문을 품을 것

3단계:문제의 설정

4단계:설정된 문제의 해결

반드시 이와같은 단계를 거쳐서 문제설정이 이루어지는 것은 아니겠지만,일반적인 상황이나 문제로 부터의 문제의 설정에도 위의 단계는 참고가 될것으로 생각된다.이 단계를 좀더 수정 보완 해서,다음과 같은 문제설정의 단계를 생각할 수있다.

1단계:속성을 열거 할것

2단계:What-if-not?의 의문과 함께 속성을 여러가지로 바꾸어 볼 것

3단계:문제의 설정

4단계:설정된 문제의 해결

5단계:설정된 문제와 유사하거나 새로운 발전적인 문제의 설정

6.문제설정의 수업전개의 방법에 대하여

여기에서는 위에서 논한 문제설정의 두 개의 유형화에 따른 각각의 수업전개의 방법에 대하여 생각하기로 한다.

1)실 세계적인 상황(Situation)(未 수학적 세계)으로부터의 문제설정:

- (1) 상황의 설정 및 제시
- (2) 학생들 개인의 문제설정
- (3) 학생들이 만든 문제의 발표
- (4) 학급문제의 구성 및 결정
- (5) 학급문제의 해결
- (6) 학급문제의 해결의 검토
- (7) 발전적인 문제설정

(1)의 상황의 설정 및 제시에서는 교사가 학생들과 함께 의논하여 어떤 상황을 설정 할 수도 있고,교사가 그시간의 학습시킬 내용에 적합한 상황을 미리 연구하여 설정 할 수도 있다.

학급문제의 채택에 있어서는 좋은 문제 뿐 아니라 문제가 되지않는 문제도 채택하여 어디가 잘못 되었는지를 함께 보완하여 문제를 완성시키는 것도 좋은 학습이 되리라 생각된다.또한,학급문제로 채택되지 못한 학생들 개인의 많은 문제들은 쉬는 시간이나 방과 후에 풀어보도록 하든지 교사가 수합하여 체크 및 코멘트를 해주는 것도 바람직 하다고 생각된다.

2)수학의 문제로부터의 문제설정

여기서는 어떤 수학문제의 해결에서 발전적 문제설정에 대하여 교육적 가치를 두고 있으므로,수학적 세계 중에서 수학 문제로부터의 문제설정의 수업전개의 방법에 대하여 생각하기로 한다.

- (1) 原 문제의 설정
- (2) 原 문제의 해결

- (3) 발전적 문제설정
- (4) 만든 문제의 발표 및 분류,정리
- (5) 만든 문제의 해결
- (6) 보다 발전적 문제의 설정 및 수업의 마무리

7. 結言 및 課題

小論에서는 지금까지의 일본과 미국등의 문제설정에 관한 선행 연구를 참고로 하여 필자 나름대로의 문제설정의 語義를 정의하고,문제설정의 교수=학습의 意義 및,문제설정의 유형과 實例,문제설정의 책략및 단계,문제설정의 수업전개의 방법에 관하여 간단히 논하였다.

금후의 과제로서는 문제설정의 평가 및 문제설정에서의 사고 와 인지활동의 분석에 관하여 논하고자 한다.

참 고 문 헌

1. 島田民治,, 新國定教科書 算術科教授要義,, 廣文館書店,, 1910..
2. 清水甚吾,, 實驗實測作問中心 算術의 自發學習指導法,, 東京目黒書店,, 1924..
3. 島田 茂,, 算數 數學의 오- 픈 엔드어프로- 치,, 圖書出版,, 1977..
- 4.. Brown,S.I.&Walter,M.I.,, *The Art of Problem Posing*,, The Franklin Institute Press,, 1983..
- 5.. 林 文圭,, 수학교육에서 문제설정과 문제해결의 관련에 관한 연구,, 일본 廣島대학 교육학 박사학위 논문,, 1992,3..