한국수학교육학회지〈수학교육〉
1992. 8. 제 31 권 제 3 호 29-42

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Aug. 1992: Vol. 31, No. 3, 29-42

수학학습의 심리학적 배경에 대한 고찰

전 평국 (한국교원대학교)

I. 머릿말

어떻게 지도하면 아동들의 수학적 능력을 향상시킬 수 있을까에 대한 생각은 모든 교사들의 한결같은 염원일 것이다. 때문에 일선 교사들은 이에 대한 노력으 로 각종 교수 모형을 적용해 본다든지, 최근에는 컴퓨터를 이용했을 때의 학습 효과를 알아보려는 노력까지 수많은 연구들을 진행해 왔으며, 이들 대부분의 노 력들이 부분적으로는 아동들의 수학적 능력을 향상시키는데 공헌해온 것은 사실 이다. 그러나, 아직도 무엇이라고 꼭집어 말할 수는 없으나 불만족스럽다는 사실 에도 공감이 가고 있는 상태이다. 이것은 아동들의 수학 학습을 극대화시킬 수 있는, '바로 이 방법이 아동들의 수학적 능력을 향상시킬 수 있는 최적의 방법이 다'라고 말할 수 있는 유일하고 완전한 학습 방법이 개발될 수 없기 때문이기도 하다.

따라서, 본 원고에서는 아동의 수학 학습을 돕기 위해서 여러 학자들에 의해 서 수행되어온 노력들을 고찰해 봄으로써 아동의 수학학습을 돕기 위한 방법을 생각해 보고자 한다.

II. 수학 학습에 대한 심리학적 배경

아동들의 수학 학습의 효과를 극대화시키기 위한 노력은 많은 학자들에 의해 서 상당히 오래전부터 수행되어 왔다.

자극-반응 학습심리학의 초기 원리들을 개발하는데 도움을 주었던 Thorndike(1922)는 자극과 반응 사이에 형성되는 결합이나 본드(bond)를 더욱 강 화시키기 위해서는 연습의 법칙과 효과의 법칙이 적용되어야 한다고 주장한다. 그에 의하면, 국민학교 아동들은 산술의 법칙을 연역적으로 추론하지 못하기 때 문에, 수업에서 해야 할 일은 아동들이 계산을 수행하고 해결할 수 있게 하기 위 해서는 첫째, 구성되어야 할 본드를 선택하고(예를 들면, 받아올림이 있는 세로 형식의 덧셈을 하기 위해서 필요한 기능들), 둘째, 선택된 본드들을 강화시키기 위해서 적절한 연습(연습의 법칙)과 보상(효과의 법칙)이 뒤따라야 한다고 믿었 다. Thorndike의 이 훈련 방법에 대하여, Brownnell(1928)은

"아동이 7 + 5에 대하여 재빠르게 12라고 대답할 수 있다고 해서 그 아 동이 그 수결합을 알고 있다는 것을 입증하지는 않는다. 7 + 5는 왜 12인 가에 대한 이유를 이해하기 전에는 , 다시 말해서, 결합이 그에게 의미가 있을 때까지는, 그는 그 결합을 알고 있는 것이 아니다"(p.198)

라고 비판하면서 "양적인 사고(quantitative thinking)에서 성공적이기 위해서는 의미의 축적이 필요한 것이지, 무수히 많은 자동화된 반응이 필요한 것은 아니 다. 훈련(drill)은 의미를

발달시키지 못한다. 반복을 통해서 이해를 이끌 수는 없다"(1935, p.10) 라고 주장한다. 이는 수학 학습은 이해를 수반한 유의미학습 이 되어야 한다는 주장이다.

수학 학습에서 계산 기능의 능숙함이 중요하다는 것에는 의심의 여지가 없다. 그러나, 수학에 대하여 학습해야 할 것은 능숙한 계산 이상의 것이 있다. 아동들 은 수학의 기초 개념과 원리를 이해하여야 한다. 즉, 수학의 계산적 접근방법이 아닌 개념적 접근 방법이 강조되게 된다.

수학 학습에서의 개념적 접근 방법을 하기 위해서는 수학적 구조의 이해를 수 반하게 된다. 1950년대 말부터 시작된 수학교육의 개념적 접근방법은 수학교육을 "유의미"하게 하기 위해서 새로운 교수 방법으로 수학의 구조를 가르쳐야 한다는 주장이 강력하게 대두되었다. 1957년에 소련에서 인류 최초로 발사된 인공위성 Sputnik는 수학교육 개혁의 직접적인 동기를 부여하였으며, 미국에서는 1959년에 Massachusetts의 Woods Hole회의에 참석한 학자들은 수학의 구조를 가르치는 것 에 관심을 가졌다. 이 회의의 내용을 정리한 Bruner(1960)는,

"한 교과의 교육과정은 그 교과의 구조를 제공하는 기저인 원리들을 성취시킬 수 있는 가장 기본적인 이해를 통하여 결정되어야 한다. 한 교 과의 광범위한 구조내에서 그들의 맥락을 명확하게 하지않고 특수한 주 제나 기능을 가르치는 것은 몇가지 의미에서 경제적이지 못하다. 우선 그렇게 가르치는 것은 학생이 학습해왔던 것에서부터 후에 학습할 것까 지 일반화하는 것을 매우 어렵게 만든다. 둘째, 일반적인 원리가 이해되 지 않는 학습은 지적인 희열에서 아무런 보상을 주지 못한다. 세째, 지 식과 지식이 연결된 구조없이 획득된 지식은 쉽게 잊어 버리기 쉽다" (p.31-32).

고 하면서 교과에서의 지식의 구조를 강조하였다.

다시 말해서, Bruner는 교수 방법에서 수학적 조작에 기저가 되는 근거를 제 시하거나 한 조작이 다른 조작과 관련되어 있다는 개념을 명시함으로써, 학습자 가 구조에 대하여 기본적인 이해를 하도록 도움을 줄 수 있다면, 학습자들은 궁 극적으로 새로운 지식을 기억속에 더 잘 유지시킬 수 있을 것이며, 보다 넓은 범 위로 일반화하고 그들의 특별한 지식을 새로운 상황과 과제에 전이할 수 있을 것 이라고 보았다(Resnick, 1981).

수학의 구조의 이해에 대하여, Resnick(1981)은 "수학의 구조를 이해한다는 것은 개념과 조작들(operations) 사이의 상호관계의 획득과 새로운 유형이나 성 질들이 조작되고 재구성될 수도 있는 법칙의 획득을 의미한다"(p.105)라고 설명 한다.

구조지향적인 교수방법은 일찌기 Dienes(1960)에 의해서 주장된 바 있다. 그 는 수학은 "관계들의 구조"(p.31)로서, 이 관계는 의사소통의 수단으로 형식적인 기호체계(formal symbolism)로 표현된다고 보았다. 예를 들면, 기호를 나타낸 명 제인 '$2(A+B)=2A+2B$'는 구조의 두 부분 - 덧셈과 곱셈 - 사이의 관계를 나타낸 다. 따라서, Dienes는 수학 학습은 그 기호체계를 이해하고 그 결과를 생활에서 일어나는 실제적 상황에 응용할 수 있는 능력을 획득하도록 돕는 것이며, 수학학 습에서 가장 중요한 점은 수학의 구조와 학습자의 사고 구조를 연결시킬 수 있는 가장 효과적인 방법을 찾아내는 것이라고 주장한다. 또한, Dienes는 구조지향적 인 유의미한 수학 학습이 되기 위해서는

"(a) 수업의 설계자는 수학적 구조의 전체를 알고 있어야 한다. 5세이후 부터의 수학적 경

험은 수학적, 논리적, 심리학적 과정을 토대로 전체적 인 구조로서 고려되어야 한다.

(b) 수학적 경험은 풍부하고 다양해야 하며, 이 경험은 아동 개개인이 수학적 개념을 형성시킬 수 있게 되어져야 한다.

(c) 교사는 아동이 어떤 특정한 단계에 도달했는지와 동시에 역동적인 학습과정을 인식해야 한다. 또한 교사는 학습 방법에서의 개인차, 창의 적인 학습 상황에서의 정서적인 측면과 그와 같은 상황에서의 학습 과정 을 수행하기 위한 학습 능력을 깨닫지 않으면 안된다"(p.29).

라고 주장하면서, 다진수 블럭(multibase arithmetic blocks)을 고안하여 수학의 구조를 구체물을 통하여 기호적인 방법을 사용하지 않고 이해시키는 방법을 제시 하였다.

Montessori 교구, Cuisenaire 막대, 속성 블럭(attribute blocks) 등은 모두 수학의 구조를 이해시키기 위해 개발된 수학 자료들이다. Resnick(1981)에 의하 면, 이러한 자료들은 특히 구조지향적인 교수법에서 유용하게 사용할 수 있는 몇 가지 특징을 갖고 있다. 첫째, 수학 학습을 용이하게 할 수 있도록 고안된 구조 적인 자료이며, 둘째, 기호적인 표현체계에 얽매임없이 수학적 구조를 구체화시 킬 수 있는 자료들이다.

Bruner나 Dienes와 같은 구조지향적인 교수법 연구자들은 학습에 있어서 높은 수준의 수학적 구조를 아동들에게 가르칠 수 있는가에 관심을 가졌고, 이차적으 로 학습자의 심리학적 과정의 설명이나 정의에도 관심을 가졌다. 그러나, 이들이 제안한 수업 자료와 원리는 몇가지의 중요한 문제점을 갖고 있다(Resnick, 1981).

첫째, 수학적 구조의 지도에 대하여 수학자들은 교과내용과 아동들이 배워야 할 중요한 것이 무엇인가에 대해서 서로 다른 관점을 가질 수 있다는 점이다. 예 를 들어, Dienes(1967)는 분수를 "조작적(operational)"으로 정의하였으나, 분수 에 대한 기하학적인 접근 방법이 개념적 표현으로써 널리 사용되어 오고 있다.

둘째, 아동들이 처음에 특정한 방법(예를 들면, 블럭으로 인수분해를 학습하 는 것과 같은 방법)으로 수학의 구조를 학습하고, 그것을 후에 또 다른 상황에서 다시 학습하는 것은 아동들에게 이중의 일을 시키는 것이 아니라고 확신할 수 있 는가의 문제이다.

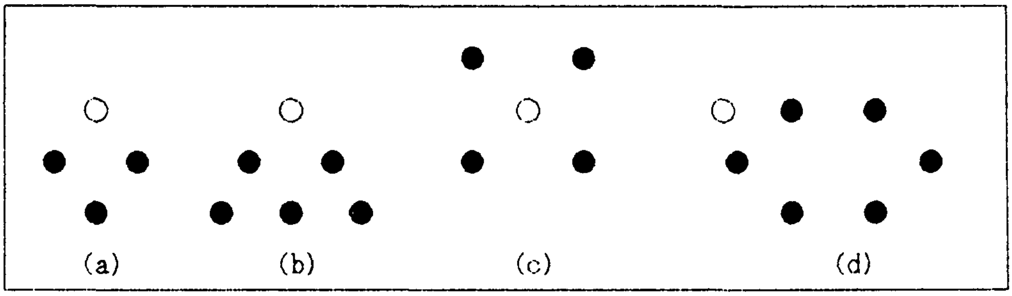
세째, 아동들이 수학적 구조를 학습한다는 것은 수학자가 정의하는 것과 같은 형식적 수학구조의 획득이 중요한가, 아니면 수학적 개념을 효과적이고 융통성 있게 사용하고 획득할 수 있도록 하는 결합, 명제, 관계의 조직체인 직관적 심리 학적 구조의 획득이 중요한가의 문제이다.

그러나, 이 교수방법은 "첫째, 탐구와 발견을 위하여 아동들의 지능과 그들의 능력을 고려하고 있으며, 둘째, 이 방법의 목표는 아동들에게 수학의 주제를 간 단하게 그리고 세련되게 전달하는 것이다"(p.125) 라고 Resnick은 지적한다.

Woods Hole 회의에서 유의미한 방법으로 수학적 구조를 가르쳐야 할 필요성이 강조되기 오래전에 유럽에서는 문제해결과 사고를 위하여 구조의 이해가 중요함 을 지적한 이론들이 형태(gestalt)심리학자들에 의해서 개발되고 있었다.

형태심리학의 핵심적인 이론은 사고와 지각은 구조를 이해하려는 인간의 선천 적인 경향에 의하여 지배된다는 것이다. 형태이론의 개념들은 다음의 그림에서 알 수 있다(참조. Luchins & Luchins, 1970). (a)에서 표시된 점들의 형상에 대 한 전형적인 반응은 그것이 다이아몬드

모양이라는 것이다. 그러나, (b)와 같이 점 두 개를 더하면, 삼각형의 모양이 되고, (c)와 같이 아래의 세 점을 지우고 위에 두 점을 더하면, 그 결과는 가운데 점이 중심점인 직사각형이 된다. (d)처 럼 한 점이 다른 시각적 형태의 외곽에 있는 것으로 지각된다면, 육각형이 된다.



이 간단한 예는 상황에 따라 물체를 지각하는 방법이 다르게 됨을 보여준다. 다 시 말해서, 형태이론에 의하면 앞의 예에서 점에 대한 지각을 그 점들의 어떤 모 양으로 보려는 경향에 의하여 결정된다고 본다. 즉, 조직 원리에 대한 경험을 통 하여 각 부분들이 더해진 전체적인 지각을 하게 된다.

Wertheimer(1945/1959)는 그 자신이 말한 생산적 사고(productive thingking) 즉, 구조의 이해에 기초한 사고를 입증하는데 관심이 있었다. 그는 평행사변형의 문제를 사용하여 생산적 사고의 조작을 밝혔으며, 그러한 사고의 필요성을 주장 하였다. 그에 의하면, 아동들이 평행사변형의 넓이를 구하는 방법을 다음의 그림 (a)에서 볼 수 있는 바와 같이, 왼쪽 꼭지점에서 밑변에 수직인 직선을 긋는 방 법을 보여 준 다음 수선의 길이를 측정하여 밑변의 길이에 곱하면, 이 평행사변 형의 넓이를 구할 수 있다고 배웠을 때 아동들은 이와 비슷한 평행사변형의 넓이는 훌륭히 구할 수 있었다. 그러나, (b)와 같은 평행사변형을 제시하고 넓이를 구하라고 했을 때는 아동들이 매우 어려움을 갖고 있었으며, 이 문제의 어려움은 아동들이 배운대로 왼쪽의 꼭지점에서부터 수선을 그으면, 그 수선은 밑변이 아 닌 밑변의 왼쪽에 내려지게 되어 공식을 적용할 수 없었기 때문이다.

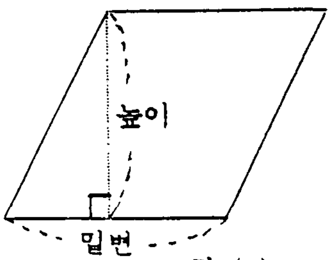


그림 (a)

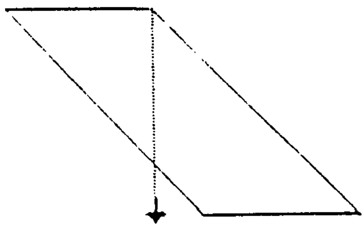


그림 (b)

Wertheimer가 입증하고자 했던 점은 아동들이 구조적인 원리(평행사변형을 직사 각형으로 동치 변형시키는 것과 같은)를 이해하지 않은 채 공식(알고리즘)을 학 습한 아동들은 유의미하

지 않은 '기계적인 학습'으로, 이와 같은 기계적인 학습 은 아무런 의미가 없는 방법으로 알고리즘을 적용하는 습관을 주입시키고, 사물 올 구조적인 전체로 보려는 아동들의 자연적인 인간의 경향을 무시하는데에서 비 롯된다고 보았다. 따라서, 유의미학습은 알고리즘이 구조적인 맥락에서 가르쳐져 야 한다고 주장했다. 다시 말하면, 학습은 사물을 전체로 지각하려는 인간의 경향에 따라 구조의 이해가 수반된 생산적 사고에 의해서 이루어져야 한다고 말할 수 있다.

Katona(1940/1967)는 구조와 의미에 대한 형태심리학자들의 관심을 좀더 전통 적인 실험 방법으로 연구하였다. 그는 일련의 실험을 통하여, 학습은 단지 일련의 연합이나 절차를 기억하는 것으로써 이루어지지 않는다는 것을 증명하려고 하였 으며, Wertheimer와 마찬가지로 학습을 무의미한(senseless) 학습과 유의미한 학 습으로 구분하고, 무의미한 학습은 기계적인 암기를 의미하고 유의미한 학습은 이해에 의한 학습으로, 일련의 개념들이 구조적으로 관련되어 조직되는 것으로 보았다.

그는 이들 두 가지 형태의 학습의 효과를 검사하기 위한 실험을 수행하였다. 한 예를 들면, 그는 세 집단의 학생들에게 1491625364964와 같은 수열을 서로 다 른 수업을 통하여 학습시켰다.

집단 1: 이 수들을 천천히 세 번 암송하여라. 예를 들면, "백 사십구, 백 육 십이,... "

집단 2: 완벽하게 그리고 정확하게 알 수 있도록 천천히 읽어라. "작년에 미 국의 총 생산액은 1,491,625,364,964달러였다."

집단 3: (이 집단에게는 프린트된 수열 이외에는 아무런 특별한 지시를 하지 않았다.)

이 수열을 학습한 직후의 검사에서는 세 집단간에 차이가 없이 모두 암송을 잘 하였다. 일주일 후, 아직도 그 수열을 암송할 수 있는가에 대한 검사에서 집 단 1은 질문 자체가 "타당하지 못하다"라고 말하였으며, 집단 2는 "GNP는 약 1조 4천억 달러였다"와 같이 부분적인 답을 할 수 있었다. Katona는 학습은 정보의 재조직에 의해서 이루어지는 것으로 보고, 유의미학습의 본질에 대하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

"(a) 암기에 의한 학습과 이해에 의한 학습은 학습과정이 서로 다르다.

(b) 이해에 의한 학습은 문제해결 - 원리의 발견 - 과 본질적으로 같은 과정 을 갖고 있다.

(c) 문제해결과 유의미학습은 모두 기본적으로 자료를 변화시키고 조직하는 활동으로 구성된다. 조직의 역할은 고유한 관계를 발견하거나 이해하는 것이다"(pp.53-54).

Katona의 결론에서, 우리는 발견학습의 의미를 생각케 된다. 발견학습을 지지하 는 학자들은 이 방법이 새로이 학습된 개념이나 원리들을 기억속에 어느 정도는 고정시킬 수 있기 때문에 보다 오랫동안 저장할 수 있으며 다른 새로운 상황에 더욱 일반화시킬 수 있다고 주장한다. 즉, 학생들이 그들 스스로 발견된 법칙을 공식화하도록 지도받았다면, 교사에 의하여 전달된 것을 그대로 수용한 학생들보 다 그 법칙이 더욱 내면화된다는 것이다.

그러면, 발견학습의 유의미성은 학습방법에 있는가? Gagn 와 Brown(1961)은 발견학습의 외형적 우수성은 학습방법이 아니라 학습되는 내용에 있다고 주장한 다. 그들은 그들의 연구 - 특정한 수열의 합을 구하는 공식의 획득 - 에서 이를 입증하였다. 즉, "법칙-예" 집단에게는 공식이 주어지고 나서 그 공식을 사용하 여 수열에 관한 문제를 연습시키고, 반면에 "발견"과

"안내된 발견" 집단에게는 각 수열의 합을 구하는 공식을 유도하도록 하였으며, "안내된 발견" 집단에게는 계속적으로 문제를 해결하는데 도움이 되는 힌트를 제공하였다. 실험의 결과 "안내된 발견" 집단은 새로운 문제 상황에서 가장 성공적이었고, "발견학습" 집단과 "법칙- 예" 집단의 순으로 수행능력에 차이가 나타났다. 안내된 발견학습과 법칙- 예 학습 프로그램간의 두드러진 차이점을 찾아보면, 안내된 발견학습 프로그램은 수열에서 수들간의 관계를 찾는 방법에 학생들의 주의가 집중된 반면에 법칙- 예 집단은 단순히 관계가 이루어진 공식을 적용하는 연습을 하였다는 것을 알 수 있 다. 결국, 이 두 프로그램은 서로 다른 내용을 가르친 것이다. 이 결과는 유의미 학습에서 중요한 것은 발견 그 자체가 아니라 원리의 이해라는 것을 의미한다.

문제해결에 대한 형태심리학자들의 주된 연구의 하나는 통찰(insight)의 현상 이다. 문제해결에서 통찰의 역할은 K hler(1925)의 노력으로 대부분의 형태심리 학자에게 소개되었다. Thorndike와 같은 연합심리학자들의 학습 이론은 문제해결 을 목표지향의 시행착오(trials and errors)의 관점에서 설명하려고 하였으나, K hler는 보다 전체적인 조작과정이 작용한다고 확신하였다. 그에 의하면, 문제 해결에서 문제의 기본적인 구조가 통찰에 의해서 이해가 되어야만 문제의 상황이 문제해결자에게 유의미하게 되며, 따라서 문제가 해결될 수 있다.

형태심리학자들은 훈련(drill)을 통한 학습방법은 구조에 기초한 방법으로 사 고를 자연스럽게 조직하는 경향을 억제한다고 주장한다. 형태심리학자들이 주장 하고 있는, 사고와 지각은 구조를 이해하려고 하는 - 형태를 찾으려고 하는 - 인 간의 경향은 어떤 의미에서는 구조지향적인 교수방법에 대한 논리적 근거로 제공 될 수 있다. 그러나, 그들의 연구에서 통찰의 중요성이 강조되었으나, 통찰의 과 정에 대해서는 충분히 설명되지 못하고 있다.

형태심리학자들이 인간의 인식과 통찰능력이 어떻게 변해가는가에 대해서 연 구가 충분히 수행되지 못한 것과는 달리, Piaget는 인지구조, 즉 사고의 구조에 관심을 갖고 아동들의 사고과정을 밝히려고 시도하였다. 그는 연구를 진행해 가 면서 인간의 사고 구조는 사회적, 물리적 환경과의 상호 작용을 통하여 사고의 구조가 개발되고 보다 더 복잡하게 형성해 나간다고 확신했다.

Piaget는 이 사고 구조의 발달(인지발달) 단계를 조작(operation)의 개념을 사용하여 감각운동기(0-2세), 전조작기(2-7세), 구체적 조작기(7-12세), 형식적 조작기(12세 이상)로 구분하고, 각각의 단계에서의 특징을 밝혔다. Piaget가 중 요하게 생각한 조작은 특별한 종류의 사고활동(사물을 알기 위한 활동)으로, 가 역성은 조작적 사고 구조의 중요한 특징이다. 이 가역성은 다른 활동을 수행함으 로써 원래의 상태로 되돌릴 수 있다는 것을 의미하는 성질이다.

Piaget에 의하면, 사물의 지각적 특징이나 배열에 의존하여 가역성을 생각할 수 없는 것은 전조작기 사고의 특징이며, 구체적 조작기에서는 행동을 가역화시 킬 수 있을 뿐만 아니라 여러가지 가설들을 검증할 수 있으며, 형식적 조작기에 서는 추상적으로 사고하고 문제의 요소에서 변인들을 체계적으로 추출할 수 있 다.

그러나, 미국의 일부 심리학자들은 Piaget의 이론에 대하여 비판적인 시각을 갖고 다른 대안을 추구해 왔다(Resnick, 1981).

그 첫번째는 Piaget의 인지발달 단계에 관한 것으로 각 단계가 정밀하게 분석 될 것인가에 대한 의문이다. Piaget의 연구에 관한 대부분의 보고서들, 특히 수 업 또는 교육과 관련하여 정보를 제공하려는 보고서들은 주로 발달 단계의 계열 성 - 감각운동기, 전조작기, 구체적 조작기, 형식적 조작기 - 을 강조하면서 이 단계들은 마치 아동들의 생애에서 이산적인 기간인 것처럼, 또 각 기간동안에 기 대될 수 있는 사고의 형태는 분명하게 제한되는 것처럼 종종 주장되어 왔다. 그 러나, 단계 이론에 대한 폭넓은 분석과 Flavell(1971)이 연구한 자료에서 이 단 계들은 별로 관계가 없다는 것이 주장되고 있다. 즉, 아동들은 수의 보존과 같은 과제에 대하여 가역적으로 그리고 조작적으로 행동할 수 있으나(구체적 조작기의 특성), 무게의 보존과 같은 과제에 대해서는 전조작적으로 행동한다는 것이 밝혀 졌다. 이 주장은 다시 말하면, 보존개념과 같은 동일한 논리적 구조를 획득한 아 동이 수의 보존개념을 인식할 수 있으면 무게에 대한 보존개념도 인식할 수 있어 야 하는데 그렇지 못하다는 것이다. 이와 같은 현상은 아동들의 일상생활에서의 경험과 관계가 있는 것으로 설명되어 질 수 있다. 즉, 수에 대한 경험은 일찍부 커 가질 수 있으나, 무게에 대한 경험은 상당히 늦게 가질 수 있기 때문이라고 볼 수 있다. 이와 같은 해석은 수학적 개념에 관한 경험을 다양하게, 폭넓게 시 킴으로써 아동들의 논리적 구조의 획득과 적용력을 향상시킬 수 있다는 것을 시 사한다.

두번째 의문은, 어떤 아동이 하나의 특정한 과제(Piaget가 실험을 한 과제와 같은)를 수행하지 못한다고 해서 그 과제에 기저가 되는 논리적 구조에 대한 능 력이 부족하다고 단정할 수 있는가에 대한 의문이다.

Trabasso와 그의 동료들(1978)은 Piaget가 실험한 포함관계의 논리적 구조 발 달에 대한 비판으로 그들의 연구를 통해서 첫째, 아동들에 대한 질문 방법에(질 문에 포함된 대상이 어떠한 종류인가에)따라 포함관계 문제가 쉽게 또는 어렵게 해결될 수 있고, 둘째로는 질문에서 주어지는 조건을 아동이 이해하는데에서 오 류를 범하게 될 수 있다는 점을 지적한다. 따라서, Piaget가 실험을 한 것과 갈 은 포함관계 과제를 수행할 때 실패했다고 해서 집합의 포함관계 개념을 발달시 키지 못했다고 주장할 수 없음을 보인다. 집합의 포함관계에 대한 정확한 수행 능력은 몇 가지의 독립적인 변인들 - 사물에 관한 지식, 언어적 구성에 대한 이 해, 위계적으로 대상을 분석하려는 경향 - 에 의존한다고 볼 수 있다.

마지막 비판은, 아동들은 그들의 정상적인 사회 환경에서 최적의 발달을 하도 록 생물학적으로 프로그램 되어있기 때문에 교육은 아동들의 논리적 기능의 질을 촉진시키거나 향상시키는데 별로 도움이 안된다는 Piaget의 주장이다. 다시 말하 면, 어떤 특정한 개념을 아동들에게 학습시키려면, 그 개념을 이해향 수 있는 최 적의 시기(그 개념을 이해할 수 있기 위해서는 그 개념에 관련된 자발적인 개념 이 형성된 후)에 지도가 되어야만 학습의 효과가 있다는 Piaget의 이론에 대한 비판이다.

Gelman(1969)은 수와 길이의 보존과제에 대한 훈련 - 갯수, 길이 등과 같은 양적 속성을 동시에 두 가지 이상을 고려할 수 있도록 한 훈련 - 을 통하여 보존 능력을 향상시킬 수 있다고 보고, 실험을 통하여 이를 입증하였으며, Bearison (1969)은 액체의 양을 비교하는 특별한 전략을 가르침으로써 양의 보존개념을 형 성시키는 학습에 효과가 있었음을 역시 실험을 통하여

보였다.

Gelman과 Bearison의 실험은 아동들의 논리적 구조의 발달을 가속화시킬 수 있는 교육적 시사점을 제공한다. 그러나 이 두 학자에 의한 실험은 아동들을 일 대일로 학습한 결과로서, 더 큰 규모의 학습에서의 교육적 방법을 구체화하는데 에는 아직도 문제점을 내포하고 있다. 그 이유는 수업을 설계하는데 필요한 아동 들의 발달에 따른 구조의 획득과정, 다시 말하면 능동적인 학습자에 의한 경험의 구조화의 과정에 대한 구체적인 심리학적 모델이 제시되지 못하고 있기 때문이 다. 만약에 이와 같은 모델이 제시될 수만 있다면 교육과정이나 수업의 설계에서 매우 유용하게 활용될 수 있을 것이다. 이에 대해서는 자신을 '신피아제주의자 (Neo-Piagetian)'라고 부른 Case(1978)의 연구에서 시사점을 찾을 수 있다.

Case는 Piaget의 인지발달 이론의 기본적인 특징을 직접적으로 받아들인다. 그러나, 그는 Piaget 이론은 기능적(functional)이기보다는 구조적(structured)이 기 때문에 수업에 Piaget 이론을 적용하는데는 많은 어려움이 있다고 주장하고, Piaget 이론의 교육적 시사점에 대하여 분석하려고 노력하였다.

Case는 아동들이 특별한 과제에 대하여 겪는 주요 어려움은,

(i) 특별한 과제에 적용할 수 있는 스키마(schemes)
(ii) 동시에 활성화시킬 수 있는 스키마의 수
(iii) 과제를 수행하는데 사용되는 전략

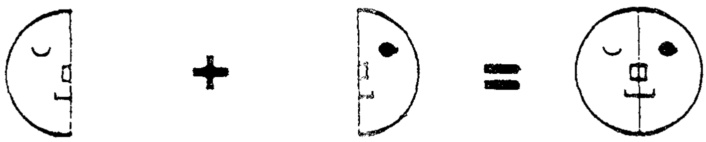
의 기능(function)에 기인한다고 주장하면서, 이와 같은 어려움을 극복시키기 위 해서는 첫째, 아동들이 이해할 수 있는 친숙한 요소들을 충분히 갖고 있는 과제 들을 아동들에게 제시함으로써 특별한 과제에 관련된 스키마를 형성시키고, 둘 째, 두 가지 이상의 스키마를 동시에 활성화시키기 위한 훈련을 시키고(예를 들 면, 크기가 다른 두 비이커에 들어 있는 물의 양을 비교하기 위해서는 높이를 비 교해 보고, 폭의 차이를 비교하는 세 가지의 스키마가 필요하다. 왜냐하면, 폭의 비교가 진행되는 동안에도 높이에 대한 인식이 필요하기 때문이다. 이와 같은 경 우에 아동들은 '갈등관계'(한 비이커의 물의 높이는 다른 비이커보다 작지만 폭 의 크기는 더 큰)를 인식하게 되고, 이 인지적 갈등관계는 새로운 발달 단계로 전이하게 하는 즉, 아동들이 갈등관계를 해결하게 하는 사고 과정의 촉매제가 될 수 있다). 세째, 동시에 다루어야 할 스키마의 수를 줄이기 위한 방법(소위 정보 처리 이론에서 말하고 있는 작동기억의 용량의 제한성때문에 필요하다)으로 기본 적 개념과 간단한 해결전략을 가르침으로써, 과제들은 종종 굉장히 단순화되어 과제 해결에 겪는 어려움을 극복시킬 수 있다고 주장한다.

Case는 '3+ = 7'과 같은 미지수가 있는 덧셈 문제를 유치원 아동들을 대 상으로 다음과 같은 일련의 연습을 제시했다.

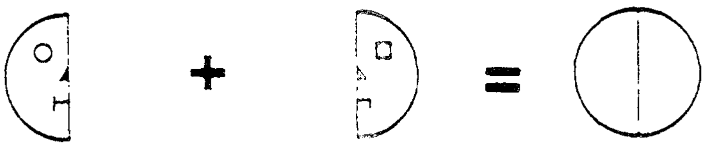
(a) 이 얼굴들은 서로 같습니까? 이것(=)은 그들이 같다는 것을 말합니다.

여기 두 얼굴이 있습니다. 한 얼굴을 다른 얼굴과 똑같게 만들 수 있습니까? 얼굴 모양이 똑같게 만들어 보십시오.

이것(+)은 함께 붙이라는(더하라는) 것을 말합니다. (왼쪽에 있는) 이것을 함 께 붙이면, (오른쪽에 있는) 이 얼굴과 똑같은 얼굴이 될 수 있습니까?



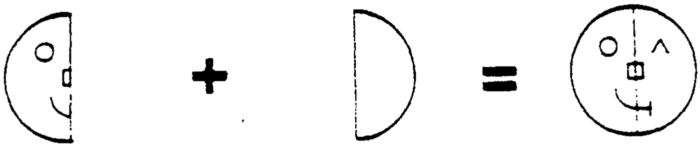
이것(+)은 함께 붙인다는 것을 기억하십시오. 오른쪽의 얼굴을 왼쪽의 얼굴과 똑같게 만들 수 있습니까?



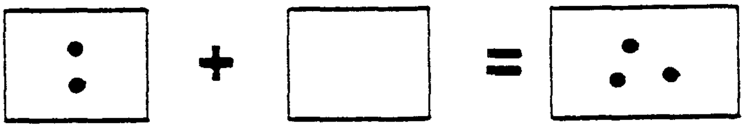
(b) 이것(=)은 양쪽을 같게 만든다는 것을 기억하십시오. 왼쪽의 얼굴을 오른 쪽의 얼굴과 똑같게 만들어 보십시오.

이것(+)은 함께 붙이라는(더하라는) 것을 기억하십시오. 왼쪽을 오른쪽과 같 게 만들 수 있

습니까?



(c) 수를 가지고 해보십시오.



숫자를 가지고 해보십시오.

$$\boxed{3} + \boxed{} = \boxed{7}$$

절차 (a)는 아동들이 미지수가 있는 덧셈 문제의 기본적인 형태와 친숙하도록 하는 것으로, 표현(등식의 형태, 연산기호)를 강조하였다(미지수가 있는 덧셈 문 제의 스키마 형성). 이 단계는 또한 수들을 읽고, 세고, 기억할 필요성을 제거함 으로써 관련된 스키마의 수를 줄일 수 있다. 절차 (b)는 등식의 좌변에서 미지항 을 구하는 전략을 가르쳐주기 위한 것으로, 관련된 표현(+와 =)의 의미와 중요성 을 지적하고, 필요한 과제를 수행하는데 있어서 연습의 중요성을 상기시킨다(이 와 같은 형태의 덧셈에서 1학년 아동들은 미지항을 뺄셈으로 하기 보다는 덧셈으 로 해결한다).

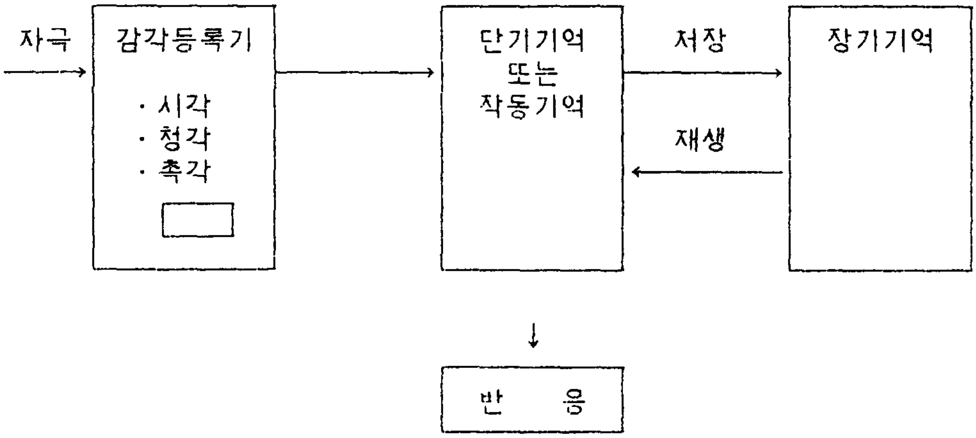
수학 학습에서의 개념적 접근 방법은 앞에서 고찰한 바와 같이 많은 학자들에 의해서 지지를 받고 있음에 틀림없다. 그러나 이 개념적 접근 방법이 왜 수학 학 습에서 유의미한지, 또 유의미하다는 뜻은 어떤 뜻인지에 대해서는 구체적으로 분명하지가 않다. 이를 위해서는 정보처리 심리학자들의 노력을 살펴 볼 필요가 있다.

정보처리 이론은 다음과 같은 세 가지의 가정(assumptions)을 세운다.

첫째, 자극과 반응 사이에는 어떤 한정적인 시간을 요하는 일련의 처리단계가 있다.
둘째, 자극이 여러 단계를 통하여 처리될 때, 자극의 형태와 내용은 일련의 변화(changes) 또는 변환(transformation)을 거친다.
세째, 한 개 또는 여러 개의 처리 단계에 있어서 처리체계(processing system)는 제한된 용량을 갖고 있다. 즉, 동시에 실행할 수 있는 처리의 양이 제한되어 있다(Howard,

1983, pp.16-17).

이와같은 가정에 따라 인간의 정보 처리 체계는 기능상으로 다음 그림과 같은 세 종류의 기억 체계 - 감각등록기(sensory register), 단기기억(short-term memory) 또는 작동기억(working memory, WM), 장기기억(long-term memory, LTM) - 로 이루어져 있다고 본다(참조: 전 평국, 1991).



정보처리 이론에 의하면, 감각등록기를 통하여 입력된 정보는 작동기억을 통 하면서 그 정보를 언어적, 시각적, 또는 의미적으로 코딩된 후 장기기억에 저장 되며, 많은 이론가에 따르면 영원히 저장된다고 한다. 작동기억의 기억용량은 매 우 제한적이나(때문에 필요한 정보를 기억하기 위해서는 리허설이 필요하다), 장 기기억의 기억용량은 무한하며, 또한 장기기억에 저장된 정보들은 필요할 때마다 수시로 재생될 수 있으며, 필요한 정보가 재생되지 않는 이유는 그 정보가 망각 되거나 소멸되어서가 아니라 재생하는데 실패하기 때문이라고 본다.

Tulving(1972)은 장기기억을 일화적기억(episodic memory)과 의미적기억 (semantic memory)의 두 종류로 구분한다. 전자는 특별한 시간, 또는 장소에 대 한 경험과 관련된 정보이고, 후자는 특별한 시간이나 장소에 대한 경험과 관련된 정보가 아닌 일반적인 개념에 대한 지식이다. 그러나, 이 두 기억 사이의 구별이 항상 뚜렷한 것은 아니다. 왜냐하면, 개념에 대한 일반적인 지식은 때때로 특별 한 시간이나 장소와 결합된 경험을 통하여 얻어지기 때문이다.

Quillian(1968)은 이 의미적 기억의 구조에 관한 네트워크(network) 모델을 처음으로 제안하였다. 그는 장기기억에 저장된 지식은 논리적이고, 위계적인 형 태로 구조화되어 있다고 가정하고, 이를 컴퓨터를 사용한 실험을 통하여 입증하 였다.

이 모델에서, 의미적 기억 구조의 순서에 대하여 (어떤 개념이 상위 개념이고 하위 개념인가에 대한) 일부 학자들에 의해서 약간의 문제점이 드러나기는 하였 으나, 대부분의 인지학자들은 인간의 지식이 위계적이고 논리적으로 구조화되어 있다는 사실에 대하여는 동의를 하고 있다.

의미적 네트워크 이론은 인간의 사고능력과 인간이 추론하는 방법을 설명할 수 있다. 다시 말하면, 저장된 정보(지식)들 사이의 연결 순서와 상태에 따라 인 간의 사고 능력과 추론의 가

능성 여부를 판단할 수 있게 된다. 결국, 유의미학습 이 이루어졌다고 하는 것은 새로운 정보(지식)가 기존의 정보(지식)와 연결이 되 어진 상태를 말하게 된다.

이에 대한 예로써 Greeno(1978)가 제시한 산술 연산을 위한 지식의 구조를 살 펴보자. 다음의 그림에 나타난 구조에 따르면, 곱셈은 '$\times n$'으로, 나눗셈은 '$\div n$'으로 정의되어 있으며, 화살표의 방향은 관계를 나타낼 뿐, 처리의 방향을 나타내는 것은 아니다.

그림 (a)

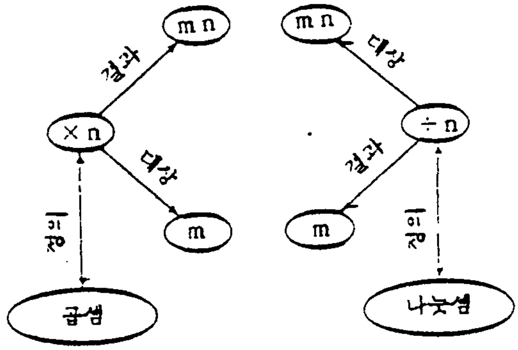


그림 (a)는 곱셈과 나눗셈이 각각 독립적으로 학습되었을 때의 지식의 구조를 나타낸다. 즉, 곱셈과 나눗셈의 관계에 대한 유의미한 학습이 이루어진 상태의 지식의 구조는 그림 (b)와 같이 나타내어 질 수 있다.

그림 (b)

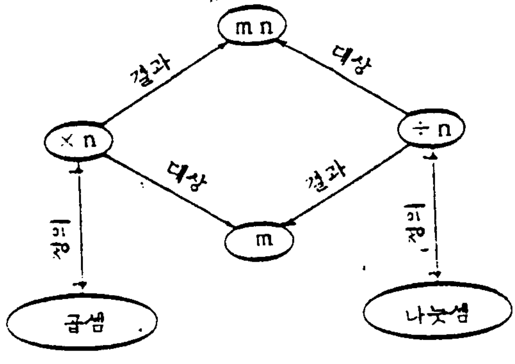


그림 (b)와 같은 곱셈과 나눗셈이 연결된 구조는 곱셈과 덧셈, 덧셈과 뺄셈, 뺄셈과 나눗셈의 관계에 의해 더욱 복잡한 지식의 구조를 형성하게 된다. 즉, 아 동은 유의미한 학습을 통하여 서로 관련된 지식을 통합함으로써 지식을 청크 (chunk)화하게 된다.

정보처리 학자들에 의해서 제시되고 있는 '지식의 구조화'는 왜 우리가 수학 학습에서 개념적 접근 방법을 시도해야 하는가에 대한 충분한 이유를 설명해 주 고 있다.

III. 맺는말

'학습은 기존의 경험에 새로운 경험을 통합함으로써 의미를 창출하는 하나의 과정'(Holmes, 1985, p.6)으로서, 수학 학습은 아동들로 하여금 수학적 개념이나 원리를 창출할 수 있는 수학적 아이디어를 개발할 수 있도록 자극이 주어져야 한 다. 수학적 아이디어의 개발은 아동들의 지적 조작 즉, 번역하기, 비교하기, 추 론하기, 예측하기 등등과 같은 인지적 과정을 필요로 하

게 되며, 이와 같은 인지 적 과정은 아동이 갖고 있는 수학적 경험(지식)에 의존하게 된다. 즉, 아동들의 수학 학습이 그들의 경험과 연결되지 않은 상태에서 기계적인, 설명위주의, 어른 의 사고에 의한 방법으로 이루어질 때 수학은 지루하고, 재미없고, 어려워질 수 밖에 없다. 따라서, 다양하고 폭넓은 수학적 경험은 그와 관련된 새로운 수학적 개념, 원리의 학습에 유용한 '준비' 개념이 될 수 있다.

앞에서 고찰한 바와 같이 아동의 수학 학습이 유의미학습이 되고, 아동의 수 학적 능력의 발달을 가속화 또는 촉진시키기 위해서는 다음과 같은 점들이 고려 되어야 한다.

첫째, 아동들의 일상 생활의 경험을 수학화하는 것이 필요하다.

둘째, 일상 생활에서 접하기 어려운 수학적 경험은 교사의 의도된 방법으로, 아동에게 친숙한 형태로 제공되어져야 한다.

세째, 특정한 하나의 수학적 개념을 형성시키거나 과제를 수행할 수 있는 능 력을 신장시키기 위해서는 지속적이고 반복적인 나선형식의 방법을 택하는 것은 매우 유용하다.

네째, 수학 학습의 지도는 개념적 접근 방법인 구조지향적이어야 한다.

다섯째, 수학적 개념의 획득이나 과제의 수행능력은 아동 자신의 노력에 의해 서 구성될 수 있도록 되어져야 한다.

여섯째, 적절한 훈련(drill)과 연습(practice)은 수학적 지식의 파지와 수학 적 기능의 획득에 유용하다.

참　고　문　헌

1. 전평국, 수학적 사고력 신장을 위한 산수과 교수 학습에서의 소고 - 정보처리 이론을 중심으로 -, 제 15회 산수과 교육 세미나. 한국초등 수학교육연구회, 1991.
2. Bearison, D.J., *Role of measurement operations in the acquisition of conservation.*, vol. 1, Developmental Psychology,, 1969, pp. 653-669..
3. Brownnell, W.A., *The development of children's number ideas in the primary grades.*, Chicago: The University of Chicago., 1928.
4. ________, *Psychological considerations in the learning and the teaching of arithmetic. The teaching of arithmetic, the 10th yearbook of the NCTM.*, New York: Teachers College, Columbia University., 1935.
5. Bruner, J.S., *The process of education. Cambridge, Mass.*, Harvard University Press., 1960.
6. Case, R. (1978)., *Piaget and beyond: Toward a developmentally based theory and technology of instruction. In R. Glaser(Ed.), Advances in instructional Psychology(Vol.1).*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 1978.
7. Dienes, Z.P., *Building up mathematics.*, New York: Hutchinson Educational Ltd., 1960.
8. ________, *Fractions: An operational approach.*, New York: Herder & Herder., 1967.
9. Flavell, J.H., *Stage-related properties of cognitive development.*, vol. 2, Cognitive Psychology,, 1971, pp. 421-453..
10. Gagn ,R.M., & Brown,L.T., *Some factors in the programming of conceptual learning.*, Journal of Experimental Psychology, **62** no. 4 (1961), 313-321..

11. Gelman, R., *Conservatoin acquisition: A problem of learning to attend to relevant attributes.*, Journal of Experimental Child Psychology, 7, (1969), 167–187..
12. Greeno, J.G., *Understanding and procedural knowledge in mathematics education.*, vol. 13, Educational Psychologist,, 1978, pp. 262–283..
13. Katona, G., *Organizing and memorizing: Studies in the psychology of learning and teaching.*, New York: Hafner. (Originally published 1940)., 1967.
14. K hler, W., *The mentality of apes.*, New York: Harcour, Brace & World., 1925.
15. Luchins, A.S., & Luchins, E.H., *Wertheimer's seminars revisited: Problem solving and thinking(Vol.).*, Albany, NY: Faculty-student Association, University of New York., 1970.
16. Piaget, J., *Structurism.*, New York: Harper& Row., 1970.
17. Quillian,M,R., *Semantic memory. In M.Minsk(Ed.),*, Semantic information processing, Cambridge, Mass.: MIT Press., 1968.
18. Resnick, L.B., & Ford, W.W., *The psychology of mathematics for instruction.*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 1981.
19. Thorndike, E.L., *The psychology of arithmetic.*, New York: The Macmillan Co., 1922.
20. Trabasso, I., & et al., *How to children solve-inclusion problems? In R.Siegler(Ed.), Children's thinking: What develops?*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates., 1978.
21. Tulving,E., *Episodic and semantic memory. In E.Tulving & W.Donaldson (Eds.),*, Organization of memory, New York: Academic Press., 1972.
22. Wertheimer, M., *Productive thinking.*, New York: Harper & Row. (Originally published 1945)., 1959.