중복설계 최적화문제의 새로운 초기값 설정에 관한 연구
—A New Initial Value for Solving Redundancy Optimization Problems—

이 도 경*
이 근 희**

Abstract

This paper presents a method for establishing an initial value of redundancy optimization problem to maximize system reliability of multiconstraint mixed parallel-series system. The constraints not be linear. This paper proposes a new initial value which is near to optimal solution by considering the relative median rate of the unreliability and amount of consumed resources for each subsystem. To show the efficiency of this model, numerical example and comparison with Narasimhalu is illustrated in chapter 4.

1. 서 론

중복설계 최적화문제는 비용 및 무게, 공간 등의 여러 제약하에서 시스템 신뢰도를 최대화하기 위하여 시스템을 구성하는 서로 다른 형태의 부품 혹은 하부시스템을 효율적으로 배치하는 것이다. 따라서 중복설계 최적화문제는 다제약하에서의 시스템 신뢰도 최대화 문제로 수식화되며, 이 때의 제약식은 그 형태가 선형 및 비선형으로 분류되어 해당 제약식의 형태에 따라 접근방법에는 다소의 차이가 있을 수 있다.

중복설계 최적화문제에 있어서 시스템을 구성하는 부품 종류와 제약식의 수가 많은 대규모 문제의 경우 마지막 해를 얻기 위해 요구되는 계산시간의 증가가 문제시되며, 제약식에서의 사용 가능 자원의 여유분에 의하여 다수의 리던던시가 허용되는 경우 그 정도는 더욱 심화된다. 이에 비해 최적해에 대한 보장은 없으나 보다 적은 계산에 의해 빠른 시간내에 해를 얻기 위한 발견적 기법을 고려할 수 있다. 이러한 발견적 기법에 있어서 역시 대규모문제의 경우 반복적인 중간계산과정의 단축을 위한 최적해에 근사한 초기해 설정문제를 고려해 볼 수 있다.

본 연구에서는, 각 하부시스템에서의 리던던시 배치로 인하여 소모되는 자원의 양과 상대적 비신뢰도 감소분과의 메디안 비율을 고려함으로써 초기해 설정문제에 대하여 기존의 전체 신뢰도 추정에 의한 방법이나 평균 부품비율 배치방법보다 적은 계산절차로써 최적해에 보다 가까운 초기해를 산정하는 방법을 제시한다.

2. 기존문헌연구

중복설계 최적화문제를 처음 수학적으로 모형화한 사람은 Moskowitz와 McLean[1]이었다. 이 모델은 단일 제약식인 시스템 비용에 대해 시스템 신뢰도의 최적화를 다루었다. 그 뒤 Proschan과 Bray[2], Sharama와 Venkateswaran[3] 등으로 전개되었으며, Misra[4]에 의하여 중복설계 최적화문제에 있어서 초기해 설정이 소개되었다. [4]는 시스템의 구조가 parallel-series일 경우의 특성을 이용하여 전체 신뢰도의 최소추정치 $\hat{R}_s$를 구함으로써 초기해를 산정하였으나, 이 방법은 그 계산량이 제약식 수에 정비례하므로 제약식 수가 많은 경우에는 효율적이지 못하게 된다.

Narasimhalu와 Sivaramakrishnan[5]는 하부시스템간의 상대적 부품신뢰도를 기준으로 사용 가능한 자원량에 대한 각 하부시스템의 비례적 초기해를 설정하였다. [5]의 초기해는 각 하부시스템의 부품들이 엇비슷한 자원 사용량을 취하는 경우 최적해에 근사한 초기해를 취하게 된다. 그러나 자원 사용량이 하부시스템 간에 차이가 벌어질수록 [5]의 방법은 그 효율성이 떨어지게 된다.

본 연구에서는 [5]의 이와 같은 단점에 대하여 하부시스템 간의 자원 사용량이 비슷한 특수한 경우를 포함하여 그 차이에 관계없이 일반적인 경우에도 항상 최적해에 근접한 초기해 산정방법을 제시한다.

*금오공대 산업공학과 조교수
**한양대 산업공학과 교수

접수 : 92. 3. 30.
확정 : 92. 4. 10.

3. 수리적 전개 및 해법절차

본 연구에서의 대상구조는 mixed parallel-series 시스템이며 해당시스템에서의 리던던시 배치로 인한 시스템 비신뢰도 최소화문제, 즉 시스템 신뢰도 최대화문제를 다룬다. 해당 최적화문제에 대한 제약식의 수는 제한이 없으며 제약식의 형태 역시 선형 및 비선형 모두를 취할 수 있다. 해의 산정은 초기해 설정절차와 최적 근사해 산정절차의 두 단계로 구성된다.

[가 정]

(1) 시스템은 N개 하부시스템의 직렬형태로 구성된다.
(2) 각 하부시스템의 부품은 병렬로 구성되며 단위부품의 가동은 서로 독립적이다.
(3) 리던던시의 배치로 인한 제약식에서의 자원소모계수는 양의 값을 취한다.

[기호설명]

N	하부시스템의 수
q_i	하부시스템-i의 부품 비신뢰도
n_i	하부시스템-i의 부품수(연속형 변수처리)
$Q_i(n_i)$	하부시스템-i의 비신뢰도
$\mathbf{n}$	$(n_1, n_2, \cdots\cdots n_N)$
$Q_s(\mathbf{n})$	전체시스템 비신뢰도
m	제약식 수
$g_{ij}(n_i)$	하부시스템-i에서 n_i의 배치로 인한 자원 j의 소모량
B_j	자원 j의 사용가능량
D_j	자원 j의 공급가능한 평균 부품수
$E(n_i)$	소모 자원량과 비신뢰도를 상대적으로 고려한 하부시스템 i의 메디안 배치 비율

중복설계 최적화에 있어서 전체 시스템 신뢰도 R_s는 각 하부시스템들의 곱의 형태로 수식화되며 체계 비신뢰도는 근사적으로 (1)식과 같이 된다.

$$R_S=\prod_{i=1}^{N} R_i$$
$$R_i=1-q_i^{n_i}$$
$$Q_s(\mathbf{n})=1-\prod_{i=1}^{N}(1-q_i^{n_i})$$
$$\simeq\sum_{i=1}^{N} q_i^{n_i} \tag{1}$$

중복설계 최적화문제는 (2)와 같은 제약조건하에서 목적식 (1)을 최소화하는 수리모형이 된다. (2)의 제약식 형태는 부품의 중복배치에 따라 그 값이 단조증가하며 비선형 형태도 가능하다.

$$\sum_{i}^{N} g_{ij}(n_i)\le B_j \tag{2}$$

단, $j=1, 2, \cdots\cdots, m$

초기해의 최적해에 대한 접근정도는 각 하부시스템의 단위부품 증가에 따른 해당 하부시스템의 비신뢰도 감소정도와 자원들의 소모량에 대해 이를 상대적으로 고려함으로써 결정된다. 먼저 각 하부시스템 간의 비신뢰도에 의한 상대적 배치비율은 해당 비신뢰도 중에서 메디안에 대한 값을 설정하여 그 비를 계산한다. 다음으로 각 하부시스템의 자원 소모비율에 대해서도 동일개념에 의하여 각 하부시스템의 구성부품을 단위 증가시킬 때 요구되는 자원소모량의 합계 중에서 메디안에 해당되는 기준값 G_m에 대한 해당 하부시스템의 배치비율을 산정한다. 이상의 비신뢰도 및 자원소모량의 기준으로부터 해당 하부시스템의 각 하부시스템의 메디안 배치비율 $E(n_i)$를 산정할 수 있으며 그 형태는 식 (3)과 같다.

$$E(n_i)=\left(\frac{q_i}{Q_m}\right)G_m\Big/\sum_{j=1}^{m} g_{ij}(1),\ i=1, 2, \cdots\cdots, N \tag{3}$$

단, $Q_m=\text{median of }\{q_i\},\ i=1, 2, \cdots\cdots, N$

$$G_m = \text{median of } \left\{ \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(1) \right\}$$

단일 자원 B_j에 대하여 메디안 배치비율 $E(n_i)$들의 합으로 나눔으로써 해당 자원이 제공할 수 있는 부품수 D_j를 계산할 수 있으며, 배치가능한 부품수의 최대값은 최소자원에 의해 결정되므로 m개의 D_j 중에서 최소값을 D라 할 때 D와 $E(n_i)$의 곱이 해당 하부시스템의 초기부품수이다.

이들 부품수는 정수라는 조건에 의해 최종적으로 결정되는 초기값은 식 (5)의 형태를 취한다.

$$D_j = B_j \Big/ \sum_{i=1}^{N} E(n_i) g_{ij}, \quad j=1, 2, \cdots\cdots, m \tag{4}$$

$$n_i = E(n_i) D$$

단, $D = \min\{D_1, D_2, \cdots\cdots, D_m\}$

$$n_i^I = [E(n_i)D]+ \tag{5}$$

단, $[x]+$는 x값보다 작지 않은 최소의 정수

위의 절차에 의한 초기해 n^I는 실행가능영역에 존재한다는 보장은 없기 때문에 제약조건을 만족시키는 범위내에서의 최적 근사해를 산정하는 절차는 최적 근사해에 대하여 전진적 방법과 후진적 방법이 동시에 고려되어야 한다. 초기해로부터 최적 근사해의 산정은 하부시스템에 대한 선택계수 설정방법에 따라 Nakagawa[6]를 비롯한 여러 연구가 있으나 본 논문에서 제시된 초기해의 효율성 비교를 위해 일반적으로 사용되는 기본적 해법절차를 사용한다(최적 근사해 산정절차는 [5]~[6] 참조).

4. 수치예제 및 결론

본 연구에서 제시한 방법의 효율성을 보이기 위하여 [5], [6]에서 사용된 문제를 예제로 선택한다.

[문 제]

두 개의 선형제약조건하에서 시스템 비신뢰도를 최소화하는 중복설계 최적화문제의 리던던시 배치를 결정하라. 해당 시스템의 수치 및 조건은 다음의 표-1과 같다.

표-1.

Subsystem	1	2	3	4	5
Element Rel.	0.9	0.75	0.65	0.8	0.85
Cost	5	4	9	7	7
Weight	8	9	6	7	8

Constranints : Cost ≤132, Weight≤142

[풀 이]

$q_1=0.1,\ q_2=0.25,\ q_3=0.35,\ q_4=0.2,\ q_5=0.15$

$Q_m = \text{median}\{0.1,\ 0.25,\ 0.35,\ 0.2,\ 0.15\} = 0.2$

$G_m = \text{median}\{13,\ 13,\ 15,\ 14,\ 15\} = 14$

식 (3)에 의하여 $E(n_1)=0.35845,\ E(n_2)=1.34615,\ E(n_3)=1.63333,\ E(n_4)=1.00,\ E(n_5)=0.7$

제약식 조건은

$5n_1+4n_2+9n_3+7n_4+7n_5 \leq 132$

$8n_1+9n_2+6n_3+7n_4+8n_5 \leq 142$

$E(n_i)$를 해당 n_i에 대입하면

$$D_1 = B_1 \Big/ \sum_{i=1}^{5} E(n_i) g_{i1} = 132/34.677 = 3.8066$$

$$D_2 = B_2 \Big/ \sum_{i=1}^{5} E(n_i) g_{i2} = 142/38.823 = 3.6576$$

그러므로 $D=\min\{D_1, D_2\}=3.6576$, $n_i=3.6576\ E(n_i)$에서 $N_1^I=[1.969482]+$, $n_2^I=[4.923721]+$,

$n_3^1=[5.974115]+$, $n_4^1=[3.657621]+$, $n_5^1=[2.560335]+$. 따라서 초기해는 $n^1=(2, 5, 6, 4, 3)$이 된다.
[ ]에 의한 방법에서의 최적 근사해까지의 과정은 표-2와 같다.

표-2. Futher computation with initial solution by Narasimhalu

Number of units	Unreliability of subsystem(10^{-3})					Total	Total
n	1	2	3	4	5	cost	weight
(2 5 7 4 3)	10.0	0.9766	0.6434	1.6	3.375	142	155
(2 5 6 4 3)	10.0	0.9766	1.8380	1.6	3.375	133	149
(2 5 5 4 3)	10.0	0.9766	5.2520	1.6	3.375	124	143
(2 4 5 4 3)	10.0	3.9060	5.2520	1.6	3.375	120	134
(3 4 5 4 3)	1.0	3.9060	5.2520	1.6	3.375	125	142

위의 결과에서와 같이 본 연구에서의 하부시스템 간의 비신뢰도 및 비용증분을 고려한 메디안 비율 개념의 도입은 기존의 전체 신뢰도 추정에 의한 방법에 대해서는 물론이고 평균 부품배치 방법보다 최적해에 근접한 초기해를 설정할 수 있다. 위의 예제에서는 본 연구의 방법이 [5]에 비해 한 단계만의 계산절차를 단축시켰으나, 위의 예제와 같이 매우 간략한 형태가 아닌 대규모문제에 대해서는 본 방법의 적용은 많은 계산절차를 단축시킬 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

[1] F. Moskowitz, J. B. McLean, "Some Reliability Aspects of Systems Design," *IRE Trans. Rel. Qual. Contr. RQC-8*, 1956, Sep, 7-35.

[2] F. Proschan, T. H. Bray, "Optimum Redundancy under Multiple Constraints," *Oper. Res. 13*, 1965, Sep-Oct, 800-814.

[3] K. B. Misra, "A Method of Sloving Redundancy Optimization Problems," *IEEE Trans. Reliability, R-20*, 1971, Nov, 256-259.

[4] J. Sharama, K. V. Venkateswaran, "A Direct Method for Maximizing System Reliability," *IEEE Trans. Reliability, R-20*, 1971, Nov, 256-259.

[5] A. D. Narasimhalu, H. Sivaramakrishnan, "A Rapid Algorithm for Reliability Optimization of Parallel Reduncant Systems," *IEEE Trans. Reliability*, 1978, Oct, 261-263.

[6] Y. Nakagawa, K. Nakashima, "A Heuristic Method for Determining Optimum Reliability Allocation," *IEEE Trans. Reliability, R-26*, 1977, Aug, 156-161.