비행기 일정계획 문제를 위한 최적해법
—An Exact Algorithm for the Aircraft Scheduling Problem—

기 재 석*

Abstract

The aircraft schedule is the central of an airline's planning process, aimed at optimizing the deployment of airline's resources in order to maximize profits. In this paper, the aircraft schedule is formulated as an integer programming model and the exact algorithm based on enumeration method is proposed.

1. 서 론

항공사들이 직면하는 주요문제들은 승객수요와 운송능력을 효과적으로 부합시키는 것이다. 항공사들은 일정기간 동안의 일정계획을 수립하여 승객수요와 운송능력을 부합시키고 있다. 항공사의 일정계획을 설계할 때에는 승객의 수요와 항공사의 경제적 관심 그리고 여러가지 운영상의 제약들을 고려해야 한다. 이 때 승객의 요구(운송 서비스 수준)와 항공사의 경제적 관심은 항상 상충하므로 이러한 상충된 요구를 가장 적절하게 조화시킬 수 있는 일정계획 방법의 연구가 필요하다. 승객수요와 운송능력을 부합시키기 위해서는 많은 문제들을 해결해야 한다. 운항편수의 결정문제, 정비계획 그리고 승무원 일정계획 등의 문제해결이 필요하다. 이 중 운항편수와 비행기 출발시간 그리고 비행기 순환의 결정은 같은 운항구간(route)에 경쟁사가 있을 때 승객의 의사결정에 가장 중요한 요인이 된다. 따라서 승객의 수요와 운송능력을 부합시키는 문제에서는 비행기 일정계획(운항편수와 비행기 출발시간 그리고 비행기 순환의 결정)이 우선적으로 필요하다. 비행기 일정계획의 설계를 위한 접근방법으로 Etschmaier와 Mathaisel[6]은 두가지 방법을 제시하였다. 하나는 직접적인 접근방법이고, 다른 하나는 단계적인 접근방법이다. 직접적인 접근방법으로는 발견적 해법이 사용된다. 적절하게 수량화 할 수 없는 요인들이 많은 이유로 전통적인 수리계획으로 최적의 일정계획을 구할 수가 없다는 것이 우세적이다[11]. 과거의 모형에서는 문제의 해결이 전적으로 컴퓨터 중심[1], [10]인 반면 최근의 모형들은 전문적인 일정계획자가 대안의 선택에 영향을 줄 수 있는 대화식 컴퓨터 프로그램[2], [5]들이다. 단계적 접근방법은 여러 단계로 문제를 나누어 해결한다. 첫번째 단계로 각 운항노선에 대한 운항편수를 결정하는 운항편 계획을 수립한다[8]. 다음 단계로 승객의 요구를 충분하게 고려하여 가능한 출발시간을 결정한다[4]. 출발시간이 설정되면 여러 운영조건에 만족하도록 비행기 순환계획을 수립한다[3]. 두가지 접근방법 중 어떤 방법이 비행기 일정계획에 가장 좋은지는 항공사의 구조적 특성에 따라 다르다. 예를 들면 운항편의 출발시간에 승객의 반응이 매우 민감하거나 높은 경쟁상태에서는 단계적 접근방법 보다는 직접적인 접근방법이 더 유익하다[3]. 본 연구에서는 단거리 운항이 많고 경쟁적인 상태에 적합한 직접적인 접근방법에 대한 해법을 제시한다. 최적해를 위한 수리적 모형을 제시하고 나열식 방법(enumeration method)을 응용해 비행기 일정계획의 최적해법을 제시한다.

2장에서는 본 연구에서 사용하는 기호를 정의한다. 3장에서는 비행기 일정계획의 최적해를 위한 나열식 수리적 모형을 제시한다. 4장에서는 분지한계법을 이용한 최적해법을 제시한다.

2. 기호정의

본 연구에서 사용하는 기호는 다음과 같다.

Pjk; 운항편 j가 기종 k로 운항될 때 얻은 순 수익

$$Xijk \begin{cases} =1, & \text{기종 k로 운항편 i 이후 운항편 j가 운항될 때} \\ =0, & \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

$$Xoik \begin{cases} =1, & \text{기종 k로 운항편 i가 모기지에서 출발할 때} \\ =0, & \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

*한양대학교 산업공학과 대학원

접수 : 1992. 4. 25.
확정 : 1992. 5. 2.

Fij=도시 i와 j간의 운항가능한 모든 운항편의 집합

$F = \bigcup_{\forall(i,j)} Fij$

Rj =1, 운항노선 j가 선택될 때

=0, 그 외의 경우

aij =1, 운항편 i가 운항노선 j에 포함될 때

=0, 그 외의 경우

Wk; 교점 k에서의 부분해

Mk; 기종 k의 비행기 대수

3. 비행기 일정계획의 수리적 모형

비행기 일정계획에 대한 직접적인 수리적 모형은 주어진 제약조건을 만족하면서 이익을 최대로하는 운항편을 선택하는 것이다. 이 때 운항편에는 이익이 최대가 되도록 비행기 기종과 출발시간이 정해진다. 이를 다음과 같이 정수계획으로 나타낼 수 있다[9].

목적식 : $\max \sum_i \sum_j \sum_k P_{jk} X_{ijk}$ (1)

제약식 : $\sum_i \sum_k X_{ijk} \leq 1, \ \forall_j$ (2)

$\sum_i X_{iqk} = \sum_j X_{qjk}, \ \forall_{(q,k)}$ (3)

$\sum_i X_{oik} \leq M_k, \ \forall_k$ (4)

$X_{ijk} = 0, \ 1, \ \forall_{(i,j,k)}$

(이 외 여러 운영상 제약조건이 가능함)

그러나 운항편수와 기종이 많아지고, 운영상의 제약조건들이 많아지면 최적해를 구할 수가 없다는 것이 우세적이다. 본 연구에서는 비행기 일정계획을 위한 기존의 IP(Integer Programing) 문제보다 기저변수(basic variables)의 수를 줄일 수 있는 모형을 제시한다. 본 연구에서 제시하는 모형은 가능해를 나열하여 이익이 최대가 되는 가능해를 선택하는 것이다. 가능해 중에서 이익이 최대가 되는 가능해를 선택하는 방법을 나열식 해법이라 정의한다.

가능해의 나열은 선택가능한 운항편 집합 F에서 가능해를 찾아 다음 표1과 같이 나열한다.

표 1. 가능한 운항노선

	1	2	3	4	……	M
1	1	1	0	0	……	0
2	0	0	1	0	……	0
⋮	⋮			⋮		
t	0	0	0	0	……	1
t+1	0	1	0	1	……	0
⋮	⋮			⋮		
N	1	0	1	1	……	1
P=	25	29	32	34	……	17

표 1에서 각 열(column)은 가능해(운항노선)를 나타내고 각 항(row)은 기종과 운항편 집합 F에 있는 운항편을 나타낸다. 기종이 t이면 처음 t행은 기종을 나타내고 (t+1) 행부터 운항편을 나타낸다. 최종행(P)은 각 가능해의 수익을 나타낸다. 표내에 있는 각 요소들 a_{ij}는 운항편 i가 가능해 j에 선택되어 있는지를 나타낸다. 표 1에 나열된 가능해 중에서 최적해를 선택하는 수리적 모형은 다음과 같다.

목적식 : $\max \ Z = \sum_{j=1}^{M} P_j R_j$ (5)

제약식 : $\sum_{j=1}^{M} a_{ij}R_j \le 1, \ i=t+1, \ \cdots, \ N$ (6)

$\sum_{j} a_{ij}R_j = M_i, \ i=1, \ \cdots, \ t$ (7)

$a_{ij}=0, \ 1, \ \forall(i, \ j)$

$R_j=0, \ 1, \ \forall_j$

본 연구에서 제시하는 나열식 수리적 모형(식 5)은 기존의 정수계획 모형(식 1)에서 보다 많은 결정변수를 갖는다. 그러나 기존의 정수계획 모형에서 제약식 (2), (3), (4)의 개수보다 나열식 수리적 모형에서 제약식 (6), (7)의 개수는 제약식 (3)의 개수만큼 적어진다. 그런데 제약식 (3)은 총 운항편수와 기종의 곱이므로 다른 어떤 제약식보다 많다. 따라서 본 연구에서 제시한 나열식 수리적 모형은 기존의 정수계획 모형보다 결정변수는 많아지나 제약식이 "총 운항편수＊기종수" 이상 줄어 기저변수가 기존의 정수계획 모형보다 적어진다. 본 연구에서 제시하는 나열식 수리적 모형은 기존의 정수계획 모형으로 모형화 했을 때보다 기저변수가 보통 1/3 이상 줄어들어 문제를 짧은 시간에 풀 수가 있다.

4. 나열식 최적해법

본 연구에서 제시하는 나열식 최적해법은 3장에서 제시한 나열식 수리모형에 대한 최적해법이다. 나열식 최적해법은 SCP(Set Covering Problem) 또는 PP(partitioning Problem)에서 최적해를 구하는 해법으로 많이 사용되는 분지한계법을 응용해서 나열된 가능해 중에서 최적해를 선택하는 해법이다.

최적해에 접근하기 위해서 먼저 가능한 모든 가능해(운항노선)을 구한다. 다음 SCP 또는 PP에서 사용하는 제거규칙(reduction)을 이용해 삭제가능한 행 또는 열을 삭제한다. 남아있는 가능해 중에서 나열식 최적해법을 이용해 최적해를 구한다.

4.1 가능해를 구하는 방법

그림 1에서 운항편 u와 v가 연결이 되려면 다음 조건을 만족해야 한다.

조건 1, 운항편 u의 도착지와 운항편 v의 출발지가 같다.

조건 2, 운항편 u의 도착시간과 운항편 v의 출발시간 간의 차가 최소 G/T(Ground Time) 이상이다. 이 때 최소 G/T는 기종별, 공항별로 주어진다.

조건 3, G/T이 일정이상의 시간을 초과하지 않는다. 이 때 일정이상의 시간값은 회사에서 정책적으로 정할 수 있다.

그림 1. 운항편간의 연결

모든 운항편들간의 연결이 이상의 조건을 만족하도록 가능한 운항노선을 구한다. 이상의 조건외에 회사마다 운항편 연결에 다른 조건을 줄 수 있다.

4.2 분지한계의 방법

본 연구에서 제시하는 나열식 최적해법은 분지한계법을 이용해 가능해 중에서 이익이 최대가 되는 최적해를 구한다. 나열식 최적해법을 제시하기 전에 분지한계의 방법을 먼저 설명한다.

교점 k에서 부분해(partial solution)를 Wk로 두고 다음과 같이 정의한다.

$S_k^+ = \{j \mid j \in W_k$ 그리고 $R_j=1\}$

$S_k^- = \{j \mid j \in W_k$ 그리고 $R_j=0\}$

$F_k = \{j \mid j \notin W_k\}$

교점 k에서의 문제는 다음과 같이 된다.

$$\max Z_k = \sum_{j \in F_k} P_jR_j + \sum_{j \in S_k^+} P_j \qquad (8)$$

$$\sum_{j\in F_k} a_{ij}R_j \le M_i - \sum_{j\in S_k^+} a_{ij} \quad i=1, \cdots, t \tag{9}$$

$$\sum_{j\in F_k} a_{ij}R_j \le 1 - \sum_{j\in S_k^+} a_{ij}, \quad i=t+1, \cdots, N \tag{10}$$

$Q_k = \{i \mid a_{ij}=0, \ i \ge t+1, \text{ for } \forall j \in S_k^+\}$로 두고 $Z_k = \sum_{j\in S_k^+} P_j$로 두면 식 (8), (9), (10)은 다음과 같다.

$$\max Z_k = \sum_{j\in F_k} P_jR_j + Z_k \tag{11}$$

$$\sum_{j\in F_k} a_{ij}R_j \le M_i - \sum_{j\in S_k^+} a_{ij}, \quad i=1, \cdots, t \tag{12}$$

$$\sum_{j\in F_k^+} a_{ij}R_j \le 1, \quad i \in Q_k \tag{13}$$

$$\forall x_j = 0, \ 1, \ i \in F_k$$

교점 k에서 목적식 (11)을 LP로 풀면 다음과 같은 3가지 경우가 발생할 수 있다.

경우 1) 비정수해의 최적해(Z_k^*, R^*)를 갖는다.
경우 2) 정수 최적해(Z_k^*, R^*)를 갖는다.
경우 3) 최적해가 존재하지 않는다. 이 때는 $Z_k^* = -\infty$로 둔다.

경우 2)와 3)에서는 $Z_o = \max\{Z_o, \ Z_k^*\}$로 두고 백트랙(back track) 한다. 경우 1)에서는 $\langle Z_k^* \rangle \le Z_o$이면 백트랙하고 그렇지 않으면 $R_j' = \langle R_j^* \rangle$로 둔다.
R_j' 중에서 중복되는 가능해를 제외시킨 프라임 커버해(prime cover solution)을 구한다.
프라임 커버해를 구하는 방법은 다음과 같다.

단계 1. $J^k = \{j \mid R_j' = 1, \ j \in F_k\}$로 커버(cover) J^k와 중복되는 열의 집합을 R^k로 둔다.
$J^* \in R^k$가 다음 조건을 만족하면 R^k에 중복된다.

$$\sum_{j\in R^k} a_{ij} \ge 2, \quad \forall i \in P_j^*$$

단계 2. $f(j) = C_j / \sum_{j\in Q^k} a_{ij}, \quad j \in R^k$

다음을 만족하는 j^*를 선택한다.
$f(j^*) \min_{i\in R^k} f(j)$
$J^k = J^k - \{j^*\}$로 두고 다음 단계로 간다.

단계 3. $R^k \neq 0$이면 단계 2로 간다.
$R^K = 0$이면 끝낸다.
커버해(cover solution) R^k는 다음과 같다.

$R_j^k \quad i=1, \ j \in J^k$
$\quad\quad =0,$ 그 외의 경우

교점 k에서는 교점 k에서의 문제를 LP로 해를 구한 후에 위의 3가지 경우에 따라 분지 또는 백트랙을 한다.

4.3 나열식 최적해법

본 연구에서 제시하는 나열식 최적해법은 분지한계법을 이용한다. 각 교점에서 LP로 해를 구한 후에 4.2에서 보인 세가지 경우에 따라 분지 또는 백트랙한다. 최적해를 구하는 단계는 다음과 같다.

단계 0 : 초기화
$k=0, \ S_0^+ = \phi, S_0^- = \phi, \ F_0 = \{j \mid j = \forall_j\}, \ Z_o = -\infty$

단계 1 : 교점 k에서의 최적해
if $Q_k = \phi$이면, 식(11)의 최적해는 (Z_k, 0)이다. 단계 5로 간다.
if $Q_k \neq \phi$이면, 식(11)에 대한 최적해를 구한다.
다음 3가지 경우가 발생한다.
경우 1, 최적해(Z_k^*, R^*)가 비정수해이다. 단계2로 간다.
경우 2, 최적해(Z_k^*, R^*)가 정수해이다. 단계3으로 간다.
경우 3, 최적해가 존재하지 않는다. 단계 4로 간다.

단계 2 : 경우 1

$\quad$ if$\langle Z_k^* \rangle \leq \underline{Z}_0$이면 단계 5로 간다.

$\quad$ if$\langle Z_k^* \rangle > \underline{Z}_0$이면 $R_j' = \langle R_j^* \rangle$, $j \in F_k$, $R_j' = 1$, $j \in S_k^+$, $R_j' 0$, $j \in S_k^-$로 둔다.

$\quad$ 다음에서 프라임 커버 R^k를 구한다.

$\quad$ $\underline{Z}_0 = \max \{\underline{Z}_0, Z^k\}$로 둔다. 여기서 $Z^k = \sum_{j \in J_k} P_j + Z_k$이다.

$\quad$ $\bar{S}^+_{k+1} = J^k U S_k^+$에 상응하는 W_{k+1}로 분지(branch)한 다음 바로 단계 5로 간다.

단계 3 : 경우 2

$\quad$ if $k=0$이면 최적해는 $\{Z_0^*, R^*\}$이다. 종료한다.

$\quad$ if $k \neq 0$이면 $\underline{Z}_0 = \max \{\underline{Z}_0, Z_k^*\}$로 두고 단계 5로 간다.

단계 4 : 경우 3

$\quad$ if $k=0$이면 해가 존재하지 않는다.

$\quad$ if $k \neq 0$이면 $Z_k^* = -\infty$로 둔다. 단계 5로 간다.

단계 5 : backtrack

$\quad$ $k = k+1$

$\quad$ $S_k^+ = \{j_1, \cdots, j_{s-1}, j_s\}$ 이면 $S_k^+ = \{j_1, \cdots, j_{s-1}, \underline{j_s}\}$로 두고, $S_k^+ = \{j_1, \cdots, j_{s-1}, \underline{j_s}\}$이면 $S_k^+ = \{j_1, \cdots, j_{s-1}\}$로 둔다.

$\quad$ S_k^+에 상응하는 W_k로 백트랙한다. 이때 전개할 교점이 없으면 종료한다.

본 연구에서 제시하는 나열식 최적해법에서는 최기에 최적해에 근사한 값을 초기 하한가(lower bound)로 두기 때문에 분지가 되는 경우가 적개 발생하므로 최적해에 도달하는 속도가 빠르다.

5. 결 론

비행기 일정계획은 항공사의 계획업무 중 가장 핵심이 되는 업무이다. 항공사의 규모가 작고 비 경쟁적인 상태에서는 전통적인 수리모형에 의해 비행기 일정계획의 최적해가 가능하였다. 그러나 항공사의 규모가 커지고 수량화가 어려운 제약들에 의해 최적해를 구하는 것이 어렵다. 그러나 비행기 일정계획은 항공사의 중심적인 업무이므로 계획적인 최적화해법에 대한 연구가 필요하다. 비행기 일정계획을 위한 기존의 정수계획모형은 제약조건이 많아 문제 크기가 큰 경우에는 최적해를 구하기가 어렵다. 본 연구에서는 기저변수를 줄일 수 있는 나열식 수리적모형을 제시하고 분지한계법을 이용한 나열식 최적해법을 제시하였다. 나열식 최적해법은 가능한 운항노선을 모두 구해 나열한 후 이익이 최대가 되는 가능해를 분지한계법을 이용해 최적해를 구한다.

참 고 문 헌

[1] A. Levin, "Scheduling and Fleet Routing Models for Transportation System," *Trans. Sci. 5*, 232-255, 1971.

[2] C. M. Smith and J. S. Kyle, "On Line Flight Schedule Development," *AGIFORS 12*, 1972.

[3] D. L. Struve, "Intercity Transportation Effectiveness Model," *AGIFORS 10*, 1970.

[4] G. Gagnon, "A Model for Flowing Passenger, Over Airline Networks," *AGIFORS 7*, 1967.

[5] M. Niederer, "Frequency and Schedule Optimization by LP," *AGIFORS 11*, 1971.

[6] M. M. Etschmaier and D. F. X. Mathaisel, "Aircraft Scheduling : The State of the Art," *AGIFORS 24*, 1984.

[7] M. M. Etschmaier and D. F. X. Mathaisel, "Airline Scheduling : An Overview," *Trans. Sci. 19*, 129-137, 1985.

[8] R. Miller, "An Optimization Model for Transportation Planning," *Trans. Res. 1*, 271-286, 1967.

[9] T. Abara, "Fleet Assignment using Integer Linear Programming," *AGIFORS 23*, 251-263, 1983.

[10] Y. Chan, "Configuring a Transportation Route Network Via the Method of Successive Approximation," *Comput. Opns. 1*, 122-148, 1973.