공통납기를 고려한 주문생산형 일정계획문제
－Job Shop Scheduling Problems with Common Due Date－

김 진 규*
이 근 부**

ABSTRACT

This paper is concerned with an n jobs one machine job shop scheduling problems in which all jobs have a common due date and unequal penalties occur when a job is completed before or after due date. The objective is to determine an optimal sequence and the corresponding common due date that yield the global minimum value of a penalty function. Then a sequence that minimize the penalty function globally is a V-shaped sequence. Using the idea of linear equations and a LGP(Linear Goal Programming), this paper shows that LGP and MAD(Mean Absolute Deviation) are equivalent problems. Therefore an efficient algorithm that is developed for MAD problem holds for LGP problem and vice-versa. A numerical example to account for the algorithm is provided.

1. 서 론

전반적으로 생산계획의 최적의사결정에 의해서 일정한 생산기간 동안에 생산해야 할 제품의 종류와 수량이 결정되고, 그 다음 생산공정을 결정한 뒤에 제품 생산에 필요한 각 작업을 수행하는 일정에 대한 실제의 실시계획을 설정해야만 한다. 이것은 누가, 언제, 어느 기계로 무슨 작업을 하는가를 정하는 것이다. 이에 대한 최적 또는 실시 가능한 상세한 계획을 생산일정계획(production scheduling)이라 한다. 여기서 주어진 기계에서 어떤 순서로 가공작업을 처리해야 하는가를 결정하는 것이 가장 중요한 데, 이것을 작업순서계획(job sequencing)이라 한다[4, 11, 12].

작업순서계획 문제 중에서 납기문제(due date problem)를 다루는 데 있어서 지금까지는 평균 순수납기지연(average tardiness), 최대 순수납기지연(maximun tardiness), 그리고 납기지연된 작업의 수에 관한 수행도 평가 문제는 소홀히 취급되어 왔다. 이와 더불어 작업조기완료(earliness)에 따른 비용도 무시되었다. 납기는 대개 외부의 제약조건이므로 납기지연 손실은 필수적이며, 작업조기완료도 그 비용이 간접비 성격을 띄므로 결국 비효율적인 비용이 된다[3].

납기지연은 주문에 대한 보상비와 고객의 체면손실등 모든 기회비용의 요소를 포함한다. 납기전 작업조기완료는 과다의 재고비를 유지시키며, 특히 제품이 진부화 되기 쉬운것이면 그 잠재적인 손실은 막대하며, 다품종 소량 생산체제하에서 만약 주문이 취소되었을 시에는 과다 보유재고를 가질 위험을 내포하므로 불확실한 상황하에서 수요변동에 적절히 대처할 수 있는 능력을 상실하게 해준다.

이와같은 두가지 경우 즉, 납기지연과 납기전 작업조기완료에 대하여 벌과금(penalty cost)을 추정하는 것은 JIT(Just In Time) 재고통제정책의 개념과 완전히 일치한다[5, 6, 13]. 이런 문제들은 각 작업에 대하여 똑같은 처리 즉, 각 작업이 시스템내에서의 거의 똑같은 시간을 낭비하거나 모든 작업이 똑같은 시간을 서비스 받기 위해서 기다려야 하는 생산환경에서나 서비스분야에서 제기된다[14].

이 문제를 해결하는 방법론에 있어서는 모의실험적인 방법을 사용한 연구로서 Cheng(1987, [7]), (1990, [8])과 Eilen et al(1976, [9]) 등을 들수 있으며, 해석적인 방법을 사용한 연구는 Bagchi et al(1986, [2]), Panwalker et al(1982, [16]), Kanet(1981, [15]) 등을 들 수 있다.

따라서 본 연구는 모든 작업이 공통납기(common due date)를 가지며, 이 공통납기 전후에 작업이 완료될

---

*수성전문대 공영경영학과
**청주대 산업공학과
접수 : 1992. 4. 14.
확정 : 1992. 4. 24.

때 일어나는 편차를 수반하는 단일기계의 주문생산형 작업일정계획 문제를 다루고자 한다. 본 연구의 목적은 최적 공통납기에 대응하는 최적 순서계획에 있어서 완료시간의 평균절대편차(Mean Absolute Deviation; MAD)를 최소화 하도록 선형목표계획법(linear goal programming)을 이용한 최적의 공통납기와 순서계획을 구하는 것이다.

2. 단일기계의 일정계획 모델

2.1 전제 조건

단일기계에 있어서 최적의 공통납기와 최적 순서계획을 구하는 수리적 모델을 설정하기 위한 전제조건은 다음과 같다.

1. 모든 작업의 가공은 시간 '0'에서 작업이 가능하다. 즉 준비시간이 '0'이다.
2. 작업의 준비시간은 작업순서에 독립적이며 이 시간은 가공시간에 포함되어 있다.
3. 작업상황(작업수, 가공시간 등)은 사전에 미리 주어지며, 가공시간은 정히 양수(strictly positive)이다.
4. 기계는 연속적으로 이용 가능하며, 작업물이 기다리는 데 절대 휴지시간(idle time)은 존재하지 않는다.
5. 가공중인 작업은 그 기계에서 가공이 끝날 때까지 제거되지 않는다.
6. 모든 비용요소는 선형이다.

2.2 부호 설명

모델 전개를 위하여 다음과 같은 부호를 정의한다.

$N=\{1, 2, \cdots, n\}$ n개의 독립된 작업의 집합.

π = 집합 N에 있는 n개의 작업으로 만들어지는 $n!$개의 순서집합.

$\sigma=\pi$에서의 임의의 작업순서.

$\sigma^*=\pi$에서의 최적 작업순서.

$J_i(\sigma)$ = 순서 σ에서 i번째에 위치해 있는 작업

$P_i(\sigma)=J_i(\sigma)$의 가공시간

$k_i(\sigma)=\sigma$에 관계된 공통납기로서 k로 표시됨

$k^*(\sigma)=k(\sigma)$의 최적값으로서, k^*로 표시됨.

$r(\sigma)=\sigma$에 관계된 최적 공통납기의 위치로서, r로 표시됨.

$r^*=\sigma^*$에 관계된 최적 공통납기의 위치

$E(\sigma)$ = 조기완료된 작업 $J_i(\sigma)$의 집합. 단 $i=1, 2, \cdots, r-1, r$

$T(\sigma)$ = 납기지연된 작업 $J_i(\sigma)$의 집합. 단 $i=r+1, r+2, \cdots, n-1, n$

$C_s(\sigma)=J_s(\sigma)$의 작업완료시간

$d_{i1}(\sigma)=J_i(\sigma)$의 순수납기지연

$d_{i2}(\sigma)=J_i(\sigma)$의 작업조기완료

$y_{i1}(\sigma)=J_i(\sigma)$에 있어서의 슬랙(slack) 변수

$y_{i2}(\sigma)=J_i(\sigma)$에 있어서의 잉여(surplus) 변수

$w_{[i]1}$ = 어떤 순서 σ에서 i번째 위치한 작업에 관계된 순수납기지연의 단위 벌과금(>0)

$w_{[i]2}$ = 어떤 순서 σ에서 i번째 위치한 작업에 관계된 작업조기완료의 단위 벌과금(>0)

$w_{[i]}=\pi$의 모든 순서에 있어서 J_i에 관계된 단위손실로서, $w_{[i]}=w_{[i]1}$ 또는 $w_{[i]2}$ 임.

2.3 수리 모델의 설정

가공시간 $P_i(\sigma)$를 가진 작업 $J_i(\sigma)$의 어떤 순서 $\sigma(\in\pi)$가 주어졌다고 하자. 그러면 작업과 순서들을 다음과 같이 분류할 수가 있다.

작업위치	: 1	2	$\cdots$	n
벌과금	: $w_{[1]}$	$w_{[2]}$	$\cdots$	$w_{[n]}$
σ	: $J_1(\sigma)$	$J_2(\sigma)$	$\cdots$	$J_n(\sigma)$
$P_i(\sigma)$	: $P_1(\sigma)$	$P_2(\sigma)$	$\cdots$	$P_n(\sigma)$

단일기계에서 휴지시간이 허용되지 않으면 일정계획은 지배적인 집합(dominant set)을 형성하므로, 작업완료시간은 다음과 같다[4].

$$C_s(\sigma)\sum_{i=1}^{s} P_i(\sigma) \qquad s=1, 2, \cdots, n \qquad (1)$$

최적 일정계획 $\sigma^*(\in\pi)$를 구하기 위한 MAD의 최소화 문제를 정식화하면 다음식 (2)와 같다[15].

$$(\text{MAD})\ Z(\sigma)=\sum_{i=1}^{n} |k-C| /n \qquad (2)$$

$$k=k(\sigma),\ C_i=C_i(\sigma),\ i=1, 2, \cdots, n$$

식 (2)에서 공통납기 $k(\sigma)$에 대한 작업 $J_i(\sigma)$의 작업완료시간 $C_i(\sigma)$의 비음수편차 $k-C_i$는 작업 $J_i(\sigma)$의 작업조기완료 $d_{i2}(\sigma)$와 순수납기지연 $d_{i1}(\sigma)$를 사용하여서 Francis and White[10] 식으로 표현할 수 있다.

$$k-C_i=d_{i2}-d_{i1} \qquad (3)$$

단, $d_{i1}=d_{i1}(\sigma),\ d_{i2}=d_{i2}(\sigma),\ i=1, 2, \cdots, n$

식 (2), (3)과 Panwalker et al[16]의 정식화 모델을 이용한, 단일기계의 최적 공통납기와 최적 순서계획을 구하는 선형목표계획(Liner Goal Programming;LGP) 문제는 다음과 같이 정식화 할 수 있다[1].

$$(\text{LGP})\ \text{minimize}\ f(\sigma)=\sum_{i=1}^{n} (d_{i1}+d_{i2}) \qquad (4)$$

$$\text{subject to}\ k+d_{i1}-d_{i2}=C_i\ \text{for all}\ J_i(\sigma) \qquad (5)$$

$$k\geq 0$$
$$d_{ij}\geq 0$$
$$i=1, 2, \cdots, n$$
$$j=1, 2$$

그런데 LGP와 MAD는 서로 같은 문제이므로, 결과적으로 MAD 문제를 해결하는 것은 LGP 문제를 해결하는 것이다[5]. 이 LGP 문제를 일반적인 경우의 선형목표계획(Generalized Liner Goal Programming:GLGP) 문제로 정식화하면 다음과 같다.

$$(\text{GLGP})\ \text{minimize}\ f(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}(w_{[i]1}d_{i1}+w_{[i]2}d_{i2}) \qquad (6)$$

$$\text{subject to}\ k\geq 0$$
$$d_{ij}\geq 0$$
$$i=1, 2, \cdots, n$$
$$j=1, 2$$

LGP 문제는 이 GLGP 문제에서 $w_{i1}=1,\ w_{i2}=1$인 경우이다. 즉 순수납기지연과 작업조기완료에 부과되는 단위 벌과금이 같은 경우이다.

3. 최적일정계획 기법 개발

π의 순서중에서 $f(\sigma)$를 최소화시키는 순서계획은 V-모형임을 증명하여서 최적일정계획기법을 개발한다.

3.1 기법의 유도

식 (5), (7)에서 변수 d_{i1}과 d_{i2}는 동시에 기저변수(basic variable)가 될 수 없다. 그러므로 GLGP의 최적해는 하나의 값만이 양수가 될 수 있다. 이것은 작업 $J_i(\sigma)$는 동시에 작업조기완료나 납기지연이 될 수 없음을 나타낸다. GLGP에서 작업 순서 σ에 관련된 최적 공통납기 k^*는 σ에 있는 작업들이 시작되기 전에는 절대로 발생하지 않는다. 즉 $k^*>0$이다. 이것은 조기완료되는 작업이 적어도 하나가 있다는 것을 의미한다.

MAD 문제를 해결하기 위한 방법을 개발하는 데 이용되는 기본적인 이론들은 다음과 같다.

〈이론 1〉

어떤 특정의 σ에 대하여, 공통납기 $k(\sigma)$ 중의 최적값 k^*가 존재하게 되는데, 이 값은 σ 내에 있는 작업들 가운데서 정확히 하나의 완료시간과 일치한다. (단, $k>0$)

〈증명〉

$k>0$이므로 GLGP에서 k는 기저변수이다. 기저변수는 총 n개 이므로, 그 외에 $n-1$개의 변수가 있어서 식 (7)에서 총 변수는 $2n-1$개이다. 따라서 k 이외에도 $d_{11}, d_{21}, \cdots, d_{n1}$과 $d_{12}, d_{22}, \cdots, d_{n2}$같은 2_n개의 변수가

있다. 그러므로 위에서 언급한 바와 같이 이 중에서 기껏해야 n개가 양수값을 갖는다.

i) 경우 1 : 2n개의 변수 중 정확히 n개가 양수일 경우

이 경우에는 $k^* > 0$이므로 $n+1$개의 변수가 양수가 되어 모순이다.

ii) 경우 2 : 2n개의 변수 중 정확히 $n-1$개가 양수일 경우

GLGP에서 양쪽편차가 '0'인 제약식이 정확히 한개이어야 한다. 이 식을 r번째($1 \le r \le n$)식 이라고 하면 $k^* = C_r$이다.

iii) 경우 3 : 2n개의 변수 중 정확히 q개($1 \le q \le n-2$)가 양수인 경우

GLGP에서 양쪽편차가 '0'인 제약식이 적어도 2개이어야 하므로, k^*는 적어도 2개 작업의 완료시간이 같다. 이것은 역으로 적어도 2개의 작업완료시간이 같다는 의미이므로 모순이다. 따라서 '경우 2'에서 처럼 $k^* = C_r$이므로 〈이론 1〉이 정당함을 알 수가 있다. 〈증명끝〉

〈이론 2〉

어떤 특정의 순서 σ에 있어서, 최적 공통납기 k^*는 작업 $J_r(\sigma)$의 완료시간 $C_r(\sigma)$와 일치하며, 이때 r은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sum_{i=1}^{r-1} w_{[i]2} - \sum_{i=r}^{n} w_{[i]1} \le 0 \quad \cdots\cdots (8)$$

$$\sum_{i=1}^{r} w_{[i]2} - \sum_{i=r+1}^{n} w_{[i]1} \ge 0 \quad \cdots\cdots (9)$$

〈증명〉

GLGP 문제의 모델에서 식 (7)에 슬랙변수 y_{i1}와 잉여변수 y_{i2}를 도입하여 다음의 GLGP1 모델로 정식화 할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\text{GLGP1 minimize } & f(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (w_{[i]1}\, d_{i1} + w_{[i]2}\, d_{i2}) \\
\text{subject to } & k + d_{i1} - d_{i2} + y_{i1} = C_i \text{ for all } J_i(\sigma) \quad \cdots\cdots (10) \\
& k + d_{i1} - d_{i2} - y_{i2} = C_i \text{ for all } J_i(\sigma) \quad \cdots\cdots (11) \\
& k,\ d_{i1},\ d_{i2},\ y_{i1},\ y_{i2} \ge 0 \\
& i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n
\end{aligned}$$

GLGP1의 최적해에서 $I_j = C - Z_j$ 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
Id_{r1} &= w_{[r]1} - \{(w_{[1]2} + w_{[2]2} + \cdots + w_{[r-1]2}) - (w_{[r+1]1} + w_{[r+2]1} + \cdots + w_{[n]1})\} \\
&= w_{[r]1} - \sum_{i=1}^{r-1} w_{[i]2} + \sum_{i=r+1}^{n} w_{[i]1} \ge 0 \\
&\therefore \sum_{i=1}^{r-1} w_{[i]2} - \sum_{i=r}^{n} w_{[i]1} \le 0 \quad \cdots\cdots (8')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Id_{r2} &= w_{[r]2} + \{(w_{[1]2} + w_{[2]2} + \cdots + w_{[r-1]2}) - (w_{[r+1]1} + w_{[r+2]1} + \cdots + w_{[n]1})\} \\
&= w_{[r]2} + \sum_{i=1}^{r-1} w_{[i]2} - \sum_{i=r+1}^{n} w_{[i]1} \ge 0 \\
&\therefore \sum_{i=1}^{r} w_{[i]2} - \sum_{i=r+1}^{n} w_{[i]1} \ge 0 \quad \cdots\cdots (9')
\end{aligned}$$

식 (8'), (9')로 부터 식 (8), (9)가 유도되었다. 〈증명끝〉

〈이론 2〉에서 $r(\sigma)$의 값은 σ에 독립적이다. 그러므로 $r(\sigma)$는 r로 나타낼 수 있다. 그리고 $w_{[i]1} = w_{[i]2} = 1$로 두면, 식 (9)에서 r 값은 $n/2 \le r < (n/2)+1$로 부터 구할 수 있다.

임의의 V자형 작업순서 $\sigma_t (\in \pi)$에 있어서, 작업 $J_m(\sigma_t)$는 작업 $E(\sigma_t)$내에 있고, 작업 $J_s(\sigma_t)$는 $T(\sigma_t)$내에 있으며, 작업쌍 $J_m(\sigma_t)$와 $J_s(\sigma_t)$는 다음 조건만 만족하면 서로 보완쌍(complementary pairs)이다. 이 조건은 $P_m(\sigma_t) < P_s(\sigma_t)$와 $P_m(\sigma_t)$와 $P_s(\sigma_t)$를 서로 교환하면 σ_t에서 또 하나의 V자형 작업순서 σ_{t+1}를 형성하는 것이다.

〈정리 1〉

π에 있는 임의의 작업순서를 σ_t로 두면, $1 \le m < s \le n$에 대하여, 작업 $J_m(\sigma_t)$와 $J_s(\sigma_t)$의 가공시간은 $P_m(\sigma_t)$와 $P_s(\sigma_t)$로 들 수 있다.

단, $P_m(\sigma_t) < P_s(\sigma_t)$이다. 이 $J_m(\sigma_t)$와 $J_s(\sigma_t)$의 가공시간을 상호교환함으로써 작업순서 σ_{t+1}를 구할 수

있으며 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

(a) i) $\Delta P_{ms}(\sigma_t)=P_s(\sigma_t)-P_m(\sigma_t)>0$

ii) $\Delta P_{sm}(\sigma_t)=P_m(\sigma_t)-P_s(\sigma_t)=-\Delta P_{ms}(\sigma_t)<0$

iii) $\Delta C_i(\sigma_t)=0$, $i=1, 2, \cdots, m-1$과 $i=s, s+1, \cdots, n$

iv) $\Delta C_i(\sigma_t)=\Delta P_{ms}(\sigma_t)>0$, $i=m, m+1, \cdots, s-1$

(b) i) $C_i(\sigma_{t+1})=C_i(\sigma_t)+\Delta C_i(\sigma_t)$, $i=1, 2, \cdots, n$

ii) $C_i(\sigma_{t+1})=C_i(\sigma_t)$, $i=1, 2, \cdots, m-1$과 $i=s, s+1, \cdots, n$

iii) $C_i(\sigma_{t+1})>C_i(\sigma_t)$, $i=m, m+1, \cdots, s-1$

(c) i) $P_m(\sigma_{t+1})=P_m(\sigma_t)+\Delta P_{ms}(\sigma_t)$

ii) $P_s(\sigma_{t+1})=P_s(\sigma_t)+\Delta P_{sm}(\sigma_t)$

$\qquad\qquad=P_s(\sigma_t)-\Delta P_{ms}(\sigma_t)$

iii) $P_i(\sigma_{t+1})=P_i(\sigma_t)$, $i, 2, \cdots, n$과 $i\neq m, s$

〈정리 2〉

π에 있는 임의의 작업순서를 σ_t로 두면 $1\leq m<s\leq n$에 대하여, 작업 $J_m(\sigma_t)$와 $J_s(\sigma_t)$의 가공시간은 $P_m(\sigma_t)$와 $P_s(\sigma_t)$로 둘 수 있다.

단, $P_m(\sigma_t)>P_s(\sigma_t)$이다. 이 $J_m(\sigma_t)$와 $J_s(\sigma_t)$의 가공시간을 상호교환함으로써 작업순서 σ_{t+1}를 구할 수 있으며 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

(a) i) $\Delta P_{ms}(\sigma_t)=P_s(\sigma_t)-P_m(\sigma_t)<0$

ii) $\Delta P_{sm}(\sigma_t)=P_m(\sigma_t)-P_s(\sigma_t)=-\Delta P_{ms}(\sigma_t)>0$

iii) $\Delta C_i(\sigma_t)=0$, $i=1, 2, \cdots, m-1$과 $i=s, s+1, \cdots, n$

iv) $\Delta C_i(\sigma_t)=\Delta P_{ms}(\sigma_t)<0$, $i=m, m+1, \cdots, s-1$

(b) i) $C_i(\sigma_{t+1})=C_i(\sigma_t)+\Delta C_i(\sigma_t)$, $i=1, 2, \cdots, n$

ii) $C_i(\sigma_{t+1})=C_i(\sigma_t)$, $i=1, 2, \cdots, m-1$과 $i=s, s+1, \cdots, n$

iii) $C_i(\sigma_{t+1})<C_i(\sigma_t)$, $i=m, m+1, \cdots, s-1$

(c) i) $P_m(\sigma_{t+1})=P_m(\sigma_t)+\Delta P_{ms}(\sigma_t)$

ii) $P_s(\sigma_{t+1})=P_s(\sigma_t)+\Delta P_{sm}(\sigma_t)$

$\qquad\qquad=P_s(\sigma_t)-\Delta P_{ms}(\sigma_t)$

iii) $P_i(\sigma_{t+1})=P_i(\sigma_t)$, $i=1, 2, \cdots, n$과 $i\neq m, s$

〈이론 3〉

LGP 문제의 최적해에서 $f^*(\sigma)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\delta f^*(\sigma)}{\delta C_i}=\begin{cases} -1 & i=1, 2, \cdots, r-1 \quad (13)\\ -(n+1-2r) & i=r \quad (14)\\ 1 & i=r+1, \cdots, n \quad (15)\end{cases}$$

〈증명〉

LGP 문제에서 최적해를 k^*, d^*_{i1}, d^*_{i2}이라고 하자.

〈이론 1〉에 의하여 LGP 문제의 최적해는 다음과 같다.

$$\begin{array}{lll} \text{LGP minmize } f^*(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}(d^*_{i1}+d^*_{i2}) & & \\ \quad\text{subject to } K^*-d^*_{i2}=C_i & i=1, 2, \cdots, r-1 \\ \quad k^*=C_r & i=r \\ \quad k^*+d^*_{i1}=C_i & i=r+1, \cdots, n \\ \quad k^*\geq 0,\ d^*_{i1}\geq 0 & i=1, 2, \cdots, n;\ j=1, 2 \end{array}$$

위에서 최적의 LGP로 부터 다음의 $f^*(\sigma)$를 구할 수 있다.

$$f^*(\sigma)=\sum_{i=1}^{r-1}(k^*-C_i)+\sum_{i=r+1}^{n}(C_i-k^*)$$

$$=(-1)\sum_{i=1}^{r-1}C_i-(n+1-2r)+\sum_{i=r+1}^{n}C_i \quad (16)$$

식 (16)으로 부터 식 (13), (14), (15)가 됨을 알 수 있다. 〈증명끝〉

3.2 최적일정계획의 V자형 성질

LGP 문제의 목적식 $f(\sigma)$와 MAD 문제의 목적식 $Z(\sigma)$를 최소화하는 최적 작업순서는 V자형 작업순서를 갖는다. 초기의 V자형 가능작업순서(feasible sequence)는 임의의 작업순서 $\sigma(\in\pi)$에 대하여, n개의 작업을 LPT(Largest Processing Time) 형태의 $E(\sigma)$와 SPT(Shortest Processing Time) 형태의 $T(\sigma)$로 재분류하면, 이 작업순서 σ_0는 초기의 V자형 가능작업순서가 된다[5, 6, 14, 15].

〈이론 4〉

LGP 문제에서 목적식 $f(\sigma)$를 최소화하는 작업순서는 V자형을 한다.

〈증명〉

이 이론에 대한 증명은 논문[5, 6, 7] 등에서 다양하게 증명되었다. 〈증명끝〉

〈이론 5〉

$\sigma_t(\in\pi)$를 V자형 가능작업순서라 하면, 자업 $J_m(\sigma_t)$와 $J_s(\sigma_t)$의 모든 보완쌍에 대하여 다음과 같은 결론을 유도할 수 있다.

$$\Delta_{ms}(\sigma_t)=m+s-n-2 \quad \text{단, } 1\le m<s\le n \qquad (17)$$

(a) 보완쌍

보완쌍 $J_m(\sigma_t)$와 $J_s(\sigma_t)$의 가공시간을 서로 교환하면 σ_t로 부터 V자형 가능작업순서 $\sigma_{t+1}(\in\pi)$을 얻을 수 있다.

$$f(\sigma_{t+1})=f(\sigma_t)+\Delta P_{ms}(\sigma_t)\Delta_{ms}(\sigma_t) \qquad (18)$$

(b) 교환 법칙

σ_t에서 적어도 하나의 보완쌍 $J_m(\sigma_t)$와 $J_s(\sigma_t)$에 대하여, $\Delta_{ms}(\sigma_t)<0$이면, 작업 $J_m(\sigma_t)$와 $J_s(\sigma_t)$의 가공시간을 서로 교환하여 $f(\sigma_{t+1})<f(\sigma_t)$와 $f(\sigma_t)$에서의 변화량이 $\Delta P_{ms}(\sigma_t)\Delta_{ms}(\sigma_t)$인 작업순서 σ_{t+1}를 얻을 수 있다. 만약 2개 이상의 보완쌍이 존재하면 $f(\sigma_t)$의 총 변화량은 $\sum_{m,s}P\Delta_{ms}(\sigma_t)\Delta_{ms}(\sigma_t)$이며 $f(\sigma_{t+1})$은 다음 식과 같다.

$$f(\sigma_{t+1})=f(\sigma_t)+\sum_{m,s}{}' \Delta P_{ms}(\sigma_t)\cdot\Delta_{ms}(\sigma_t) \qquad (19)$$

(c) 최적 조건

σ_t에서 모든 보완쌍 $J_m(\sigma_t)$와 $J_s(\sigma_t)$에 대하여 $\Delta_{ms}(\sigma_t)>0$이면 σ_t는 벌과금함수 $f(\sigma)$를 최소로하는 V자형 최적 작업순서이다.

(d) 대체의 최적해

σ_t를 최적 작업순서라 하고, 보완쌍 $J_m(\sigma_t)$와 $J_s(\sigma_t)$에 대하여 $\Delta_{ms}(\sigma_t)=0$이면, 작업 $J_m(\sigma_t)$와 $J_s(\sigma_t)$의 가공시간을 서로 교환하여 $f(\sigma_{t+1})(=f(\sigma_t))$인 대체의 최적 작업순서 σ_{t+1}를 얻을 수 있다.

(e) 최적해의 갯수

최적 작업순서 σ^*에 있어서 $\Delta_{ms}(\sigma^*)=0$에 대한 $J_m(\sigma^*)$와 $J_s(\sigma^*)$의 보완쌍의 수를 $\alpha(1\le\alpha<(n/2)+1)$라고 하자. MAD 문제의 최적 대체작업순서의 수는 2^{α}이다.

〈증명〉

$1\le m<s\le n$에 대하여, 작업 $J_m(\sigma_t)$와 $J_s(\sigma_t)$는 기저가능작업순서에서 보완쌍이므로 $P_m(\sigma_t)<P_s(\sigma_t)$이다. σ_t에서 $P_m(\sigma_t)$와 $P_s(\sigma_t)$를 서로 교환하여 V자형의 작업순서 σ_{t+1}를 얻을 수 있다.

(a)만을 증명하면 (b), (c), (d), (e)는 쉽게 증명될 수 있다.

앞의 〈정리 1〉, 〈정리 2〉, 〈이론 3〉에서 부터, $f(\sigma_t)$에서의 총 변화량은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(\sigma_t)\text{의 총 변화량} &= \Delta P_{ms}(\sigma_t)[(s-1-r)-\{(r-1)-(m-1)+(n+1-2r)\}] \\ &= \Delta P_{ms}(\sigma_t)[m+s-n-2] \\ &= \Delta P_{ms}(\sigma_t)\Delta_{ms}(\sigma_t) \end{aligned}$$

따라서 $f(\sigma_{t+1})=f(\sigma_t)+\Delta P_{ms}(\sigma_t)\cdot\Delta_{ms}(\sigma_t)$이다. 〈증명끝〉

3.3 알고리즘

단일 기계의 주문생산형 일정계획 문제에 있어서 최적 공통납기와 작업순서를 구하는 알고리즘은 다음과 같다.

단계 1 : 작업순서 σ로 부터 V자형 가능작업순서 σ_0와 $k^*(\sigma_0)$, $C_i(\sigma_0)$, $d_{ij}(\sigma_0)$, $f(\sigma_0)$를 구한다. (단, $i=1, 2, \cdots, n$, $j=1, 2$)

단계 2 : 작업순서 σ_0에서 $1 \le m < s \le n$에 대하여 작업 $J_m(\sigma_0)$와 $J_s(\sigma)$의 모든 보완쌍을 규정한 다음, 그것들에 대한 $\Delta_{ms}(\sigma_0)$을 식 (17)로 부터 계산한다.

단계 2.1 : $1 \le m < s \le n$에 대하여 모두 $\Delta_{ms}(\sigma_0) \ge 0$이면 σ_0는 V자형 최적작업순서다. 그렇지 않으면 단계 2.2로 간다.

단계 2.2 : σ_0에 있어서 만약 적어도 하나의 보완쌍이 $\Delta_{ij}(\sigma_0) < 0$이면, 이들에 대하여 모든 보완작업 $J_j(\sigma_0)$를 규정하고 다음을 계산한다. (단, $1 \le i < j \le n$)

i) $\Delta P_{ms}(\sigma_0) \cdot \Delta_{ms}(\sigma_0) = \underset{1 \le i < j \le n}{\text{minimum}} \{\Delta P_{ij}(\sigma_0) \cdot \Delta_{ij}(\sigma_0) \mid \Delta_{ij}(\sigma_0) < 0\}$

σ_0에서 작업의 가공시간을 교환함으로써 또 다른 V자형 가능작업순서 σ_1를 구하여서, 이에 대하여 $k^*(\sigma_1)$, $C_i(\sigma_1)$, $d_{ij}(\sigma_1)$, $f(\sigma_1)$를 구한다.

ii) 아니면 σ_0에서 식 (19)를 이용한 확장된 교환법칙을 적용하여서 σ_1을 구한다. 그리고 $k^*(\sigma_1)$, $C_i(\sigma_1)$, $d_{ij}(\sigma_1)$, $f(\sigma_1)$를 구한다.

단계 3 : 단계 2에서 구한 σ_1에 대하여, 만약 σ_1이 최적이면 모든 과정을 끝낸다. 아니면 σ_1에 대하여 단계 2.2를 반복하면서 최적조건 $\Delta_{ij}(\sigma_t) \ge 0$인 V자형 가능 작업순서 σ_2, σ_3, $\cdots$, σ_t를 구한다. 그러면 σ_t는 V자형 최적 작업순서이며, $f(\sigma)$의 최소값 $f(\sigma^*)$는 $f(\sigma_t)$가 될 것이다. $k^*(\sigma^*)$는 최적 공통납기이며 r^*는 최적 공통납기의 위치이다.

3.4 수치예

알고리즘을 적용하기 위한 수치 예는 Kanet[15]에 있는 예제를 그대로 채택하였다.

n	1	2	3	4	5
$P_i(\sigma)$	7	12	5	4	10

이 문제에서 작업순서 σ_{spt}를 구하고 식 (8), (9)에 의거한 최적 공통납기의 위치 $r=r(\sigma_{spt})$를 구하면 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5
σ_{spt}	4	5	7	10	12
$C_i(\sigma_{spt})$	4	9	16	26	38
$d_{ij}(\sigma_{spt})$	12	7	0	10	22

$r=3$ $k^*(\sigma_{spt})=16$ $f^*(\sigma_{spt})=51$

단계 1 : σ_{spt}로 부터 초기의 V자형 작업순서 σ_0은 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5
σ_0	7	5	4	10	12
$C_i(\sigma_0)$	7	12	16	26	38
$d_{ij}(\sigma_0)$	9	4	0	10	22

$r=3$ $k^*(\sigma_0)=16$ $f^*(\sigma_0)=45$

단계 2 : σ_0의 보완쌍은 $J_1(\sigma_0)$와 $J_4(\sigma_0)$이므로 $m=1$, $s=4$이다.

$\Delta_{ms}(\sigma_0)=m+s-n-2=1+4-5-2=-2$, $\Delta P_{ms}(\sigma_0)=10-7=3$

$\Delta_{ms}(\sigma_0)<0$이므로 $J_1(\sigma_0)$와 $J_4(\sigma_0)$를 서로 교환하여 V자형 작업순서 σ_1를 얻는다.

$f(\sigma_1)=f(\sigma_0)+\Delta P_{ms}(\sigma_0) \cdot \Delta_{ms}(\sigma_0)=45-6=39$

n	1	2	3	4	5
σ_1	10	5	4	7	12
$C_i(\sigma_1)$	10	15	19	26	38
$d_{ij}(\sigma_0)$	9	4	0	7	19

$r=3$ $k^*(\sigma_1)=19$ $f^*(\sigma_1)=39$

단계 3 : 〈반복 1〉

σ_1의 보완쌍은 $J_1(\sigma_1)$과 $J_5(\sigma_1)$, $J_2(\sigma_1)$, $J_4(\sigma_1)$이므로 $m_1=1$, $s_1=5$, $m_2=2$, $s_2=4$이다.

$$\Delta_{m_1 s_1}(\sigma_1) = -1 \qquad \Delta_{m_2 s_2}(\sigma_1) = -1$$

$$\Delta P_{m_1 s_1}(\sigma_1) = -1 \qquad \Delta P_{m_2 s_2}(\sigma_1) = -1$$

모든 $\Delta_{m_i s_i}(\sigma_1)$ 이 음수이므로 $J_1(\sigma_1)$과 $J_5(\sigma_1)$, $J_2(\sigma_1)$과 $J_4(\sigma_1)$을 서로 교환하여 V자형 작업순서 σ_2를 얻는다.

n	1	2	3	4	5
σ_2	12	7	4	5	10
$C_i(\sigma_2)$	12	19	23	28	38
$d_{ij}(\sigma_2)$	11	4	0	5	15

$r=3$ $k^*(\sigma_2)=23$ $f^*(\sigma_2)=35$

단계 3 : 〈반복 2〉

σ_2의 보완쌍은 $J_2(\sigma_2)$와 $J_5(\sigma_2)$이므로 $m=2$, $s=5$이다.

$\Delta_{ms}(\sigma_2)=0$ $\Delta P_{ms}(\sigma_2)=3$

$\Delta_{ms}(\sigma_2)=0$이므로 σ_2는 V자형 최적 작업순서이다.

$\sigma_2=\{12,\ 7,\ 4,\ 5,\ 10\}$

$=\{J_2(\sigma),\ J_1(\sigma),\ J_4(\sigma),\ J_3(\sigma),\ J_5(\sigma)\}$

$\sigma^*=\sigma_2$, $r^*=3$, $k^*(\sigma^*)=23$, $f^*(\sigma^*)=35$

이 결과는 Kanet[15]의 결과와 일치함을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구는 n개의 작업이 납기 전후에 완료될 때 발생하는 벌과금을 최소로하는 단일 기계에서의 최적 공통납기와 이에 대응하는 주문생산형 일정계획을 구하는 것이다. 이는 JIT 생산체제하에서의 최적 일정계획이 될 수 있도록하는 것으로서, 작업완료시간의 절대평균편차를 최소로 한다.

본 연구에서 개발한 알고리즘은 선형방정식과 선형목표계획법 개념의 민감도 분석에 기초한 효율적인 알고리즘으로서 다른 방법들에 비해서 계산량도 훨씬 줄일 수가 있다. 또한, 평균절대편차 문제와 선형목표계획법 문제가 동일하다는 것을 입증하였다. 따라서 원 문제인 평균절대편차 문제 대신에 선형목표계획법을 대상으로한 알고리즘을 개발하여서 목적식을 최소로하는 최적 공통납기와 이에 대응된 최적 작업일정계획을 구하였다.

참고문헌

1. 이상문과 이병찬, 다목표의사결정론, 서울 : 법문사, 1986.
2. Bagchi, U., R. S. Sullivan, and Y. L. Chang, "Minimizing Mean Absolute Deviation of Completion Times about a common Due Date," *Naval Research Logistics Quarterly, 33,* 227-240, 1986.
3. Bagchi, U., Y. L. Chang, and R. S. Sullivan, "Minimizing Absolute and Squared Deviation of Completion Times with Difference Earliness and Tardiness Penalties and a Common Due Date," *Naval Research Logistics Quarterly, 34,* 739-751, 1987.
4. Baker, K. R., *Introduction to Sequencing and Scheduling,* New York : John Wiley & Sons, 1974.

5. Bector, C. R., Y. P. Gupta, and M. C. Gupta, "Determination of an Optimal Common Due-Date and Optimal Sequence in a Single Machine Job Shop," *Int. J. Prod. Res., 26(4),* 613-628, 1988.
6. Bector, C. R., Y. P. Gupta, and M. C. Gupta, "V-Shape Property of Optimal Sequence of Jobs about a Common Due-Date on a Single Machine," *Computers Opns Res. 16(6),* 583-588, 1989.
7. Cheng, T. C. E., "An Algorithm for the Con Due-Date Determination and Sequence Problem," *Computers Opns Res. 14(6),* 537-542, 1987.
8. Cheng, T. C. E., "A Note on a Partial Search Algorithm for the Single-Machine Optimal Common Due-Date Assignment and Sequenceing Problem," *Computers Opns Res., 17(3),* 321-324, 1990.
9. Eilon, S. and I. G. Chowdhary, "Due-Date in Job Shop Scheduling," *Int. J. Prod. Res., 14,* 223-237, 1976.
10. Francis, R. L. and J. A. White, *Facility Layout and Location,* Englewood Cliffs, Prentice-Hall, Inc., 1974.
11. French, S., *Sequencing and Scheduling,* New York : John Wiley & Sons, 1982.
12. Graves, S. C., "A Review of Production Scheduling," *Operatins Research, 29(4),* 646-675, 1981.
13. Hall, N. G., "Single-and Multiple-Processor Models for Minimizing Completion Time Variance," *Naval Research Logistics Quarterly, 33,* 49-54, 1986.
14. Kanet, J. J., "Minimizing Variation of Flow Times in Single Machine Systems," *Management Science, 27(12),* 1453-1459, 1981.
15. Kanet, J. J., "Minimizing the Average Deviation of Job Completion Times about Common Due-Date," *Naval Research Logistics Quarterly, 28(4),* 643-651, 1981.
16. Panwakar, S. S., M. L. Smith, and A. Seidmann, "Common Due-Date Assignment to Minimizing Total Penality for the One Machine Scheduling Problem," *Operations Research, 30(2),* 391-399, 1982.