

## 高次平均法에 의한 亂流構造의 糾明 및 亂流모델의 開發 Investigation of Turbulence Structures and Development of Turbulence Model Based upon a Higher Order Averaging Method

呂運光\* · 片宗根\*

Woon Kwang Yeo\* and Chong Kun Pyun\*

**要旨**: Yeo(1987)에 의하여 誘導된 平均된 非線形項의 表現式을 理論 및 實驗의 分析을 통하여 亂流構造의 特性을 밝혔다. 一般 平均定義式으로부터 가우스형 필터函數를 사용하여 얻어진 이 식에 의하면 종래와 같이 非線形項을 4개의 項으로 分離하여 각각을 해석할 필요가 없으며 既存 亂流模型이 갖는 Closure문제로 인한 限界性도 극복할 수 있는 可能性을 보여주고 있다. 새로이 誘導된 表現式 으로부터 종래 概念的으로만 인식되어 왔던 vortex stretching현상을 理論적으로 導出할 수 있었으며 실제 亂流資料의 分析結果 이들의 影響이 支配的임을 입증하였다. 따라서 vortex stretching의 影響을 무시한 亂流模型은 그 妥當性을 상실하게 된다. 또한 LES모형에 적용시킨 결과 一般의 形態의 에너지 表現式을 얻을 수 있었으며 既存의 Smagorinsky模型, 回轉模型 및 SGS에너지 模型은 완전히 별개의 것이 아니라 亂流에너지 중 變形 및 回轉에 의한 影響의 考慮 如否에 따라 구분되어짐을 보였다.

**Abstract** □ The averaged non-linear term in the turbulence equations, suggested by Yeo (1987), is analyzed theoretically and experimentally. It was formulated by applying the filtering concepts to the convolution integral average definition with the Gaussian response function. This filtering approach seems to be superior to the conventional averaging methods in which all four terms at the doubly averaged level must be defined separately, and it also gives a very useful tool in understanding the turbulence structures. By theoretically analyzing the newly derived description for the averaged non-linear terms, it is found that the vortex stretching can be explicitly accounted for. Furthermore, comparisons of the correlation coefficients based on the experimental data show that the vortex stretching acts most significantly on the turbulence residual stress. Thus, it strongly supports the claim that the vortex stretching is essential in the transfer of turbulence. In addition, a general form of turbulent energy models in LES is derived, by which it is recognized that the Smagorinsky, the vorticity and the SGS energy models are not distinctive.

### 1. 緒 論

亂流의 影響을 확실히 규명하고 난류방정식의 정확한 해를 얻는 것은 流體力學 分野에 있어 아직 未解決의 問題로 남아있다. 그 주된 이유는 亂流 흐름 자체가 時間과 空間上에서 급변하고 크고 작은 規模의 흐름이 서로 非線形的으로 混在되어 있어 이들을 실제문제에 맞게 분리해 내는 것이 어렵기 때문이다. 이들의 非線形性은 또 流體의 에너지 이동에 중요한 역할을 담당한다. 스펙트럼 分析에 의하면 큰 규모의 흐름은 에너지 공급원의 성격을 나타내고 작은 規模의

흐름은 渦의 形態로서 에너지 消耗에 주로 관계한다. 따라서 이들을 모두 포함하여 解析해야 마땅하나, 이 또한 Kolmogorov(1941)의 에너지消滅에 관계하는 渦의 크기 分析에 의하면 거의 不可能함을 보이고 있다. 그러므로 실제문제에서는 작은 流動은 분리하여 消去시키되 그들의 影響은 고려하는 방법이 이용되어진다. 이러한 時間 및 길이에 따른 흐름종류를 圖式的으로 나타낸 것이 Fig. 1이다.

작은 流動의 分離는 支配方程式에 平均을 취하는 방법으로 이루어지나, 그림과 같이 解析對象에 따라 時間 및 길이의 變化幅이  $10^9$  및  $10^5$ 의 order를 갖는

\*明知大學校 土木工學科 (Department of Civil Engineering, Myong Ji University, Seoul, 120-132, Korea)

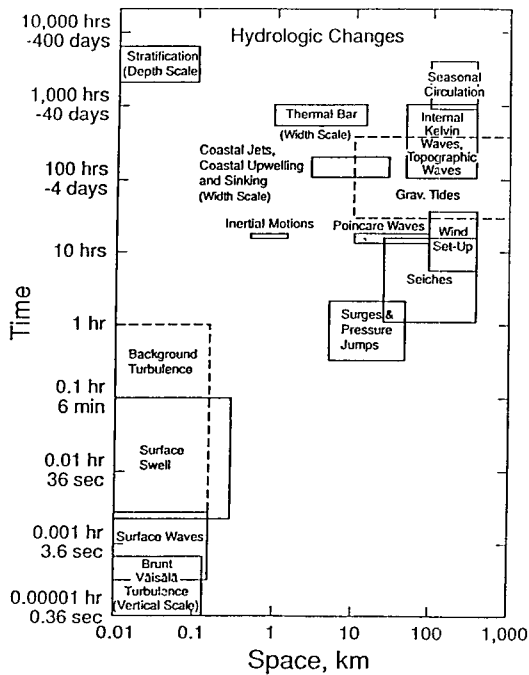


Fig. 1. Space-time process schematic.

흐름특성을 Reynolds(1893)의 單純平均定理에 의하여 고답적으로 解析하는 것은 그 限界가 있다. 실제로 Gross와 Nowell 등(1985)은 관측된 방대한 자료의 分析結果 10~15분보다 큰 規模의 흐름에서는 Reynolds의 定常條件(stationary requirement)을 만족시키지 못함을 보이고 있다. 또한 河川, 湖水 및 海岸과 같이 相對的으로 水深이 매우 작은 3次元 問題를 相異한 길이縮尺(length scale)을 취할 경우 에너지 스펙트럼의 傾斜가 水深에 따른 波數(wavenumber)를 중심으로 갑자기 변하는 것이 感知되었으며, 이는 에너지가 斷續的으로 移動함을 뜻하게 되어 3次元 亂流理論과 일치하지 않는 矛盾을 나타내고 있다(Bedford, 1981).

따라서 위와 같은 限界性を 극복하기 위하여 Leonard(1974)는 高次平均 概念을 導入하여 LES(Large Eddy Simulation)方法을 提案하였다. 이 方法은 필터의 개념을 도입하여 큰 규모의 유동만을 얻는 것으로서 回旋積分(convolution integral)형태의 평균정의식이 사용된다. 이에 따르면 기존의 Reynolds 平均定理는 否定되며 새로운 形態의 亂流 支配方程式이 誘導되어진다. 그러나 Leonard(1974) 以後 Clark 등

(1977), Dakhoul 등(1986), Aldama(1985), Bedford (1987) 등 많은 사람들에 의한 研究가 進行되어 나뉠대로의 타당한 결과를 발표하고 있으나, 여전히 限界性を 가지고 있는 것 또한 사실이다(Rogallo와 Moin, 1984; Ferziger, 1987). 즉  $\overline{u_i u_j}$ 로부터 야기되는 Closure 問題를 확실하게 설명하지 못함으로써 모호한 부분은 오로지 經驗的인 式에 전적으로 의존하고 있으며 에너지 消散機構(energy dissipative mechanism)에 대한 구체적 규명도 찾아볼 수 없다.

이러한 관점에서 Yeo(1987)에 의하여 얻어진 평균된 비선형항의 표현식은 난류구조의 이해에 획기적 전기를 마련하고 있다. 기존의 接近方法과 전혀 다른 結合필터(conjunctive filter)를 이용하여  $\overline{u_i u_j}$  項을 종래 Reynolds와 같이 4가지 項으로 분리시키지 않고 직접 표현함으로써 亂流方程式 誘導에 새로운 가능성을 제공하고 있다. 本 研究에서는 이러한 高次平均理論에 따라 平均概念을 재정립하고 기존의 LES 模型들을 분석하여 좀 더 타당한 亂流方程式을 제시하는 한편 새로이 유도된 平均된 非線形項을 이용하여 Closure問題를 새로운 角度에서 분석함으로써 不明確한 부분으로 남아있는 亂流構造를 규명하였다.

## 2. 平均定理의 一般化

流動場內 임의의 物理量 또는 物理式(f)은 그의 平均값( $\bar{f}$ )과 變動量( $f'$ )으로 분리할 수 있으며 平均값의 定義는 다음 式으로 表現된다.

$$\bar{f}(\underline{x}, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} G(\underline{x} - \underline{x}', t - t') f(\underline{x}', t') d\underline{x}' dt' \quad (1)$$

여기서  $\underline{x} = (x, y, z)$ 이고,  $G(\underline{x}, t)$ 는 필터函數(filter function)이며 최근에는 아래와 같은 Gauss型이 주로 쓰인다.

$$G(\underline{x}, t) = \left(\frac{\gamma_i}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{\Delta_i} e^{-\frac{\gamma_i t^2}{\Delta_i^2}} \prod_{i=1}^3 \left(\frac{\gamma_i}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{\Delta_i} e^{-\frac{\gamma_i x_i^2}{\Delta_i^2}} \quad (2)$$

여기서  $\gamma_i$  및  $\gamma_i$ 는 필터形態에 따라 결정되는 係數들이고,  $\Delta_i$  및  $\Delta_i$ 는 필터函數의 2차 모멘트에 관계하는 필터幅을 나타낸다. 式 (1)에 Fourier變換을 취하면  $f$ 와  $\bar{f}$ 의 관계를 쉽게 알 수 있으며, 式 (2)에서

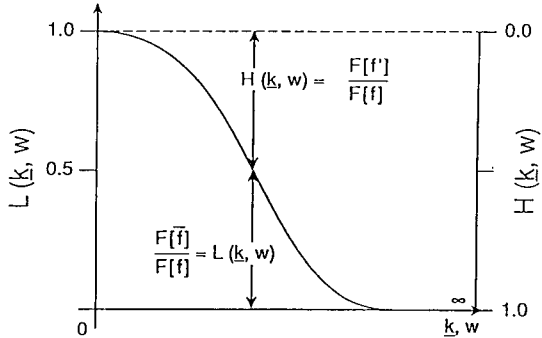


Fig. 2. High pass and low pass filter response function.

空間 필터만을 고려하고 이들의 比를 應答函數(response function)라 정의하면 다음과 같다.

$$\frac{F[\bar{f}]}{F[f]} = e^{-\frac{\Delta^2}{4\gamma_i} k^2} \quad (3)$$

여기서  $F[\cdot]$ 는 Fourier 변환을 나타내고  $k$ 는 wave number이다. 위 식은  $k$ 의 값이 작으면 平均值  $\bar{f}$ 는  $f$ 에 接近하고 큰  $k$ 의 값에서는 0에 수렴하는 성질을 나타내므로, 이것은 亂流解析에 있어 작은 規模의 流動을 消去시키고 큰 規模의 流動만을 분리하고자 하는 解析目的과 부합된다. 이러한 性質을 갖는 필터를 Low Pass Filter(LPF)라 하고, 반대의 性質을 갖는 필터를 High Pass Filter(HPF)라 하며 Fig. 2에 이들의 關係를 나타내었다.

한편 平均定義式 (1)에 의하면  $\bar{\bar{f}} \neq \bar{f}$ ,  $\bar{f}' \neq 0$ 이라는 것을 쉽게 알 수 있으며, 이는 종래 사용하던 Reynolds 平均定理과 완전히 다르므로 아래와 같은 平均된 非線形項은 再糾明되어야 한다.

$$\overline{u_i u_j} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + \overline{u'_i \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i u'_j} + \overline{u'_i u'_j} \quad (4)$$

右邊의 4개 항중 Leonard(1974)는 첫째 항을, Clark 등(1977)은 둘째, 셋째 항을 아래와 같이 재규명하였다.

$$\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j + C \Delta_s^2 (\bar{u}_i \bar{u}_j)_{,kk} \quad (5)$$

$$\overline{u'_i \bar{u}_j} = -C \Delta_s^2 \bar{u}_i \bar{u}_j, \quad \overline{\bar{u}_i u'_j} = -C \Delta_s^2 \bar{u}_i u_j, \quad (6)$$

여기서  $C$ 는 常數이고 添子  $s$ 는 거리를 나타낸다. 한편 Dakhoul과 Bedford(1986)는 時間과 空間의 複合 가우스 平均函數를 사용하여

$$\overline{u_i u_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \frac{\Delta t^2}{4\gamma_t} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\bar{u}_i \bar{u}_j) + \frac{\Delta_s^2}{4\gamma_s} (\bar{u}_i \bar{u}_j)_{,kk} \quad (7)$$

를 제안하였고 Burgers 式에 대한 檢定 結果 상당히 개선된 亂流現象을 재현한다고 報告하였다. 그러나 마지막項은 여전히 未知의 項으로 남겨 위의 解析을 어렵게 하고 있다. 한편, Yeo(1990)에 의하면 이와 같이 4개의 분리된 項을 따로따로 해석하는 接近方法에 疑問을 제기하고 있다. 설혹 4개의 項中 3개의 項을 정확히 표현했다고 하더라도 그것이 式 (4)의 左邊을 정확하게 해석하였다고 볼수없기 때문이며, 이러한 관점에서 보면 현재까지의 제안된 式들은 모두 타당할 수도 부적절할 수도 있다. 왜냐하면 解析目的의 右邊 個個項에 있지않고 左邊 자체이기 때문에 만약 부당한 假定의 導入이나 적절하지 못한 表現式 으로부터 誤差가 발생하더라도 이들은 미지의 項  $\bar{u}'_i \bar{u}'_j$ 에 代替되어지며 결국 Closure 問題로 귀착되기 때문이다. 따라서 式 (4)와 같이 분리된 形態로의 接近方法은 오히려 解析을 더 복잡하고 어렵게 할 뿐이며 다음과 같은 級數 形態로 平均된 非線形項을 표시하였다(Yeo, 1987).

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j} &= \bar{u}_i \bar{u}_j + (2\alpha) u_{i,k} u_{j,k} + \frac{1}{2!} (2\alpha)^2 \bar{u}_{i,kl} \bar{u}_{j,kl} + \dots \\ &= \bar{u}_i \bar{u}_j + R_{ij} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  $\alpha$ 는 필터幅과 필터常數에 관계되는 係數이다. 위 식은 式 (4)와 같이 분리된 個個의 項을 해석하여 합한 것이 아니라 非線形項 자체에 대하여 HPF 및 LPF를 결합하여 平均定義式 (1)에 적용한 결과이며 충분한 數學的 근거를 제공하고 있다.

### 3. SGS項의 動的構造

기존의 亂流模型이 포함하고 있는 서로 다른 Closure 表現式을 一般化시킨 式 (8)의  $R_{ij}$ 의 動的特性을 규명하기 위하여 아래와 같이 物理的 意味가 뚜렷한 變形텐서(deformation tensor,  $S_{ij}$ )와 回轉텐서(rotation tensor,  $\Omega_{ij}$ )를 이용하는 것이 便利하다.

$$S_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \quad (9)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{u}_{i,j} - \bar{u}_{j,i}) \quad (10)$$

SGS項中 影響이 제일 큰 첫째항  $R_{ij}^{(1)}$ 을 식 (9)와 (10)을 사용하여 표시하면 다음과 같다.

$$R_{ij}^{(1)} = (2\alpha)[S_{ik}S_{jk} + S_{ik}\Omega_{jk} + \Omega_{ik}S_{jk} + \Omega_{ik}\Omega_{jk}] \quad (11)$$

여기서 첫째항과 마지막항은 對稱이고 둘째, 셋째항은 非對稱임을 알 수 있다. 그러나 둘째, 셋째항의 합은 對稱이므로 위 식은 다음과 같은 3개의 對稱tensor의 합으로 나타낼 수 있다.

$$R_{ij}^{(1)} = A_{ij} + B_{ij} + C_{ij} \quad (12)$$

물론 이러한 表現式은 高次項의  $R_{ij}^{(n)}$ 까지도 확장시킬 수 있다.  $A_{ij}$ 는 식 (11)의 첫째항을 나타내며 變形텐서끼리의 곱의 形態로서 流體要素의 變形에 의한 影響을 나타낸다. 이러한 형태의 SGS模型은 Smagorinsky(1963) 模型의 形態로서 現在 가장 빈번하게 사용되고 있으나 이것은 경험에 기초하여 제안된 것일뿐 위와 같이 이론식에 의하여 직접 표현된 것은 처음이다.  $B_{ij}$ 는 식 (11)의 둘째항과 셋째항을 합한 것으로서 vorticity와 變形과의 관계를 나타내고 있으며 流體粒子的 distortion結果로 생기는 힘으로 설명될 수 있다. Tennekes와 Lumey(1972)는 일찌기 亂流特性을 규명할 수 있는 매우 중요한 物理的 要素로서 vortex stretching 효과를 주장하였는데 그 이유는 渦의 크기변화(change of eddy size)에 깊이 關與하기 때문이다. 즉 vorticity가 증폭될수록 流體粒子的 變形으로 인한 흐름 規模는 작아지게 되는데, 이는 흔히 sink周圍에서 발생하는 渦流의 形成에서 쉽게 목격되어진다. 이러한 측면에서  $B_{ij}$ 項의 出現은 극히 고무적이다. 더구나 위와 같은 vortex stretching項의 理論的 도출은 에너지 傳達過程에 대한 이해의 폭을 훨씬 넓힐 수 있는 계기를 마련하는데 충분할 것이며 실로 현재까지 流體粒자가 늘어나고 줄어듬에 의한 vortex 規模의 變化를 고려한 SGS模型이나 이러한 現象을 表現한 어떠한 시도도 없음을 감안할 때  $B_{ij}$ 項이 갖는 의미는 매우 중요하다. 마지막 項인  $C_{ij}$ 는 回轉텐서의 곱으로 이루어졌으며, 非回轉流에서는 없어질 것이나 제트流나 後流(wake)와 같이 回轉性이 강한 흐름에서는 큰값을 갖게 된다. 이를 vorticity벡터를 사용하여 표시하면

$$C_{ij} = \frac{1}{4}(\delta_{ij}\omega_m\omega_m - \omega_i\omega_j) \quad (13)$$

가 되고, 여기서  $\omega_i = \epsilon_{ijk}\Omega_{jk}$ 이다. 物理的으로  $1/2\omega_m$ 은 순수 回轉變形만이 존재할 때의 運動에너지이며, off-diagonal項은 서로 다른방향에서의 回轉效果를 표시한다. 一般的으로 亂流흐름은 回轉流의 성격이 강하게 나타나므로,  $C_{ij}$ 項을 무시할 수는 없을 것이다.

## 4. 亂流構造의 實驗的 糾明

### 4.1 利用資料

새로이 開發된 亂流模型의 타당성을 立證시키는 것은 쉬운 일이 아니다. 물론 完全解가 存在하는 경우 模型에서 나온 結果를 이들과 비교하는 것이 가장 理想的이지만 불행히도 亂流에 대하여 完全한 理論解를 얻는 것은 불가능하다. 그러므로 亂流資料를 통한 模型의 타당성을 立證하는 方法이 고려될 수 있으나 實測에 의한 資料 또한 얻기 힘들다. 그 이유는 亂流의 特性上 時間뿐 아니라 空間上에서 극히 작은 規模(smallest scale)의 流動까지 測定하기란 매우 어렵고 실제로  $10^{-4}$ 秒의 order를 갖는 流動成分을 數分동안 測定할 때 그 資料의 量이 방대하며 또한 測定裝置에 의하여 본래 흐름의 방해없이 x, y, z 3次元의 流動을 同時에 正確하게 實測한다는 것은 매우 어렵다. 따라서 차선택으로 實測資料 대신에 數值解析에 의하여 算出된 資料를 利用하는 것이 現在 많이 사용되고 있는 檢證方法이다.

이들 數值模型은 에너지가 소멸되는 최소의 時間과 길이(minimum time and length scale for energy dissipation)보다 計算格子間隔을 더 짧게 취하도록 구성하여 3차원 Navier-Stokes식을 해석하는 것으로서 算出된 資料는 기존의 亂流理論에서 이미 公認된 亂流特性을 만족하느냐의 여부로서 그 타당성을 立證받는다. 예로서 homogeneous한 亂流에서는 -0.4의 歪曲度(skewness)를 나타낸다는 성질(Batchelor, 1963) 또는 에너지 스펙트럼 分析結果 에너지의 生成과 消滅이 平衡(equilibrium)을 이루는 곳에서는 wave number(k)의 -5/3乘 傾斜를 가져야 한다는 것 등이다. 본 연구에서는 1985년 NASA에서 수행한 난류 자료를 이용하였다. 이 자료는  $128 \times 128 \times 128$ 격자점에서 3방향의 유속( $u_1, u_2, u_3$ )과 압력을 Navier-Stokes식을 직접 해석하여 얻은 것으로서 물론 이들 자료들은 위에서 언급한 난류특성에 대한 검토는 이미 끝난 상태이다.

**Table 1.** Correlation Coefficient : Case (I)

(a) 32×32×32			(b) 16×16×16		
0.758	0.803	0.793	0.451	0.552	0.506
0.803	0.784	0.791	0.552	0.513	0.489
0.793	0.791	0.757	0.506	0.489	0.452
mean=0.786			mean=0.501		

**Table 2.** Correlation Coefficient : Case (II)

(a) 32×32×32			(b) 16×16×16		
0.886	0.913	0.915	0.590	0.700	0.661
0.913	0.906	0.912	0.700	0.698	0.654
0.915	0.912	0.885	0.661	0.654	0.610
mean=0.906			mean=0.659		

**Table 3.** Correlation Coefficient : Case (III)

(a) 32×32×32			(b) 16×16×16		
0.906	0.931	0.934	0.624	0.730	0.700
0.931	0.923	0.932	0.730	0.729	0.693
0.934	0.932	0.905	0.700	0.693	0.646
mean=0.925			mean=0.694		

**Table 4.** Correlation Coefficient : Case (A)

(a) 32×32×32			(b) 16×16×16		
0.240	0.167	0.157	0.224	0.131	0.146
0.167	0.277	0.159	0.131	0.338	0.168
0.157	0.159	0.255	0.146	0.168	0.248
mean=0.193			mean=0.189		

**Table 5.** Correlation Coefficient : Case (B)

(a) 32×32×32			(b) 16×16×16		
0.387	0.655	0.663	0.362	0.668	0.657
0.655	0.449	0.681	0.668	0.491	0.700
0.663	0.681	0.365	0.657	0.700	0.331
mean=0.578			mean=0.581		

**Table 6.** Correlation Coefficient : Case (C)

(a) 32×32×32			(b) 16×16×16		
0.374	0.188	0.176	0.369	0.179	0.147
0.188	0.405	0.203	0.179	0.388	0.180
0.176	0.203	0.389	0.147	0.180	0.348
mean=0.255			mean=0.235		

**4.2 收斂特性**

우선 流速資料( $u_1, u_2, u_3$ )로 부터 그들의 平均값( $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ )을 32×32×32 格子點과 16×16×16 格子點을 대상으로 式 (1)의 平均定義式으로부터 구하고 평균된 非線形項( $\bar{u}_1\bar{u}_2, \bar{u}_2\bar{u}_3, \bar{u}_3\bar{u}_1$ )도 같은 方法으로 計算한 후 그들의 1次 微分項과 2次 微分項도 구하였다. 각 項이 갖는 重要도를 알아보기 위하여 式 (8)의 左邊과의 相關係數(correlation coefficient)를 아래와 같은 3가지 경우에 대하여 구하였으며 그 結果는 表 1-3과 같다.

$$\text{Case(I)} : \overline{u_i u_j} \iff \bar{u}_i \bar{u}_j$$

$$\text{Case(II)} : \overline{u_i u_j} \iff \bar{u}_i \bar{u}_j + (2\alpha) \bar{u}_{i,k} \bar{u}_{j,k}$$

$$\text{Case(III)} : \overline{u_i u_j} \iff \bar{u}_i \bar{u}_j + (2\alpha) \bar{u}_{i,k} \bar{u}_{j,k} + \frac{1}{2!} (2\alpha)^2 \bar{u}_{i,k1} \bar{u}_{j,k1}$$

전반적으로 많은 格子를 使用한 32×32×32의 경

우가 16×16×16 格子의 경우보다 相關係數의 값이 크며 대각선(diagonal)의 값과 비대각선(off-diagonal)의 차이는 뚜렷하지 않으며 Case(I)보다는 Case(II)가 크다. Case(III)이 제일 밀접한 관계가 있음을 보이나 Case(II)와의 차이는 0.02 또는 0.04로서 매우 적다. 그러므로 제 1次 微分項을 포함시킴으로써 충분하다고 思料된다.

**4.3 Vortex Stretching의 影響**

이미 앞에서 SGS項이 가지고 있는 動的 構造에 대하여 理論적으로 알아보았으나 여기서는 式 (12)를 構成하고 있는  $A_{ij}, B_{ij}$  및  $C_{ij}$ 의 寄與도를 실제 난류 자료로부터 살펴봄으로서 난류를 구성하고 있는 가장 중요한 物理的 特性이 무엇인가를 알 수 있을 것이다. 특히 Tennekes와 Lumey(1972) 이후 지금까지 피상적으로만 알려져 왔던 vortex stretching의 役割 및 重要도를 立證시킬 경우 亂流構造의 理解와 亂流模型의 開發에 획기적인 지침을 제공할 수 있다. 각 항이 갖는 重要도를 알아보기 위하여 SGS항과의 相關係數를 다음과 같이 각 경우에 대하여 計算하였고 그

결과는 表 4-6에 수록하였다.

$$\text{Case (A)} : \bar{u}_{i,k} \bar{u}_{j,k} \iff A_{ij}$$

$$\text{Case (B)} : \bar{u}_{i,k} \bar{u}_{j,k} \iff B_{ij}$$

$$\text{Case (C)} : \bar{u}_{i,k} \bar{u}_{j,k} \iff C_{ij}$$

이들 表에서 보면 앞서의 결과와 달리  $32 \times 32 \times 32$ 와  $16 \times 16 \times 16$  格子사이의 차이는 찾아보기 힘들다. 이것은 아주 작은 流動은 格子間隔에 影響이 없음을 보임으로서 境界面에서 충분히 떨어진 곳에서는 等方性(isotropic)으로 취급할 수 있다는 Monin과 Yaglom(1971, 1975)의 주장과 一致함을 보여준다.

한편 3가지 項의 중요도를 살펴보면 확실히  $B_{ij}$ 의 影響이 제일 큼을 알 수 있고, 이것은 vortex stretching현상에 의하여 亂流化過程이 이루어짐을 나타내고 있으며 앞에서 언급한 Tennekes와 Lumey(1972)의 結果와 일치되어 시사하는 바가 크다. 또한 Case (A)와 (C)는 diagonal項이 off-diagonal項보다 큰값을 갖는 반면 Case(B)는 그 반대이다. 이것은 매우 重要的 사실로서 亂流에 의한 剪斷應力은 變形과 回轉(deformation and vorticity)의 동시 작용에 支配됨을 나타내준다.

## 5. 기존 LES 模型의 分析

混合距離 理論이나 von Karman의 제안식 또는  $k-\epsilon$  模型과 같은 Reynolds 平均方法에 의하여 도출된 기존의 亂流模型들은 Boussinesq(1877)의 渦動粘性係數(eddy viscosity,  $\nu_t$ ) 개념으로부터 출발하였으므로 이들은 결국 亂流에너지의 표현식으로 귀착되어진다. 이러한 관점은 亂流에너지의 生成 및 消滅이 난류특성중 가장 중요하다는 物理的 現像에 근거하고 있다. 한편 LES의 기존 모형들도 평균된 非線形項을 4個의 項으로 분리시켜 각항을 규명하는 Reynolds 平均에 바탕을 두고 開發된 것이기 때문에 자연히 渦粘性係數 概念에 기초하게 되었고, 따라서 이들 모형들은 SGS에너지의 表現方法에 따라 구분되어진다. 일찌기 Voke와 Callins(1983)는 기존의 LES에 사용되고 있는 SGS模型을 다음의 4가지로 分類하였다.

$$\nu_t = C_0 \quad (\text{常數 模型}) \quad (14)$$

$$\nu_t = C_1 S L^2 \quad (\text{變形 模型}) \quad (15)$$

$$\nu_t = C_2 \omega L^2 \quad (\text{回轉 模型}) \quad (16)$$

$$\nu_t = C_3 \sqrt{kL} \quad (\text{에너지 模型}) \quad (17)$$

여기서  $C_0 \dots C_3$ 는 無次元 常數이고  $S^2 = S_{mn} S_{mn}$ ,  $\omega^2 = \omega_m \omega_m$ 이며,  $S_{ij}$ 나  $\omega_i$ 는 앞에서 정의한 變形텐서와 vorticity벡터이다.  $k$ 는 SGS에너지이며,  $L$ 은 필터幅이나 格子間隔과 관련되는 길이의 次元(length scale)을 표시한다. 常數模型은 亂流의 影響이 작은 경우에 사용되고, 變形模型은 Smagorinsky模型으로 잘 알려져 있으며 氣象豫測을 目的으로 開發된 것으로 Lilly(1967)에 의해 擴張되어 현재까지 가장 빈번하게 사용되고 있다. 回轉模型은 變形模型을 應用시킨 것이며, 에너지模型은 Schumann(1976)에 의하여 提案되었다. LES의 일반적 형태의 모형을 이끌어 내기 위하여 高次平均으로부터 유도된 식 (8)을 이용하여 亂流에너지를 表示하고 식 (17)에 대입하면 다음과 같다.

$$\nu_t = C_3 \left[ \frac{1}{2} (2\alpha) \bar{u}_{i,k} u_{i,k} + \frac{1}{2} (2\alpha)^2 \bar{u}_{i,k1} u_{i,k1} + \dots \right]^{0.5} L \quad (18)$$

여기서 支配項인 첫째항만을 고려하고 이를 다시 變形 및 回轉텐서를 사용하여 표시하면 다음 식을 얻는다.

$$\nu_t = C_3 [\alpha (S_{mn} S_{mn} + S_{mn} \Omega_{mn} + \Omega_{mn} S_{mn} + \Omega_{mn} \Omega_{mn})]^{0.5} L \quad (19)$$

여기서 係數  $\alpha$ 는 길이의 제곱 次元을 갖으므로  $L$ 에 포함시킬 수 있으며 둘째項과 셋째項은 symmetric tensor와 skew-symmetric tensor의 곱이므로 消去된다. 이것을 정리하면 다음과 같다.

$$\nu_t = C [S_{mn} S_{mn} + \Omega_{mn} \Omega_{mn}]^{0.5} L^2 \quad (20)$$

또한 두번째項을 vorticity벡터를 사용하여 表現하면, 다음과 같은 最終的인 式을 얻는다.

$$\nu_t = C [S_{mn} S_{mn} + 0.5 \omega_m \omega_m]^{0.5} L^2 \quad (21)$$

이 式에서 둘째項을 無視하면 식 (15)의 Smagorinsky-Lilly模型과 완전히 一致하고, 첫째項을 무시하면 식 (16)의 回轉模型과 똑같다. 이것으로부터 현재까지 사용되고 있는 수많은 형태의 模型들이 서로 다른

것이 아니라, 根本적으로는 같은 범주에 속하며 모두 SGS에너지에 근거하고 있음을 알 수 있으며, 식 (21) 또는 식 (18)은 이들의 一般的 형태임은 자명하다. 이 식은 더구나 平均定義式에 의한 數學的, 理論的 方法을 통하여 誘導되었으므로 기존의 經驗에 의거한 SGS模型과는 根本적으로 다르다는데 더 큰 意味가 있다. 또한 기존의 模型들이 一貫性을 가지고 開發된 것이 아님을 감안할 때, 위의 몇가지 입증된 사실은 SGS模型은 더이상 논란의 대상이 아님을 보여줌으로서 이들의 體系化에 결정적 지표를 提示해주고 있다.

6. 結 論

回旋積分形態의 平均定義式에 의하여 얻어진 平均된 非線形項의 表現式은 현재까지 사용되는 亂流解析方法과 전혀 다른 새로운 接近方法을 제시하고 있다. 이 方法에 의하면 非線形項을 직접 그들의 平均된 값으로 표현할 수 있기 때문에 非線形項을 4개의 項으로 분리하여 各項을 해석하는 기존 亂流模型이 갖는 불편함을 해소할 수 있으며, 이에 따른 Closure問題의 發生으로 인한 限界性도 극복될 수 있음을 보여준다.

亂流特性에서 매우 중요하다고 概念上으로만 인식되어 왔던 vortex stretching현상을 본 연구에서 처음으로 數學的 表現式으로 導出하였다. 실제 亂流資料의 分析結果에서도 이들의 影響이 가장 큰 것을 알 수 있었으며, 따라서 이는 亂流流動에 필수적임을 의미한다. 그러므로 vortex stretching효과를 무시한 어떤 亂流模型으로부터도 정확한 解析을 기대할 수 없음을 보여준다. 또한 LES模型에 사용되고 있는 Smagorinsky模型, vorticity模型 및 SGS에너지模型은 서로 다른 것이 아니라 동일신상에 있음을 證明하였으며, 이들의 일반적 형태의 표현식을 유도함으로써 既存模型이 갖는 不明確性을 해소시켰다.

謝 辭

본 연구는 1990년 한국학술진흥재단의 자유공모과제 학술연구조성비의 지원을 받아 수행하였음을 밝히고 상기재단에 심심한 사의를 표한다.

參考文獻

Aldama A., 1985. Theory and applications of two and three scale filtering approaches for turbulent flow simulations, Ph.D Thesis, MIT, Cambridge, Mass.

Batchelor, G.K., 1963. The theory of homogeneous turbulence, Cambridge Univ. Press.

Bedford, K.W., 1981. Spectra preservation capabilities of great lakes transport models, in Transport Models for Inland and Coastal Waters, (ed) Fischer, H.B., Academic Press, 172-221.

Boussinesq, J., 1877. Mem. Pre. Par. Div., Sav. 23.

Clark, R.A., Ferziger J.H. and Reynolds W. C., 1977. Evaluation of subgrid scale turbulence models using a fully simulated turbulent flow. Rept. No. TF-9, Dept. of Mech. Engrg., Standford Univ.

Dakhoul, Y. and Bedford, K., 1986. Improved averaging method for turbulent flow simulation Part I and II, *Int. J. for Num. Meth. in Fluid.* 6: 49-82.

Ferziger, J., 1987. Simulation of incompressible turbulent flows, *J. Comp. Physics*, 69(1), 1-48.

Gross, T. and Nowell, A., 1985. Spectral scaling in a tidal boundary layer, *J. Phys. Oceanography*, 15: 496.

Kolmogorov, A., 1941. Dissipation of energy in locally isotropic turbulence, *C.R. Acad. Sci., U.R.S.S.*, 32.

Leonard, A., 1974. Energy cascade in large eddy simulations of turbulence flows, *Adv. in Geophysics*, 18A: 237.

Lilly, D.K., 1967. The representation of small-scale turbulence in numerical simulation experiments, Proc. I.B.M. Scientific Computing Symp. on Env. Sci., 195-202.

Monin, A. and Yaglom, A., 1971. Statistical fluid mechanics; Vol.1, MIT Press, Cambridge, Mass.

Monin, A. and Yaglom, A., 1975. Statistical fluid mechanics; Vol.2, MIT Press, Cambridge, Mass.

Reynolds, O., 1893. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinous, and the law of resistance in parallel channels, *Phil. Trans. Roy. Soc., London. ser. A*, 174: 935-983.

Rogallo, R.S. and Moin, P., 1984. Numerical simulation of turbulent flows, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 16: 99-137.

Schumann U., 1976. Numerical simulation of the transition from three-to two-dimensional turbulence under a uniform magnetic field, *J. of Fluid Mech.*, 74: 31-58.

Smagorinsky, J., 1963. General circulation experiments with the primitive equations, *Monthly Weather Rev.*, 91(3).

Tennekes, H. and Lumey, J.L., 1972. A first course in turbulence, MIT Press.

Voke, P.R. and Collins, M.W., 1983. Large eddy simulation: retrospect and prospect, *Physico-Chemical Hydrodynamics*, 4(2): 119-161.

Yeo, W.K., 1987. A generalized high pass/low pass averaging procedure for deriving and solving turbulent flow equations, Ph.D. Thesis, Ohio State Univ.

Yeo, W.K., 1990. A study on the closure models for analyzing turbulent flow. Proceeding of 7th Congress of APD-IAHR, Beijing, 150-156.