Journal of Historia Mathematica Vol.7. No.1, 1992.12
The Society of Korean Mathematical History

幾何學의 發展과 將來

慶北大學校 奇宇恒

1. 기하학의 발전
2. 비유클리드기하학
3. 기하학의 장래

1. 기하학의 발전

기하학은 고대 이집트에서 발생하여 바빌로니아 문명의 영향을 받았으며, 그리스에 전해져서 유클리드의 원론으로 집대성되었다는 것이 정설이다.

B.C. 1700년경 이집트에서 쓰여졌다는 아메스의 '파피루스'에는 도형에 관한 구체적인 것이 많이 실려 있다. 예컨대 직사각형, 이등변삼각형 및 사다리꼴의 넓이를 구하는 문제, 지름의 길이가 r인 원의 넓이를 $(r-1/9r)^2$으로 구한 것, 두 변의 길이가 주어진 직각삼각형의 작도 문제 등도 다루고 있다. 이와 같은 것으로 보아도 고대 이집트에서는 농경사회에 실제로 필요한 측량에 관한 문제를 귀납적이고 기술적으로 다루었다고 볼 수 있지만, 논리성과 과학성이 있었다고는 말할 수 없다.

그러나 그리스의 기하학은 처음부터 학문성을 지니고 있었다. 이를테면, 그리스 최초의 기하학자로 보고있는 탈레스 (Thales, B.C. 640-546년경)는 이집트 수학에서와 같이 직접측량술을 쓰지 않고도 간접측량, 즉 기하학적 논리성으로부터 문제를 해결하였다. 또 탈레스는 '한 변의 길이와 그 양 끝의 두 각의 크기가 각각 같은 두 삼각형은 합동이다', '이등변사각형의 밑각의 크기는 같다', '맞꼭지각의 크기는 서로 같다', '지름 위에 선 원주각의 크기는 직각이다' 등과 같은 정리의 형태를 처음으로 기술하였다는 것에 큰 뜻이 있다. 그 후 피타고라스의 연구와 플라톤을 중심으로 체계가 갖추어진 학문으로서의 기하학이 점차 완성되어 갔다.

당시 그리스의 수도였던 알렉산드리아 (Alexandria)에 있던 유클리드(Euclid, B.C. 330-275년경)는 그 때까지 알려진

그리스 수학의 지식을 집대성하여 13권으로 된 책(*Stoicheia*, B.C. 300년경)을 썼는데, 후세 사람들은 이것을 유클리드 원론(*Euclid elements*)이라고 부르게 되었다. 여기서는 평면기하, 입체기하, 수론 등이 다루어져 있는데, 이들은 우선 점, 선, 평면 등 몇 개의 무정의 용어로부터 시작하여 각각 다섯개의 공준과 공리를 바탕으로 구성되어 있다. 유클리드 원론은 19세기까지 유럽에서는 마치 수학의 성전(聖典)같이 절대적인 권위를 지닌 수학 교과서로서 사용되어 왔다.

그런데 유클리드 이후의 그리스의 수학은 동방사상의 영향을 받아서 자연과학적인 측면을 견지하고 있었다.

예컨대, 아르키메데스 (Arichimedes, B.C. 287-212년경)는 원에 내접, 외접하는 정육각형으로부터 시작하여 차례로 변의 개수를 두 배씩하여 정96각형의 둘레의 길이를 계산하여, 원주율의 값을 계산하였다.

유클리드 이후의 그리스 수학자들이 새로운 기하학의 탄생에 실마리를 제공한 주목할 만한 사실을 밝혔으므로, 이것에 대하여 알아보자. 이 중 아폴로니우스(Apollonius, B.C. 262-200년경)는 원추곡선(圓錐曲線)의 연구로 유명한데, 특히 이 곡선 위의 점이 만족하는 조건을 오늘날의 좌표에 해당하는 선분의 길이로써 나타내었다. 이것은 좌표의 개념을 처음으로 이용하였다고 볼 수도 있다. 17세기에 이르러 페르마는 아폴로니우스의 사상과 비에타의 대수를 이용하여 원추곡선의 방정식을 나타낸 것으로 보아도, 그렇게 짐작할 수 있다.

또 파프스(Pappus, B.C. 300년경)는 원환체(torus)의 부피도 구하였지만, 다음 사실을 발견함으로써 더 유명하다.

「직선 l 위의 세 점 A,B,C와 다른 직선 m 위의 세 점 D,E,F가 있을 때, $\overleftrightarrow{AE}$와 $\overleftrightarrow{BD}$의 교점을 P, $\overleftrightarrow{AF}$와 $\overleftrightarrow{CF}$의 교점을 Q, $\overleftrightarrow{BF}$와 $\overleftrightarrow{CE}$의 교점을 R라 하면, P,Q,R는 같은 직선 위에 있다.」

이것은 다음에 설명하는 파스칼의 사영기하학에 근원을 제공한 정리이기도 하다. 그 밖에 메넬라우스(Menelaus)의 정리(B.C. 100년경)는 이 시대에 발견된 중요한 성과 중의 하나이다.

그러나 기독교도와 로마제국은 수학을 그다지 중요시하지 않았고, 방정식의 음의 근을 인정하지 않았기 때문에 그리스 수학은 더 발전될 수 없었다.

5세기 이후 중세까지 유럽의 수학계는 암흑의 시대로 보아도 과언은 아니다. 그러나 그리스 수학은 7세기 경부터 지중해 연안까지 세력을 확장한 아라비아에서 잘 보존되고 발전되었다. 이 때, 인도 수학의 영향을 받은 아라비아의 수학이 유럽에 전해지면서 이탈리아에서는 방정식의 이론이 크게 발달하였다. 그 당시 기하학도 원추곡선론이 중심 과제였던지, 기하학적 문제 해결의 새로운 방법이 등장하였는데, 이것이 데카르트의 해석기하

학이다. 데카르트는 문자식의 계산을 자유롭게 함으로써 평면 위의 직선이나 원추곡선을 각각 x, y에 관한 일차식, 이차식으로 나타내었고, 이들 식의 대수적 계산에 의하여 그는 기하학적 문제를 해결할 수 있었다.

한편, 르네상스 이후의 과학자들의 관심은 동력학(動力學)의 연구였는데, 이것과 해석기하적인 문제 해결방식이 미적분학 탄생의 원동력이 되었다. 특히 뉴턴과 라이프니츠는 독자적으로 미적분학을 발견하여 수학의 발전에 큰 공헌을 하였다. 이와같이 근대수학의 최대 수확은 고전대수, 해석기하, 미적분학의 발견인데 이것들이 17-18세기 수학의 활력소가 되었다.

그런데 도형 그 자체뿐만 아니라, 도형이 공간에 놓여 있다고 보는 인식으로부터 공간의 본질을 연구하려는 단서를 둔 것이 사영기하학의 출현이다. 한 평면도형이 있어서 공간에 있는 한 점으로부터 이 도형을 다른 평면에 사영시켜서 얻어지는 것이 원래의 도형과는 어떤한 관계를 가지는지를 관찰하는 것은 여러 분야에 응용되었다.

사영기하학에서는 임의의 두 직선은 항상 한 점에서 만나도록 정의하는데, 사영에 의하여 변하지 않는 다음 두 정리를 발견한 사람은 데자르구(Desargues, G. 1593-1662)와 파스칼이다.

'두 삼각형의 대응하는 꼭지점을 맺은 선분이 한 점에서 만나면, 대변의 교점은 한 직선 위에 있다'라고 하는 것은 데자르구의 정리이고, '원추곡선에 내접하는 6각형의 대변의 교점은 한 직선 위에 있다'라는 것은 파스칼의 정리이다.

2. 비유클리드기하학

19세기 초 기하학계의 놀라운 사실은 무엇보다도 비유클리드기하학의 발견이다. 이것은 이 때까지 유클리드공간 만이 다만 하나 뿐인 절대적으로 믿어왔던 사람들에게 공간의 개념에 일대변혁을 불러일으키게 하였다.

비유클리드기하학의 시발점은 '한 평면 위에서 직선 밖의 한 점을 지나고 이 직선에 평행한 직선은 다만 하나이다'라는 평행선 공리를 다른 정리로부터 증명하려는데 있었다. 그러나 이 사실을 증명할 수 없었기 때문에 19세기 초반 수학자들은 '이것이 기하학의 일대 오점이다'라고 생각하게 되었다. 이 때의 수학자들은 유클리드기하의 다른 공리들은 그대로 두고 다만 평행선 공리 대신에 다음 세 가지를 생각하였다. 즉, 평면위의 한 점 P와 P를 지나지 않는 직선 l이 주어졌을 때,

(1) P를 지나고 l과 만나지 않은 직선은 다만 하나 그을 수 있다.

(2) P를 지나고 l과 만나지 않은 직선은 무수히 그을 수 있다.

(3) P를 지나고 l과 만나지 않은 직선은 그을 수 없다.

라는 가능성을 생각하며 (2), (3)인 경우에는 모순이 일어날 것이라는 확신 아래서 연구를 수행하였지만, 성공하지 못했다. 가우스는 (2)를 가정하여 아무리 추론을 계속하여도 모순을 발견하지 못하였으므로 새로운 기하학이 존재한다고 믿고 있었다. 그러나 이것은 너무나 놀라운 사실이므로 발표하지 않았다고 한다.

비유클리드기하학의 발견의 영광은 보리야(Bolyai, J., 1802-1860)와 로바체프스키(Lobatchewsky, N.I., 1773-1856)에게 돌아갔다. 그들은 독자적으로 위의 (2)의 가정으로부터 출발하여 '삼각형의 내각의 합은 180° 보다 작다'라는 결론에 이르렀고, 이론 자체에는 아무런 모순이 없는 새로운 기하학의 체계를 구성할 수 있음을 밝혔다. 이와 같은 기하학을 쌍곡적 기하학이라고 부른다.

또, 가우스의 '곡면 위의 기하학'의 영향을 받은 리만(Riemann, G.F.B., 1826-1866)은 구면 위의 기하학을 모델로 하여 '평행선을 그을 수 없다'라는 기하학을 만들었다. 이러한 기하학을 타원적 기하학이라고 한다.

평면은 굽어있지 않으며, 한 평면 위의 두 점을 지나는 최단선은 그 평면에 포함되고 그것은 직선이다. 그러나 일반적으로 곡면은 굽어 있다. 곡면이 굽어 있는 상태를 한 양(量)으로 표시하며, 이것을 가우스의 곡률(curvature)이라 하고 K로 나타낸다.

곡면 위의 두 점을 지나는 최단선을 측지선(geodesic)이라 한다. 이것은 평면 위의 직선에 대응되는 곡선이다. 예컨대 구면 위의 측지선은 대원(great circle)이다.

지금 곡면 위에 한 점 O를 잡아 O로부터 측지선의 길이가 r인 단일폐곡선 c를 그려서 그 길이를 L이라 하자. 이때, 가우스의 곡률은 다음과 같이 주어짐은 알려져 있다.

$$K=\lim_{r\to 0}\frac{3}{\pi}\,\frac{2\pi r-L}{r^3}$$

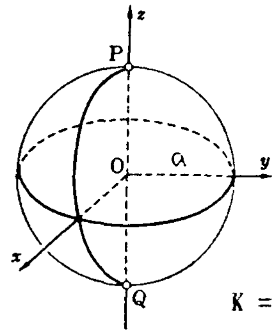
예컨대, 반지름의 길이가 a인 구면의 가우스 곡률은 $K=\frac{1}{a^2}(>0)$이며 일정하다. 그러나, 점근선의 길이가 a인 추적선(tractrix)을 회전하여 얻어지는 회전체는 의구(pseudo sphere)인데 그 가우스 곡률은 $K=-\frac{1}{a^2}$이며 일정하다.

한 곡면 위의 세 점을 측지선으로 맺은 삼각형을 측지적 삼각형이라고 한다. 측지적 삼각형 위에서 가우스 곡률의 적분은

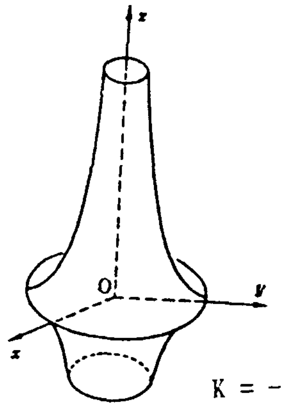
$$\int\!\!\int K dA=\beta_1+\beta_2+\beta_3-\pi$$

로 주어진다(가우스, 본네의 정리). 이 식으로부터 타원기하학, 포물기하학, 쌍곡

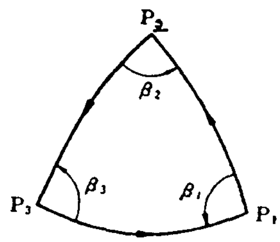
기하학이라는 말이 설명된다.



$K = \frac{1}{a^2}$



$K = -\frac{1}{a^2}$



다음으로 평면 위에서는 미소(微小)거리 ds에 대하여 $ds^2 = dx^2 + dy^2$이 성립한다. 그러나, 포앙카레(Poincaré,H., 1854 -1912)는 상반평면 $H = \{(x,y) \mid y>0\}$ 에서 미소거리 ds를

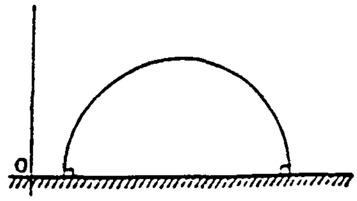
$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

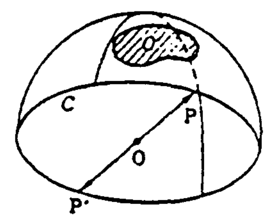
으로 줄일 수 있고, 이 때, 가우스의 곡률은 $K = -1$ 임을 보였다. 또, 그 측지선은 중심이 x축 위에 있는 원 $(x-x_0)^2 + y^2 = a^2$으로 주어짐을 밝혔다.

이런 사실들로부터 H와 상반구에서 평행선 공리가 성립하지 않음을 알아보자.

지금 직선이라는 용어를 측지선으로 바꾸고, '두 직선은 평행', 곧 『두 직선은 서로 만나지 않는다.』라는 말을 『두 측지선은 만나지 않는다.』라는 문장으로 바꾸어 생각하면 아래 왼편 그림에서 『측지선 밖의 한 점에서 이 측지선과 만나지 않는 측지선은 무수히 있다.』가 성립함을 알 수 있다. 이것은 앞에서 말한 (2)가 성립함을 뜻하고 있다.

또, 아래 그림에서 『대원(大圓) 밖의 한 점에서 이 대원과 만나지 않는 측지선은 그을 수 없다』라는 것을 알 수 있다. 이것은 (3)에 해당되는 것이다.





비유클리드기하학이 발견되어서 이제까지 절대적인 진리라고 생각되어 온 유클리드의 기하학 체계, 즉 근거가 되는 공리계는 반드시 하나 뿐이라고는 볼 수 없게 되었다. 유클리드의 공리 중 하나를 부정하여도 모순이 없다는 사실은, 유클리드공간 이외의 공간이 존재할 수 있다는 것을 말해주고 있으며, 유클리드기하학은 유클리드공간의 성질을 나열하는 것에 지나지 않는다. 이와 같은 사실로부터 지금까지 자명한 진리라고 생각하던 공리는 논리적으로는 단순한 약속에 불과하며 직관과 논리 사이에는 지금까지 보다 확실한 선이 그어졌다.

그런데, 18세기부터 눈부시게 발전한 미적분학의 연구결과를 이용하여 곡면과 곡선의 본질이 밝혀짐으로써 19세기에는 가우스의 곡면론에 이르게 되었다. 드디어 곡선, 곡면, 점 및 공간의 개념을 다양체(多樣體)라는 통일적인 것으로 취급하게 되어 리만 기하학으로 발전하였다.

이로부터 새로운 공간의 개념이 확립되었고, 종전의 유클리드공간보다 더욱 일반적인 공간을 연구하게 되었다. 이와 같은 추상적인 공간도 아인슈타인 (Einstein, A., 1879-1955)의 상대성 이론에 의하여 물리적으로 실재성이 확인되었다. 따라서, 새로운 공간의 개념을 구체적으로 설명할 수 있게 되었다.

한편, 1872년 클라인(Klein, F., 1849-1925)은 기하학의 성격을 새로운 각도에서 보는 방법을 발표하였다. 그는 어떤 규칙을 가지는 변환의 모임, 즉 변환군(變換群)이 주어졌을 때, 이 변환군에 의하여 불변인 성질을 조사하는 것이 기하학을 연구하는 것이라 하였다. 곧, 새로운 변환군에 대하여 하나씩의 기하학이 대응한다고 말하였다. 따라서, 새로운 변환군을 발견하는 것이 새로운 기하학을 발견하는 것이라 하였다.

예컨대, 이동(대칭이동, 평행이동, 회전 및 이들의 합성)을 합동변환이라고 하는데, 이 합동변환군에 대하여 불변인 도형의 성질을 조사하는 것이 유클리드기하학이 된다. 그러나 합동변환 이외에도 여러 가지 변환이 있을 수 있는데, '두 점을 지나는 직선이 두 점을 지나는 직선에 대응한다'라는 아핀(affine)변환을 들 수 있다. 그러므로 아핀변환에 의하여 불변인 성질을 조사하는 것이 아핀기하학이다. 또, 파스칼의 정리처럼 사영에 의하여 불변인 것의 연구는 사영기하학의 대상이 된다. 클라인 이후의 기하학이지만, 위상변환에 의하여 불변성을 조사하는 것이 위상기하학이다. 이와 같이 모든 기하학은 변환군으로 분류할 수 있다는 것이 클라인의 주장이지만, 실제로 다양체 위의 기하학은 이에 속하지 않는다는 사실이 알려져 있다. 그러므로 오늘날의 기하학은 클라인류의 기하학과 다양체론으로 분류되어 발전을 거듭하고 있다.

유클리드기하학을 새로운 관점에서 고찰하여 그 결함을 보완하여 수와 도형 사이의 관계를 명확히 함으로써 그리스의 기하학과 17세기의 데카르트의 기하학과의 관계를 해명한 사람은 힐베르트

(Hilbert, D., 1862-1943)이다. 그의 「기하학 기초론」(1899년)은 유클리드기하학을 완전히 설명하는데 그치지 않고, 공리는 가설에 지나지 않으므로 공리를 자유롭게 택할 수 있으며, 공리계를 모순없이 택하면 엄밀한 논리적 과정을 거쳐서 수학적 체계를 구성할 수 있다고 주장하였다. 이것은 수학을 발전시키는데 혁명적 방법이라고 말할 수 있으며, 수학 발전에 무한한 가능성을 제시한 것이다.

3. 기하학의 장래

20세기 과학 발전의 핵심은 물리학을 중심으로 이루어 졌으며 이는 아인슈타인의 상대성이론으로 꽃을 피우고 있다고 할 수 있다. 한편, 이는 인간이 달에 착륙하는 우주과학기술과 핵에너지의 실용을 금세기 중 인류가 경험할 수 있게 하였다. 이러한 금세기 동안의 과학기술계의 큰 흐름은 결코 수학의 발전과 무관하지 않다. 19세기 말까지 수학의 발전은 고전적인 수론과 기하학, 미적분학의 발견에 따른 해석학의 발전 등으로 주류를 이루며, 이는 20세기를 맞이하는 1900년의 수학계의 활동에서 볼 수 있다. 1900년 프랑스 파리에서 열린 제2차 국제학술대회(ICM, International Congress of Mathematicians)에서 4명의 본회의 강연자 중에 20세기 위상수학 및 기하학 발전의 대부로 알려진 포앙카레는 1897년 Zurich에서의 제1차 ICM에서의 강연에 이어 또다시 초청강연자로서 수리물리학의 중요성과 논리적 수학연구의 중요성을 강조하게 된다. 한편, 너무도 잘 알려진 1900년의 제2차 파리 ICM의 역사와 교육분과에서 힐베르트는 '수학의 장래'라는 제목으로 20세기 과학자를 위한 기조강연을 하였는데 이 때 23개의 '미래에 해결하여야 할 문제' 중에서 기하학의 곡선론과 곡면론에서 위상문제가 16번째의 문제로 구체적으로 제시되기도 하며 이 Hilbert 문제들은 그 후 수학계의 많은 문제들을 유도하였다. 이는 20세기 수학계에 위상수학의 도약적인 발전을 가져오는 큰 계기가 되었다.

한편, 위상수학의 연구결과들은 기하학을 포함한 수학 전반에 걸친 발전에 크게 영향을 끼치게 되며 이는 오늘날 다양체이론의 연구를 중심으로 위상수학과 현대기하학을 하나의 학문으로 묶는 결과를 낳고 있다.

이는 금세기에 주어진 수학계의 노벨상으로 알려진 필드상(Field Medal)에서도 잘 보여진다. 지금까지의 34명의 수상자 중 그의 업적이 위상수학 및 기하학 분야에 직접적인 관련이 있는 수학자를 나열해 보면 다음과 같다.

K. Kodaira(1954) : Sheaf cohomology와 Hodge다양체 연구로 대수다양체의 응용을 제시.

J. P. Serre(1954) : 구의 호모토피군의 계산.

R. Thom(1958) : Cobordism 이론을 제시.

J. W. Milnor(1962) : 7차원 구의 미분구조 연구로 미분위상기하학의 발전을 가져옴.

M. F. Atiah(1966) : 복소다양체의 지수이론을 증명하기 위한 K이론의 연구.

A. Grothendieck(1966) : K이론 제시로 대수기하학의 발전에 기여.

S. Smale(1966) : 5차 이상의 Generalized Poincaré conjecture 해결로 미분위상기하학의 발전에 기여.

S. Novikov(1970) : Pontrjagien class의 연구.

D. B. Mumford(1974) : Moduli variety 연구로 대수곡면론에 기여.

W. P. Thurston(1982) : 3차원 다양체의 Hyperbolic 구조를 보임.

S. T. Yau(1982) : 대수기하학의 Calabi conjecture를 해결.

S. K. Donaldson(1986) : 저차원 다양체의 연구에서 특히 4차원 유클리드공간의 이상미분구조의 발견.

M. H. Freedman(1986) : 4차원 Poincaré conjecture를 해결.

V. F. R. Johnes(1990) : von Neumann 대수와 Geometric topology의 관련성으로 새로운 지수정리를 보임.

S. Mori(1990) : 3차원 대수다양체의 분류 연구에 기여.

E. Witten(1990) : 저차원 다양체의 위상기하학적 연구를 Quantum field theory에 응용.

이외에도 많은 수상자의 연구가 위상수학 및 기하학에 직간접적으로 연결되어 있으며 이는 금세기를 통하여 위상수학 및 기하학의 연구가 얼마나 중요하게 다루어져 있는가의 객관적인 척도로 볼 수 있다.

20세기 후반부터 두드러지게 나타난 흐름 중의 하나는 수학적인 모든 문제를 다양체 위에서 생각하기 시작하므로써 다양체의 이론적 개발의 필요성이 수학 전반에 걸쳐 요구되었다는 점이다. 이로 인하여 기존의 위상다양체에서의 위상적 성질이 현대수학에서의 용어로 재조명되기도 하면서, 위상적 그래프 이론이라는 새로운 분야를 탄생시키기도 했다. 또한, 저차원 위상다양체의 연구는 Gauge 이론을 탄생시켰고, 미분기하학적 성질과 융합되면서 오랜 기간 동안 미해결 상태로 남아 있던 Yamabe 문제를 해결하는 등 훌륭한 업적을 남기고 있다.

이와 같은 일련의 시도 가운데서 가장 괄목할 점은 미분가능다양체의 위상수학적 불변량을 기하학적 불변량으로 나타내려는 방법론적 문제로서, 군의 표현론 등이 동원된 대수적 방법뿐만이 아니라 조화적분론이 수반된 해석적 방법까지 실로 다양한 접근 방법이 소개되기 시작하였으며, 이로 인하여 기존의 위상기하학, 미분기하학 이외에 대수기하학, 대역해석학, 로렌쯔기하학 등이 생겼고 이들 상호 간은 독자적이라기 보다는 오히려 보완적인 입장에서 발전하고 있다. 다시 말해서 어느 한 가지 방법만으로 기하학

적 문제를 해결한다는 것은 그만큼 어려워졌다고 볼 수 있다.

금세기 동안의 위상수학 및 기하학의 연구는 위에서 보는 바와 같이 상호보완 발전되어 왔음은 물론, 수학의 흐름에 있어서도 조합적 군론, 호모로지대수, 대수기하학과 대역해석학 등의 발전을 가져왔으며 외적으로도 물리학, 생명과학, 경제학, 전자, 기계 등 과학의 전 분야의 발전에 기여하고 있다.

세기말을 맞이한 오늘날 과학의 연구방향은 많은 변화를 하고 있다. 컴퓨터의 발전과 더불어 정보산업과 유전공학 등 새로운 과학발전의 방향이 21세기를 내다보고 있으며 2000년의 국제수학계에 새로운 전망이 조심스럽게 보이고 있다. 미국수학회에서 발간되는 월간잡지인 「Notices of American Mathematical Society」에는 매회 빠짐없이 Computer와 수학의 관련성에 대하여 논하고 있으며, 수학에서는 각 분야에 조합적 연구가 수행되며 이는 위상수학과 기하학에서도 조합적 위상수학, 이산, 혹은 조합적 기하학의 연구가 새로이 시도되고 있다.

1980년대에 들어서 컴퓨터 그래픽의 이용이 가시화됨으로써 프랙탈기하학이라는 새로운 분야의 탄생을 맛보게 되었다. 프랙탈 이론은 자연과학 뿐만 아니라 순수과학, 응용과학, 사회과학에 이르기까지 그 적용범위가 넓고 응용도가 높다. 예컨대, 순수과학 분야에 있어 선형작용소의 불변부분공간 문제에 프랙탈 이론의 응용이 키 아이디어로 작용한 사실을 필두로 최근에는 분자운동에서 천문학에 이르기까지 여러가지 과학적 현상들(브라운 운동, 식물의 성장, 우주 은하계의 분포, 심지어는 주가의 변동등)이 기하학적 측도론의 핵심인 프랙탈을 이용하여 탐구되고 있다.

위에서 살펴본 바에서 미래의 수학은 과학기술의 개발에 밀접한 관계를 가지면서 발전을 거듭할 것이다. 오늘날 과학기술 입국이라는 국가적 명제의 실현은 끊임없는 기술혁신을 통해서만 가능하고 그 기술혁신은 창조성의 개발 없이는 이룩할 수 없는 것이다. 창조성 개발의 첩경은 기초과학 연구와 교육의 강화이다. 기초과학의 기초인 수학은 미래를 위해서 교육현장에서 철저하게 다루어져야 할 것이다.

참고문헌

1. 奇宇恒 · 朴進石, 「幾何學根源論」, 學文社, 1978.
2. 金容雲, 金容局, 「韓國數學史」, 悅話堂, 1982.
3. 丹野修吉, 「微分幾何學」, 實敎出版社, 1976.
4. 朴漢植, 「數學敎育史」, 敎學社, 1982.
5. 荒木不二洋, 「數學」, Vol. 42, No. 4, 1990, p. 361-366.
6. ICM-90 特集號, 「數學」, Vol. 43, No. 1, 1991.
7. 「新訂數學」, 啓林館, 1987.

8. 李日海 譯(콘스탄트 리드 著), 「힐버트」, 民音社, 1989.
9. M.P. do Carmo, 「Differential geometry of curves and surfaces」, Prentic-Hall Inc, 1976.
10. C.-C. Hsiung, 「A first course in differential geometry」, John Wiley & Sons Inc, 1981.
11. 「Notices of American Mathematical Society」, Vol. 37, No. 9, 1990, p. 1206-1216.
12. I.M. Singer and J.A. Thorpe, 「Lecture notes on elementary topology and geometry」, Scott Fores. Co, 1967.