

有限要素法을 이용한 平板의 動特性 研究
Analysis of Dynamic Characteristics of Rectangular Plates by Finite Element Method

태 순 호* 이 태 연* 허 문 회**

ABSTRACT

Analysis of Dynamic Characteristics of Rectangular Plate by Finite Element Method.

Dynamic characteristics of a rectangular plate with opening in it is studied by finite element method. To investigate these characteristics 12 degrees of freedom membrane finite element in used.

The rectangular membrane finite elements are defined by specifying geometry, internal displacement functions and strain-displacement relations. Then, the governing equation for the finite element is derived by energy method. To derive the mass matrix and stiffness matrix of the element, expressions for strain and kinetic energy in terms of the node displacement are generated. In constructing the overall structure matrix, the matrix of each elements are superposed and partitioned by applying the given boundary condition to obtain a nonsingular matrix. To find the natural frequencies and vibration modes, the eigen values and the corresponding eigen vectors are computed by the computer using well known Jacobi power method.

In order to verify the capability of the membrane finite element, a flat rectangular plate is analyzed first, and the result is compared with well known analytical results to show the good agreement.

A rectangular plate with opening in it is analyzed with the same finite element. The results are presented in this paper. Unfortunately, the literature study could not provide with some results to compare, but the results reveal that the output of this research is physically reasonable. And the results of this research are useful not only in practice but also for the future experimental research in comparison purpose.

* 正會員 : 서울산업대학

** 正會員 : 충주공업전문대학

I. 序 論

構造物이나 機械를 설계함에 있어서 構造物의 動的 特性 解析은 構造物의 固有振動數 및 고유모우드를 구하여 구조물에 振動이 일어날 때 共振현상을 피해 구조물이 파괴되지 않도록 하기 위하여 필수적으로 고려하여야할 중요한 工學的인 문제이다.

공학적인 문제를 해석하는 방법으로서 解析的인 방법과 數值的인 방법이 있다. 해석적인 방법에는 嚴密解와 近似解가 있으며 엄밀해는 微分方程式에 의하여 구하고, 근사해는 Rayleigh-Ritz, Galerkin 등의 방법이 있는데 이 근사해는 變分原理(Variational calculus)에 의한다. 그러나 문제의 영역 즉, 함수가 정의되는 영역이 幾何學的으로 불규칙할 때에는 경계 조건의 적용이 극히 어려워 근사해는 간단한 형상의 문제에만 가능하다. 그러므로 기하학적으로 불규칙한 구조물의 문제는 해석적인 방법으로 거의 해석이 불가능하며 수치해석법에 의해서만 해석이 용이하다.

수치해석법의 대표적인 것으로 有限差分法과 有限要素法등이 있으며, 유한요소법은 해석하고자 하는 구조물을 有限要素라고 불리는 材料조각의 結合體로 代換한 후 系의 에너지에 대하여 物理學的인 원리를 적용하므로써 系의 통제방정식을 매트릭스형식으로 導出한다¹⁾. 유한요소법에 의한 해석으로는 O.C.Zienkiewicz가 외팔판(cantilever plate)의 진동에 대해²⁾, Joga Rao는 주변 고정된 圓板 内部에 구멍을 갖는 경우의 진동에 관하여 해석을 시도하였으며³⁾, 그외에 많은 사람들에 의해 각종의 형태를 갖는 판진동에 대해 여러가지 경계조건을 적용시켜 해석하였다. 이들의 결과는 엄밀해 및 실험결과치와 상당히 근접함이 널리 알려져 있다⁴⁾⁵⁾⁶⁾.

구조물의 진동을 유한요소법으로 해석함에 있어서 구조물을 유한요소의 결합체로 대체한 다음 이 계에 에너지원리를 적용하므로써 매트릭스형식의 통제방정식을 유도한다⁷⁾. 사각형판의 진동문제에 있어서 12自由度 membrane 유한요소를 사용했으며 이 유한요소의 성능을 확인하기 위하여 판의 動的 特性인 固有振動數와 振動모양을 구하고 기발표된 해석학적 결과와 비교

하였다. 비교 결과는 만족할만큼 일치하였으며 본 유한요소의 정확도에 대한 확정을 갖고, 構造力學 分野에 있어서 실제의 문제로서 구조물을 형성하는 부재의 기하학적 모양이 불규칙하거나 불연속을 갖는 경우의 진동 문제를 해결하는 방법을 제시하기 위해, 판의 내부에 불연속을 갖는 경우의 진동 문제를, 앞에서 사용하였던 membrane 유한요소로서 해석하여 그 결과를 제시하였다.

본 研究의 目的은 첫째로, 판의 동특성 해석을 위해 고유진동수와 진동모우드를 구하여 엄밀해와 비교함으로써 선정된 유한요소의 합당성을 認定하고, 둘째로 불연속을 갖는 구조물의 진동문제를 해결하는 방법을 提示함으로써 앞으로의 실험적 연구 결과와 비교 검토할 수 있는 자료를 마련함에 있다.

II. 理論 解析

2-1. 有限要素의 幾何學的 形態와 内部變位函數

유한요소는 요소의 기하학적 형태, 節点의 自由度(nodal degree of freedom), 내부변위함수(internal displacement function) 및 變形率-變位關係(strain-displacement relation)에 의하여 그 성격이 지정되는 것이며, 이들 중 어느 한 가지만 다를지라도 동일한 유한요소가 될 수 없으며 따로 定義되어야 한다.

유한요소법을 이용한 이론해석에 있어서 내부변위의 적합성을 지닌 四角形 유한요소를 사용하여 판의 가장자리가 단순지지된 경우의 진동과 내부에 不連續을 갖는 판의 진동을 해석하였다.

사각형 판 유한요소의 기하학적 형태는 Fig. 1과 같

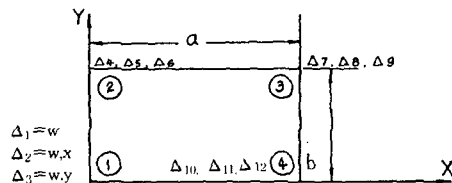


Fig. 1 Rectangular plate finite element

으며 절점의 자유도는 변위 w와 변위 w의 일차 도함수 w, x 및 w, y로 하여 모두 12자유도가 되게 하였다⁸⁾.

내부변위함수(internal displacement function)는 유한요소의 특성을 부여하는 중요한 요소이며 일반적으로 補間函數(interpolation function)를 사용하여 선정되어지고 있다. 본 연구에서는 각 절점의 자유도가 변위와 일차도함수로 되어 있으므로 4차의 Hermitian 다항식의 특성을 이용하고 이들의 선형조합으로서 다음 식 (1)과 같이 내부 변위함수를 구성한다.

$$\begin{matrix} H_1(x) \\ H_2(x) \\ H_3(x) \\ H_4(x) \end{matrix} = \frac{1}{a^3} \begin{bmatrix} a^3 & 0 & -3a & 2 \\ 0 & a^3 & -2a^2 & a \\ 0 & 0 & 3a & -2 \\ 0 & 0 & -a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

식(1)을 그대로 사용하면 積分등에 있어서 함수의 領域이 [0, a]가 되므로 변수 $\xi (\xi = x/a)$ 를 정의하여 無次元화 하는 것이 계산상 간편하게 되고 이 때 함수의 영역은 [0, 1]로 바뀌게 된다. Hermitian 다항식 $H_i(x)$ 를 간편하게 X_i 와 Y_i 로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix} = b \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서 $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ 이며 Matrix앞에 있는 ab는 해당 행만에 곱해 주는 것을 나타낸다. 내부변위함수는 Hermitian다항식의 특성에 의하여 각 절점에서 절점의 자유도 값을 갖는다. Hermitian다항식의 특성은 Table 1. 과 같고 이를 기하학적으로 도시한 것이 Fig. 2이다⁸⁾. 이와같은 특성을 이용하여 유한요소의 내부변위함수 $w(x,y)$ 를 식(4)와 같이 지정할 때 $X_i Y_j$ 는 Table 2.와 같은 특성을 가지며, $w(x,y)$ 의 4개 절점에 있어서의 경계조건과 유한요소의 적합성을 만족하기 위한 $w(x,y) = \sum X_m Y_n \Delta_i$ 에서의 i,m,n은 Table 3. 과 같이 선정되어야 한다.

Table 1. Characteristics of first order Hermitian polynomials

coord X_i, X_i'	$\xi = 0$	$\xi = 1$	coord Y_i, Y_i'	$\eta = 0$	$\eta = 1$
X_1	1	0	Y_1	1	0
X_2	0	0	Y_2	0	0
X_3	0	1	Y_3	0	1
X_4	0	0	Y_4	0	0
X_1'	0	0	Y_1'	0	0
X_2'	1	0	Y_2'	1	0
X_3'	0	0	Y_3'	0	0
X_4'	0	1	Y_4'	0	1

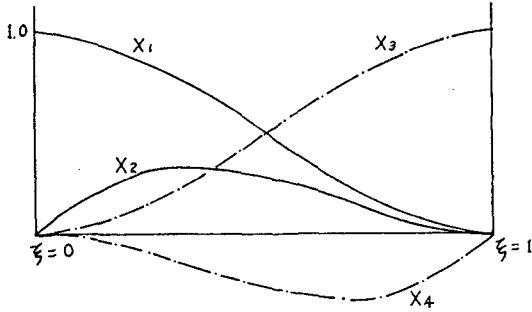


Fig. 2 Geometric shapes of first order Hermitian functions

$$w(x,y) = \sum f_i(x,y) \Delta_i = \{f\}^T \{\Delta\} = \{X_m Y_n\}^T \{\Delta_i\}$$

여기서 $f_i(x,y) = X_m(x)Y_n(y)$

Table 2. Characteristics of combined Hermitian polynomials

Coordinate	Non-zero term ix $X_i Y_j$
$\xi=0 \quad \eta=0$	$X_1 Y_1=1, X_2 Y_1=1, X_1 Y_2'=1$
$\xi=0 \quad \eta=1$	$X_1 Y_3=1, X_2 Y_3=1, X_1 Y_4'=1$
$\xi=1 \quad \eta=1$	$X_3 Y_3=1, X_4 Y_3=1, X_3 Y_4'=1$
$\xi=1 \quad \eta=0$	$X_3 Y_1=1, X_4 Y_1=1, X_3 Y_2'=1$

(Note) $X_i' = \frac{\partial X_i}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial X_i}{\partial \xi}, Y_i' = \frac{\partial Y_i}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial Y_i}{\partial \eta}$

Table 3. Values of subscripts m, n of internal displacement function $w(x,y) = \{X_m Y_n\}^T \{\Delta_i\}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m	1	2	1	1	2	1	3	4	3	3	4	3
n	1	1	2	3	3	4	3	3	4	1	1	2

이와같은 내부변위 함수를 가지는 삼각형 유한요소 는 삼각형 유한요소와는 달리 각 경계면선상에서의 변 위뿐만 아니라 x방향과 y방향으로의 기울기까지 같아 지게 된다. 따라서 삼각형 유한요소에 비해서 더욱 정 확해에 가까운 값을 구할 수 있다.

2-2. 變形率—變位關係

판의 진동을 고려할 때 변형을 변위관계식을 유도하 기 위해 다음과 같은 가정을 한다⁹⁾.

1. 板은 理想的으로 평평하며 一定한 두께를 갖는다.
2. 板은 均質이며 等方性인 재료로 구성된다.
3. 板의 두께는 짧은 측면 치수의 1/10미만이 되도

록 얇다.

4. 板은 굴곡성의 변위를 하며, 그 변위량은 판의 두께에 비해 작으며, 변형 중이나 변형 후 단면은 항 상 중립면에 대하여 수직이다.

5. 회전 관성력과 진단 변형은 무시한다.

이와같은 가정으로 부터 판에 관한 변형율—변위관 계식을 구하면 다음과 같이 된다^{10),11)}.

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 z 는 중립면으로부터 임의 변형점까지의 거리이며 u, v, w 는 각각 x, y, z 방향의 변위이다. 식(5)에서 판의 두께가 매우 작은 membrane의 경우를 고려하면, x 방향의 변위 u 와 y 방향의 변위 v 및 변형점의 중립면으로부터의 거리 z 를 무시하고 식(6)으로 표시할 수 있고 이 식(6)을 membrane strain이라 한다¹⁾.

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\}^2 \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^2 \\ \epsilon_{xy} &= \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

2-3. 에너지 표현식(Energy Expression)

회전 관성력에 의한 영향을 무시하고 판진동에서 중요한 영향을 주는 휨변형에 의한 운동에너지만을 고려하면 운동에너지 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T &= \frac{\rho h}{2} \iint_A \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} \right\}^2 dx dy \quad (h: \text{판의 두께}) \\ \text{또는 } T &= \frac{m}{2} \iint_A \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} \right\}^2 dx dy \end{aligned} \quad (7)$$

본 연구에서 판의 두께가 매우 얇은 경우를 고려하면 굽힘작용에 의한 저항을 갖지 않는 탄성적 membrane으로 해석할 수 있다. 이 경우는 Fig. 3에 나타난 바와 같이 굽힘 강성을 무시하면 평면 작용력 (inplane force or membrane force) N_{xx}, N_{yy} 만이 작용하게 되므로 판의 평면작용력 N_{xx}, N_{yy} 를 다음과 같이 가정한다. 또 전단 탄성에너지를 무시하면 탄성 에너지 U 는 식(8)로 표시된다.

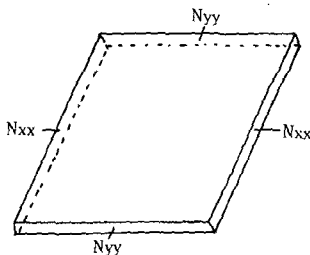


Fig. 3 Rectangular membrane under uniform tension

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \bar{T} \\ N_{yy} &= \beta \bar{T} \\ N_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= \iint_A (N_{xx} \epsilon_{xx} + N_{yy} \epsilon_{yy}) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \bar{T} \iint_A \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \beta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \end{aligned} \quad (8)$$

여기에서 T 는 x 축 방향의 단위폭당 인장력 N_{xx} 이고 β 는 N_{yy}/N_{xx} 이다.

2-4. 要素의 質量 및 剛性 매트릭스

변위 w 는 식(9)과 같이 표시하면 w 는 식(10)와 같이 되며 식(10)을 운동에너지식인 식(7)에 대입하면 식(11)이 얻어진다.

$$w(x, y, t) = W(x, y) e^{j\omega t} \quad (9)$$

$$w(x, y, t) = \frac{\partial w}{\partial t} = j\omega W(x, y) e^{j\omega t} = j\omega W \quad (10)$$

$$T = -1 / 2m\omega^2 \Gamma \Delta \{M\} \{\Delta\} \quad (11)$$

여기서 질량 매트릭스의 요소 M_{ij} 는 다음과 같다.

$$M_{ij} = \iint_A f_i f_j dx dy \quad (12)$$

식(12)의 $f_i(x, y)$ 는 $f_i(x, y) = X_m Y_n$ 이며 i, m, n 의 관계는 Table 3.에 주어졌다.

한편 탄성에너지는 $[K]$ 를 강성매트릭스라 하고 식(13)과 같이 표시되며, 또한 강성매트릭스의 요소 K_{ij} 는 식(14)와 같다.

$$U = T / 2 \Gamma \Delta \{K\} \{\Delta\} \quad (13)$$

$$k_{ij} = \iint_A (f_i, x f_j, x + \beta f_i, y f_j, y) dx dy \quad (14)$$

앞에서 구하여진 각 요소의 질량매트릭스 및 강성매트릭스를 계전체의 좌표계에 대해 각각 중첩하므로써 계 전체의 질량매트릭스 및 강성매트릭스가 구해진다.

구조물 전체의 매트릭스 크기는 절점의 갯수와 자유도수로 정하여지며 본 연구에서 한절점의 자유도를 3개로 하였으므로 구조물 전체의 절점이 n 개일 때 전체 매트릭스의 크기는 $3n \times 3n$ 매트릭스가 된다.

앞에서 구해진 구조물 전체의 질량 및 강성매트릭스는 singular 매트릭스이므로 구조물로 부터 주어지는 경계조건을 적용하여 이 singular 매트릭스를 분할하므로써 non-singular 매트릭스가 형성된다. 4변이 단순 지지된 판의 경계조건 적용으로서 $x=0, x=a$ 인 변에

서는 $w=0$, $w,y=0$ 이고 $y=0$, $y=a$ 인 변에서는 $w=0$, $w,x=0$ 인 경계조건을 갖는다.

$$wr = \frac{1}{\sqrt{\lambda r}} \sqrt{\frac{\dot{T}}{m}} \quad (21)$$

2-5. 매트릭스 統制方程式의 誘導

홀로노믹계(Holonomic system)에 있어서 구조물의 절점이 조화 운동을 하는 경우에서 유도한 매트릭스 운동방정식은 총 에너지(Total energy)인 $T+U+W$ 를 최소화하여 유도한 매트릭스방정식과 같아진다. 그러므로 본 연구에서는 후자를 택하여 論述하기로 한다. 즉, 에너지 보존계에서 총 에너지를 π 로 표시하면

$$\pi = T + U + W \quad (15)$$

이고 이것의 최소화

$$\delta \pi = 0 \quad (16)$$

으로 놓고 매트릭스통제방정식을 구하게 된다.

자유진동의 경우 외력의 작용이 없으므로 $W=0$ 임을 고려하고 식(11), (13)의 T 와 U 를 식(15)에 대입하고 $\delta \pi = 0$ 을 적용하면 다음 (17)식이 구해진다.

$$-mw^2[M] \{\Delta\} + \dot{T}[K] \{\Delta\} = 0 \quad (17)$$

식(17)이 자유진동계의 매트릭스통제방정식이며, 구조물전체에 대해서는 이 식을 중첩하므로써 식(18)이 된다.

$$-mw^2[M] \{\Delta\} + \dot{T}[K] \{\Delta\} = \{0\} \quad (18)$$

위의 계전체에 대한 통제방정식에서 매트릭스는 singular이므로 경계조건을 적용하여 분할한 매트릭스를 대입하면 다음과 같이 된다.

$$(-mw^2[\bar{M}p] + \dot{T}[\bar{K}p]) \{\bar{\Delta}p\} = \{0\} \quad (19)$$

이식을 다시 고유치문제의 표준형으로 변환하면

$$([D] - \lambda [I]) \{\bar{\Delta}p\} = \{0\} \quad (20)$$

여기서, $[D] = [\bar{K}p]^{-1} [\bar{M}p]$

$[I] = \text{Identity Matrix}$

$$\lambda = \frac{\dot{T}}{mw^2}$$

$\{\bar{\Delta}p\}$ = 고유벡타(eigen vector)

식(20)에서 고유치(eigen value)를 구하고 고유진동수 w_r 는 다음에서 계산한다.

고유치를 구함으로써 계의 고유진동수가 구해지고 λ 에 대응하는 고유벡타(eigen vector) Δp 를 구함으로써 진동모우드(vibration mode)가 구해진다.

식(20)의 계산법으로 여러가지가 있으나 일반적인 Jacobi 반복법을 이용하였으며 그 계산순서는 다음 Fig. 4의 플로우 차아트와 같다.

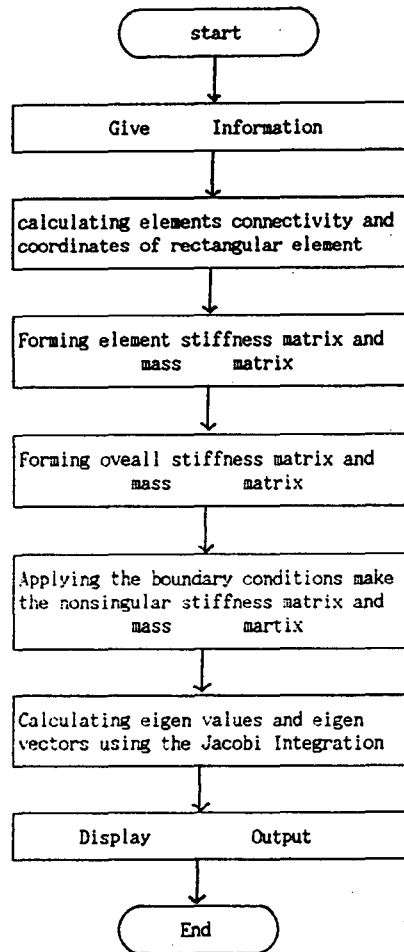


Fig. 4 Flow chart for calculation of natural frequencies

III. 結果 解析 및 考察

본 章에서는, 첫째로 4각형 막의 진동특성에 대한 解析學의 方法에 依한 解와 有限要素法에 依한 解를 구하여 비교함으로써 本研究에서 使用한 有限要素의 合當性을 제시한다. 다음으로 4각형 板의 内部에 구멍이 있을 때의 振動特性을 동일 有限要素를 사용하여 數値解析한 다음, 그 結果를 檢討하고 提示한다.

3-1. 解析의 方法에 依한 結果

두 邊의 長이가 각각 a, b이고 단위폭당의 평면력이 $N_{xx}=N_{yy}=\bar{T}$ 인 경우를 다루었다. 판의 두께는 板의 다른 치수에 비하여 몹시 작고 따라서 굽힘에 의한 저항이 무시될 수 있는 경우를 다루었다¹⁴⁾.

Fig. 6의 membrane에서 복원력은 단위 길이당 使用하는 균일한 장력 \bar{T} 에 의해서만 발생하며, 처짐 w는 기준평면에 대해 수직방향으로 발생하며 그 크기는 다른 부분의 치수에 비해 충분히 작다. 이러한 조건하에서 구해진 자유진동의 경우 운동방정식은 다음 식으로 표시된다.

$$\bar{T}\nabla^2 w^2(x, y, t) = m\ddot{w}(x, y, t) \quad (22)$$

membrane의 처짐 w를 공간좌표에 의한 함수 W와 시간에 의한 함수 τ 의 곱으로 표시하면 w는 식(23)으로 나타낼 수 있다.

$$w(x, y, z) = W(x, y) \tau(t) \quad (23)$$

式(23)을 式(22)에 代入하면 변수분리법에 의해 다음 식이 구해진다.

$$\tau(t) + w^2 \tau(t) \quad (24-a)$$

$$\nabla^2 W(x, y) + \lambda^2 W(x, y) = 0 \quad (24-b)$$

$$\text{여기서, } \lambda^2 = \frac{W^2}{\bar{T}/m}$$

$$\tau(t) = \tau e^{i\omega t}$$

membrane에 의한 기하학적 경계조건은 식(25)와 같으며 미분방정식 (24-b)를 변수분리법으로 풀기 위해 그 해를 式(26)와 같이 놓고 이것을 式(24-a, b)에 代入하면 (27-a, b)가 얻어진다.

$$W(0, y) = 0, W(a, y) \quad (25)$$

$$W(x, 0) = 0, W(x, b)$$

$$W(x, y) = X(x)Y(y) \quad (26)$$

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \alpha^2 X(x) = 0 \quad (27-a)$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \beta^2 Y(y) = 0 \quad (27-b)$$

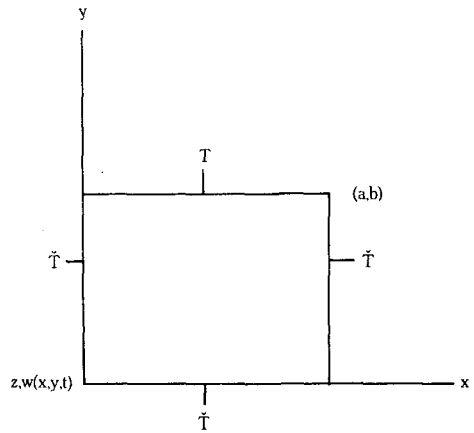


Fig. 5 Rectangular membrane

여기서 $\alpha^2 + \beta^2 + \lambda^2$

(27-a)와 (27-b)의 해는 각각 式(28-a), (28-b)와 같으며

$$X(x) = A_1 \sin \alpha x + A_2 \cos \alpha x \quad (28-a)$$

$$Y(y) = B_1 \sin \beta y + B_2 \cos \beta y \quad (28-b)$$

여기서 式(25)의 경계조건을 적용하므로써 행렬식 (29)와 (30)이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin \alpha a & \cos \alpha a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin \beta b & \cos \beta b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

고유진동수 w_{mn} 은 다음과 같다.

$$\frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{\bar{T}}{m}} \sqrt{m^2 + \left(\frac{a}{b}n\right)^2} \quad (31)$$

또 고유진동모우드는 식(32)와 같다.

$$W(x,y) = X Y = \sum_m \sum_n C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (32)$$

식(31)에서 알수 있는 바와 같이 고유진동수 W_{mn} 의 크기는 m, n 과 변의 길이비 a/b 에만 관계된다. $a/b=1$ 인 경우를 고려한 고유진동수의 값은 Table 4와 같다¹²⁾.

3-2. 數値解析法에 의한 結果

수치해석법에 사용된 Membrane 有限要素의 적용 예로서 Fig. 6과 같이 주변이 단순 지지된 가로 세로 비가 1:1인 사각형 板의 自由振動에 대하여 固有振動數와 고유모우드 구하는 문제를 다루었다.

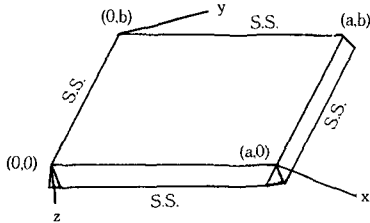


Fig. 6 Rectangular plate with all sides simply supported

요소 분할은 Fig. 7과 같으며 全體 要素數가 25개이고 절점은 36개이다.

한 절점에 대한 자유도가 3개이므로 구조물 전체의 매트릭스의 크기는 108×108 이다. 경계조건으로는 주변이 단순지지되어 있으므로 Fig. 7에서 절점 1, 6, 31에서의 모든 자유도는 0이 되며, 판의 가로변에서는 변위 W 의 X 에 대한 1차 도함수 $w_{,x}$ 가 0이 되고, 판의 세로변에서는 변위 w 와 w 의 y 에 대한 1차 도함수 $w_{,y}$ 가 0이 된다. 따라서 자유도가 0이 되는 절점의 자유도는 모두 4개로서 경계조건을 적용한 경우의 non-singular 매트릭스의 크기는 64×64 이다.

Table 5.에 板의 고유진동수에 대한 유한요소법에 의한 解와 그 엄밀해를 비교하였으며 이것을 도표로 나타내면 Fig. 8과 같다. Fig. 8에서 보는 바와 같이

Table 4. Values of $W_{mn} \sqrt{m/T}$ for a square where $a/b=1.0$

m	n	1	2	3
1	1	4.442	7.024	9.934
2	1	7.024	8.885	11.327
3	1	9.934	11.327	13.328

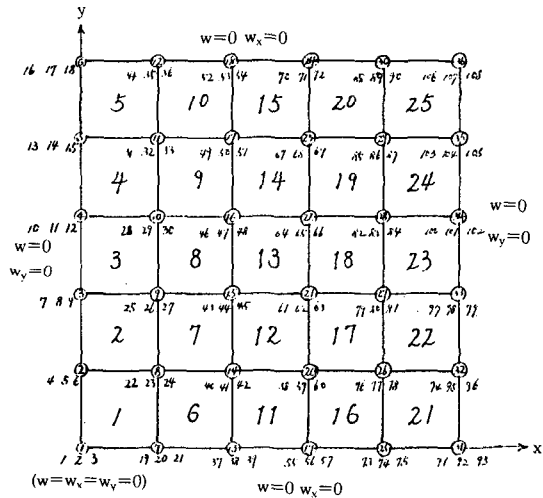


Fig. 7 Finite element mesh division.

유한요소법에 의한 수치해는 해석적방법에 의한 嚴密解와 一致한다. 이는 使用한 유한요소와 計算過程이 適合함을 보여준다.

Table 5. Numerical comparison of W_{mn} by F.E.M. solution and analytical solution $\sqrt{m/T}$

m	n	1	2	3
1	1	4.444 (4.442)	7.029 (7.024)	9.948 (9.934)
2	1	7.029 (7.024)	8.906 (8.885)	11.38 (11.327)
3	1	9.948 (9.934)	11.38 (11.327)	13.61 (13.328)

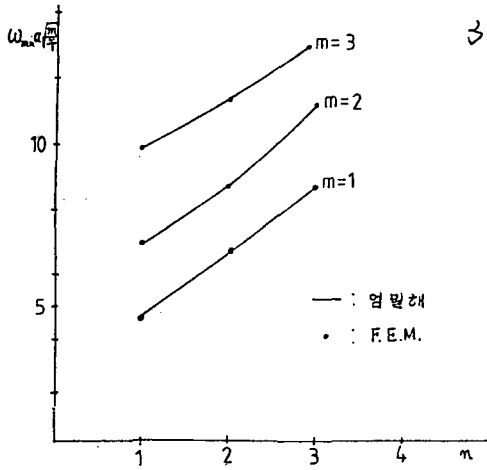


Fig. 8 Comparison of F.E.M. solution and analytical solution

Table 5와 같이 구하여진 고유진동수에 대응하는 고유벡터들을 연결하여 구하여지는 것이 진동의 모양을 결정하는 진동모우드(Vibration modes)로서 Fig. 10은 이들 진동모우드를 나타낸 것이다. Fig. 10의 진

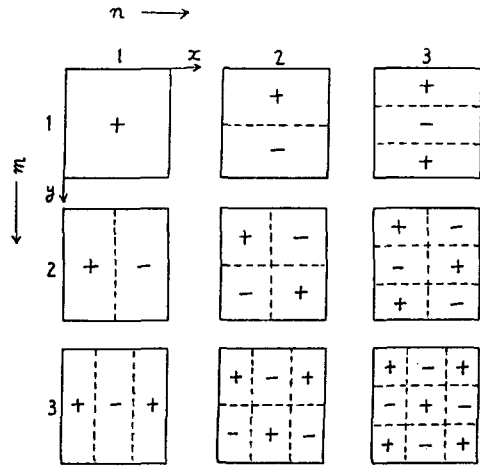


Fig. 9 Node line of vibration mode

동모우드에서 진동형의 節線(node line)을 도시하면 Fig. 9와 같으며, X축에 평행한 진동형의 절선은 n-1개이며 Y축에 평행한 절선은 m-1개이다¹⁵⁾.

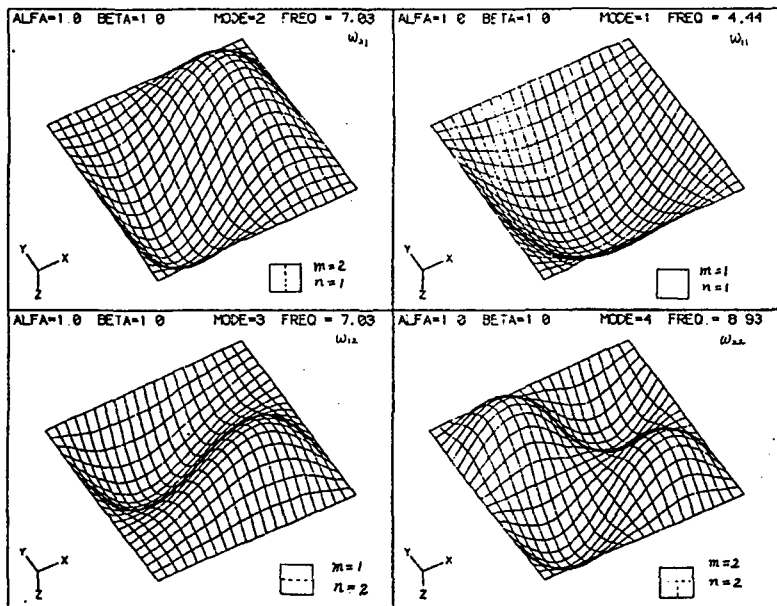


Fig.10 Modal shapes of Rectangular plate by computer graphics

3-3 内部에 矩形 구멍을 갖는 板의 數置解

連續板의 解析結果로서, 使用된 有限要素의 適合性을 認定하고 板의 内部에 구멍이 있는 板의 動特性을 같은 板의 内部 中央에 한번의 1/5크기의 사각형 구멍이 있는 경우에 관해서 解析하였다.

기하학적 形狀으로서는 앞에서 나타낸 Fig. 7에서 13번 要素가 없는 경우로서 실제 구조물에서는 出入口 또는 換氣口 등이 있는 경우이다.

이러한 構造物의 固有振動數를 計算하는 方法으로서 는 질량매트릭스와 강성매트릭스 형성과정에서 特定한 要素(本 研究에서는 13번 要素)를 제거하고 컴퓨터가 計算을 수행하도록 하였으며, 이렇게 하여 구한 不連續板의 固有振動數 값을 표시하면 Table 6과 같

고 이 값을 구멍이 없는 경우의 값과 비교한 것이 Fig. 11이다. 구멍이 있는 경우의 固有振動數가 일반적으로 감소하는 것은 剛性的 감소에 起因한다고 본다. Fig. 12는 컴퓨터 그래픽에 의한 진동 모우드이다.

Table 6. Natural frequencies for a square simply supported plate with a square hole (scale factor; $W_{mn} a\sqrt{m/\bar{I}}$)

m	n	1	2	3
1	1	4.780	6.506	9.760
2	2	6.506	8.819	11.17
3	3	9.760	11.17	

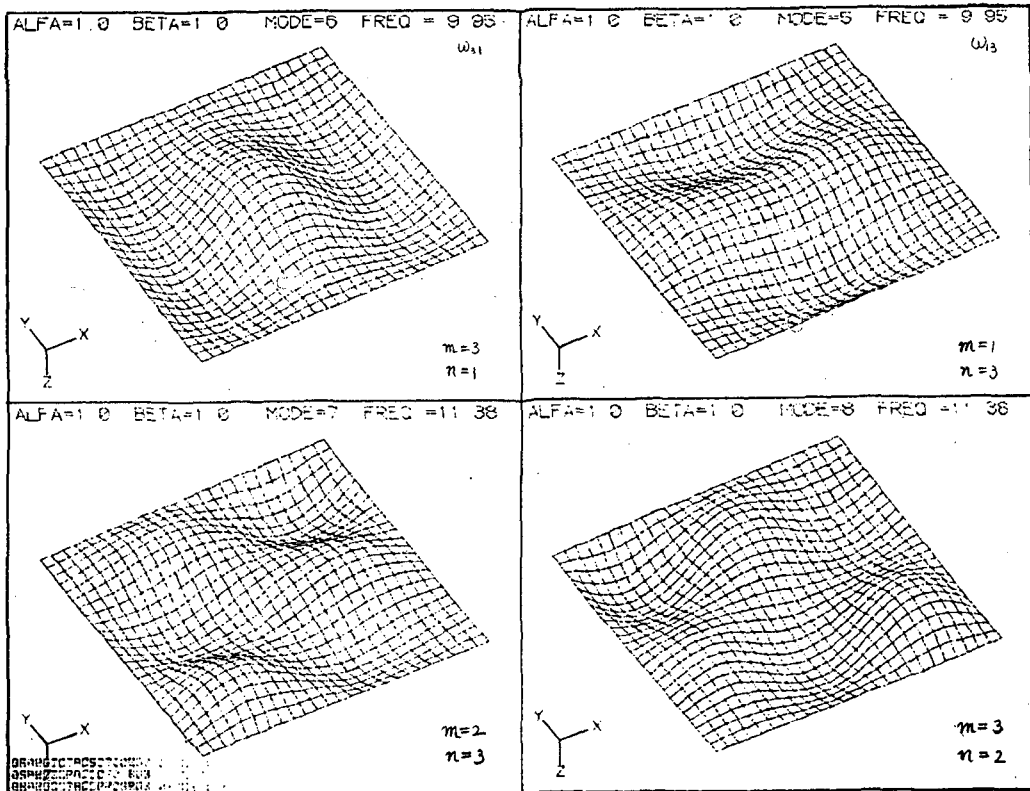


Fig.12 Modal shapes of the rectangular plate with a hole by computer graphics

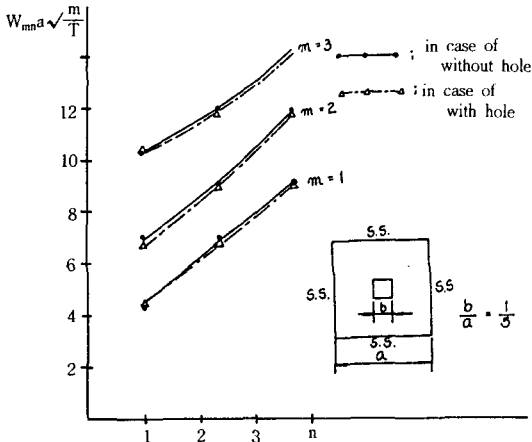


Fig.11 Comparison of natural frequencies for a square plate with a square hole and without hole

IV. 結 論

本 研究에서 사용한 四角形 membrane有限要素는 두께가 얇을 경우의 平面問題의 解析에 使用될 수 있고, 座標系나 절점의 自由度를 달리 選定함으로써 各種 구조물의 응력 해석과 동특성 연구에 적용할 수 있다.

四角形 membrane有限要素의 적용으로 주변이 단순 지지된 板의 自由振動에 대한 固有振動數와 고유모우드를 구하여 그 엄밀해와 비교하였으며, 그 結果 本有限要素의 타당성이 입증된 바에 이어서 境界조건의 적용이 극히 어려운 板의 内部에 불연속을 갖는 경우에 대해서 같은 유한요소를 적용하여 固有振動數 및 고유모우드를 구하였다.

研究 結果로써 다음과 같은 結果를 얻었다.

1. 4변이 단순 지지된 板의 振動 解析 結果 本有限要素法에 의한 解와 그 엄밀해를 비교해 볼 때 一致하고 있다.

2. 板의 内部에 不連續을 갖는 경우에 있어서 固有振動數는 연속인 板의 경우보다 一般적으로 낮다. 이것은 구멍부분의 제거로 탄성체의 剛性이 減少하기 때문일 것이다.

3. 特히 w_{11} 에 해당되는 모우드에서 그 고유진동수가 구멍이 없는 경우보다 크다. 이는 가장 運動이 甚한 中心部分의 除去가 큰 運動 質量의 減少를 일으키기 때문일 것이다.

4. 板의 内部에 여러가지 形態의 구멍을 갖는 경우에 대한 고유진동수 및 고유모우드의, 실험에 의한 결과치에 대한 檢證 및 그 범위를 擴張 補充하는 方法을 提示하였다.

參考文獻(Reference)

- 1) W.Soedel, Vibration of Shells and Plates, Chap.1-7, pp.1-189, Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 1981
- 2) R.G.Anderson, B.M.Irons, and O.C.Zienkiewicz, "Vibration and Stability of Plate Using Finite Elements", Int.J.Solids Structures, Vol.4, pp.1031-1055, 1968
- 3) C.V.Joga Rao and G.Pickette, "Vibration of Plates of Irregular Shapes and Plates with Holes", J.Aeronaut. Soc. India, Vol.13, pp.83-88, 1961
- 4) R.Dungar, R.T.Severn, and P.R.Taylor, "Vibration of Plate and shell structures Using Triangular Finite Elements", Journal of strain Analysis, Vol.2, No.1, pp.73-83, 1967
- 5) G.R.Cowper, E.Kosko, G.M.Lindberg, and M.D.Olson, "Static and Dynamic Applications of a High-Precision Triangular Plate Bending Element", AIAA Journal, Vol.7, No.10, pp.1957-1965, 1969
- 6) Melvyn S.Marcus, "A Finite-Element Method Applied to the Vibration of Submerged Plates", Journal of Ship Research, Vol.22, No.2, pp.94-99, June, 1978
- 7) H.W.Kim, "A Study of Free Vibrations of Thin Elastic Shells under Initial Stresses Using Finite Elements", Ph.D.Thesis, Purdue Internal

- Report, pp.1-30
- 8) O.C.Zienkiewicz, The Finite Element Method in Engineering Science, Chap. 10, pp.171-211, McGraw-Hill, London, 1971
- 9) Blevins, Formulas for Natural Frequency and Mode Shap, Chap.10-11, pp.224-289, Van Nostrand Reinhold Company, 1979
- 10) Lloyd Hamiton Donnell, Beams, Plates and Shells, Chap.4, pp.159-224, McGraw-Hill Book Company, New York, 1976
- 11) A.C.Ugural, Stresses in Plates and Shells, Chap.8-11, pp.174-252, McGraw-Hill Inc., 1981
- 12) Leonard Meirovitch, Analytical Methods in Vibrations, Chap.2-5, pp.30-180 The Macmillan Company London, 1967
- 13) S.S.Rao, The Finite Element Method in Engineering, Chap.2, pp.38-89, Pergamon Press, 1982
- 14) S.Timonshenko, D.H.Young and W.Weaver JR., Vibration Problems in Engineering, 4th Ed. Chap.5, pp.481-491, John Wiley & Sons Inc., New York, 1974
- 15) Arthur W.Leissa, Vibration of Plates, Chap.4, pp.41-160, National Technical Information Service, Washington, D.C., 1970
- [K], K_{ij} : Stiffness matrix and its element
- [M] : Mass matrix
- m : mass per unit area of the plate
- N_{xx} , N_{yy} , N_{xy} : Initial inplane force per unit length
- P, {P} : External force and nodal load vector
- g_r : Generalized coordinate
- T : Kinetic energy
- t : Time or thickness of the plate
- U : Strain energy
- u : Displacement in the direction of x axis
- V : Volume
- V_e : Potential energy due to external force
- v : Displacement in the direction of y axis
- W : Work due to external force
- w : Displacement in the direction of z axis
- X_1 , X_2 : Shape function
- Y_1 , Y_2 : Shape function
- x,y : Cartesian coordinates
- β : Proportional coefficient of the uniform tension per unit length (N_{yy} / N_{xx})

Nomenclatures

- a : Length of element or plate
- b : Width of element or plate
- [D] : Symmetric matrices of eigen value problem
- E : Young's modulus
- $f(x,y)$, $f_i(x,y)$: Shape function
- f_r : rth frequency
- $H_i(x)$, $i=1-4$: Hermitian polynomials
- h : Thickness of the plate
- [I] : Identity matrix
- { Δ } : Nodal degrees of freedom vector
- { ϵ }, ϵ_{ij} : Strain vector and Strain tensor
- ϕ : Density
- η : Nondimensional coordinate (y / b)
- ξ : Nondimensional coordinate (x / a)
- λ : Eigen value
- ν : Poisson's ratio
- π : Total energy
- ω : Batural frequency