

---

 論 文
 

---

大韓造船學會論文集  
 第 29 卷 第 4 號 1992 年 11 月  
 Transactions of the Society of  
 Naval Architects of Korea  
 Vol. 29, No.4, November 1992

## 대변위 및 대회전을 고려한 편심된 격하 보요소의 기하학적 비선형해석

이재욱\*, 양영태\*\*

### A Geometrically Nonlinear Analysis for the Eccentric Degenerated Beam Element Considering Large Displacements and Large Rotations

by

Lee Jae Wook\* and Yang Young Tae\*\*

#### 요 약

3차원 편심 보요소의 기하학적 비선형 해석에서 증분 평형식을 유도하는 일반적인 방법의 대부분은 비선형을 고려한 가상일의 평형방정식을 선형화하는 방법으로, 회전증분이 미소하다는 가정에 의해서 선형화된 증분 평형식을 유도하고, 구조물의 변형이 일어나는 동안에 발생하는 유한회전의 영향은 반복계산의 과정에서 고려하는 방법이다.

그리고 유한회전을 고려하는 개선된 방법으로 Surana와 Onate 등에 의해서 개발되었는데, Surana는 비선형 절점함수를 가정하였고, Onate는 회전행렬의 관계식을 이차항까지 고려하여 비선형 증분 평형식을 유도하였다.

본 논문에서는 비선형 해석의 증분이론(incremental theory)을 도입,  $t+dt$  변위증분을 Taylor 급수로 2차항까지 전개하므로써 1차 선형항( $U_L$ )과 2차 유한회전항( $U_R$ )으로 표시하여 연속체운동의 비선형 증분평형식에서 유한회전의 영향을 고려하는 방법을 사용하였다.

이상의 해석방법에 따른 수치해석 결과는 Surana와 Onate등에 의하여 다루어진 예제와 비교하였다.

#### Abstract

To study the large displacement and large rotation problems, geometrically nonlinear formulation of eccentric degenerated beam element has been developed, where the restrictions of infinitesimal rotation increments are removed and the incremental equations are derived using the Taylor series expansion of the displacement function at time  $t+dt$ .

The geometrically nonlinear analyses are carried out for the cases of cantilever, square frame, shallow arch and 45-degree bend beam and all of them are compared with each of

---

발 표: 1992년도 대한조선학회 춘계연구발표회('92. 4. 18.)

접수일자: 1992년 4월 2일, 재접수일자: 1992년 8월 24일

\* 정회원, 인하대학교 선박해양공학과

\*\* 정회원, 현대중공업(주) 해양구조설계부

the other results published.

The element developed in the present research can be efficiently utilized for analysis of the nonlinear behaviours of structures when displacements and rotations are large.

Nomenclature	
${}^m C_{ijrs}$	: Component of tangent constitutive tensor at time $t$ referred to the configuration at time $m$
$h^k(r)$	: Finite element interpolation function associated with nodal point $k$
$t+dt R$	: External virtual work expression corresponding to the configuration at time $t+dt$
$r, s, t$	: Natural element coordinates
${}^t S_{ij}, {}^{t+dt} S_{ij}$	: Component of 2nd Piola-Kirchhoff stress components in the configuration at time $t, t+dt$ referred to the configuration of time $m$
$t, t+dt$	: time $t$ and $t+dt$ , before and after time increment $dt$
${}^t U_i, {}^{t+dt} U_i$	: Component of displacement vector from the initial configuration at time $0$ to the configuration at time $t, t+dt$
$U_i$	: Increment in displacement component
${}^t U_i^k$	: Displacement component of nodal point $k$ in the configuration at time $t$
$U_i^k$	: Increment in displacement component of nodal point $k$ in the configuration at time $t$
${}^t_m U_{i,j}, {}^{t+dt}_m U_{i,j}$	: Derivative of displacement component to the configuration at time $t, t+dt$ with respect to coordinate ${}_m X_j$
${}^0 V, {}^t V, {}^{t+dt} V$	: Volume of body in the configuration at time $0, t, t+dt$
${}^t V_{si}^k$	: Components of unit vector ${}^t V_s^k$ in direction $s$ at node point $k$
${}^t V_{ti}^k$	: Components of unit vector ${}^t V_t^k$ in direction $t$ at node point $k$
${}^0 X_i, {}^t X_i, {}^{t+dt} X_i$	: Cartesian coordinate in the configuration at time $0, t, t+dt$
$\alpha^k, \beta^k, \gamma^k$	: Finite rotational increments at node point $k$
$\delta$	: Denoting "variation in"
$\epsilon_{ij}$	: Component of Green-Lagrange strain tensor in the configuration at time $t, t+dt$ referred to the configuration at time $m$
${}^m \epsilon_{ij}$	: Component of strain increment tensor referred to the configuration at time $m$
${}^t e_{ij}, {}^{t+dt} e_{ij}$	: Component of total infinitesimal strain tensor at time $t+dt$
$e_{ij}$	: Increment in ${}^t e_{ij}$
${}^m e_{ij}$	: Linear part of strain increment ${}^m \epsilon_{ij}$
${}^m \eta_{ij}$	: Nonlinear part of strain increment ${}^m \epsilon_{ij}$
$\xi, \eta, \zeta$	: Local coordinates system
${}^t \phi, {}^t \psi, {}^t \chi$	: Rotational angles at time $t$

### 1. 서 론

3차원 편심 보요소의 기하학적 비선형해석에서 증분 평형식을 유도하는 일반적인 방법의 대부분은 비선형을 고려한 가상일의 평형방정식을 선형화하는 방법으로 회전증분이 미소하다는 가정에 의해서 선형화된 증분 평형식을 유도하고 구조물의 변형이 일어나는 동안에 발생하는 유한회전의 영향은 반복 계산의 과정에서 고려한다[1, 2]. 그리고 유한회전을 고려하는 개선된 방법은 Surana와 Onate 등에 의해서 개발되었는데, Surana는 비선형 절점함수를 가정하였고, Onate는 회전행렬의 관계식을 이차항까지 고려하여 비선형 증분 평형식을 유도하였다[3, 4].

본 논문의 비선형 해석에서는 증분이론(incremental theory)을 도입하여 연속체의 운동을 시간  $0$ , 시간  $t$ , 시간  $t+dt$ 의 평형상태로 구분하고 시간에 따라 변하는 연속체 내의 임의의 절점  $P$ 의 기하학적 위치를 사용해서 Fig.1과 같이 연속체의 운동을 나타내었다. Fig. 1에서 시간  $0$ , 시간  $t$ , 시간  $t+dt$  상태

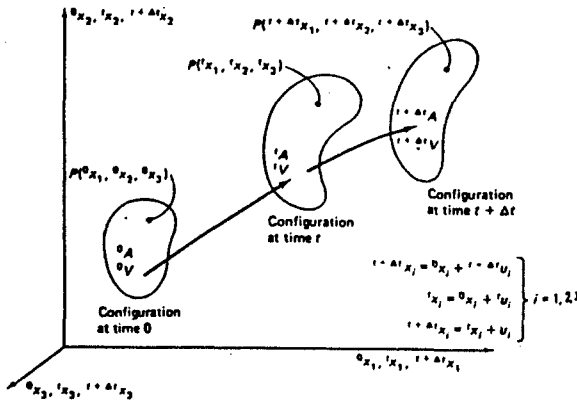


Fig.1 Motion of body in stationary cartesian coordinate system

의 절점의 변위  ${}^tU_i$ ,  ${}^{t+\Delta t}U_i$ 와 두 단계의 연속체 변위 증분  $U_i$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$${}^{t+\Delta t}X_i = {}^tX_i + U_i \tag{1}$$

$$= {}^0X_i + {}^tU_i + U_i$$

$$= {}^0X_i + {}^{t+\Delta t}U_i$$

$$U_i = {}^{t+\Delta t}U_i - {}^tU_i \tag{2}$$

비선형 해석의 증분이론에 의해서 표현된 식(2)의  ${}^{t+\Delta t}U_i$ 는 회전증분이 미소하다고 가정하면 식(3)에서 Taylor 급수를 1차항까지 전개한 것과 같다. 그러나 본 논문에서는 변위증분을 Taylor 급수로 2차항까지 전개하여 1차 선형항  $U_L$ 과 2차 유한회전항  $U_R$ 로 표시하여 유한회전의 영향을 고려하였다 [7].

$${}^{t+\Delta t}U = {}^tU + U \tag{3}$$

$$\approx {}^tU + \left[ \frac{\partial U}{\partial a} \right] a + \left[ \frac{\partial}{\partial a} \right] \left[ \frac{\partial U}{\partial a} \right] \frac{a^2}{2!}$$

$$U = \left[ \frac{\partial U}{\partial a} \right] a + \left[ \frac{\partial}{\partial a} \right] \left[ \frac{\partial U}{\partial a} \right] a_R \tag{4}$$

$$= U_L + U_R$$

식(4)에서와 같이 변위증분을 1차 선형항과 2차 비선형항으로 구분하여 시간  $t+dt$  상태에서 연속체 운동의 비선형 증분 평형식을 유도하면 참고문헌 [7]의 식(21)과 같이 표현된다.

$$\int_{m,v} [m C_{ijrs} m e_{rs}^L \delta_m e_{ij}^L + {}^t S_{ij} \delta_m e_{ij}^R + {}^t S_{ij} \delta_m \eta_{ij}]^m dV = \delta^{t+\Delta t} W_e - \int_{m,v} {}^t S_{ij} \delta_m e_{ij}^L m dV \tag{5}$$

식(5)에서 첫번째항은 선형강성을 나타내고 두번째항과 세번째항은 유한회전에 의한 회전강성과 기하학적 비선형강성을 나타낸다.

## 2. 편심 보 요소의 증분 비선형 평형식

시간에 따라 변하는 Timoshenko 보의 운동에서 시간  $t$  상태와  $t+dt$  상태 사이의 변위증분을 구하면 다음과 같다[6, 7].

$$U_{si} = \sum_{k=1}^N h^k(r) U_i^k + \sum_{k=1}^N h^k(r) (a^k/2 \cdot s + e_a^k) V_{si}^k + \sum_{k=1}^N h^k(r) (b^k/2 \cdot t + e_b^k) V_{ti}^k \tag{6}$$

$$V_{si}^k = {}^{t+dt}V_{si}^k - {}^tV_{si}^k$$

$$V_{ti}^k = {}^{t+dt}V_{ti}^k - {}^tV_{ti}^k \tag{7}$$

편심 보 요소의 기하학적 전체변위 식(6)을 나타내는데 사용되는  $s, t$  방향의 벡터증분은 Fig.2에서와 같이 시간  $t$ 에서  $t$  방향의 벡터와 좌표축  $X, Y$ 와의 회전각  ${}^t\psi^k, {}^t\phi^k$  및  $s$  방향의 벡터와 좌표축  $X$ 과의 회전각  ${}^t\chi^k$ 를 사용하여 표현하면 식(8), (9)로 표시되며  ${}^t\phi^k$ 는  $s$  방향의 벡터와  $t$  방향의 벡터가 서로 수직하다는 조건을 사용하여 식(10)으로 표현된다.

$${}^tV_{t1}^k = \text{Cos}^t\psi^k$$

$${}^tV_{t2}^k = \text{Sin}^t\psi^k \text{Cos}^t\phi^k \tag{8}$$

$${}^tV_{t3}^k = \text{Sin}^t\psi^k \text{Sin}^t\phi^k$$

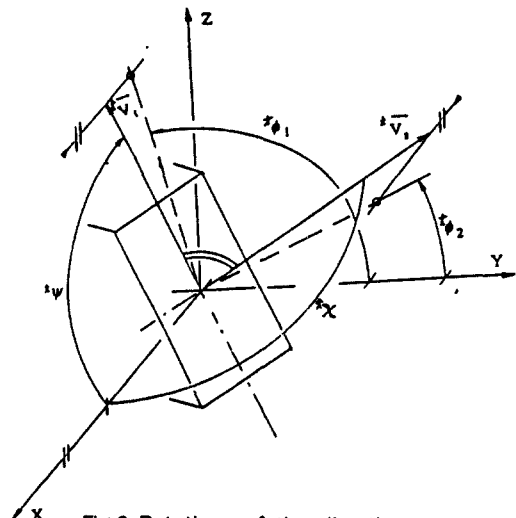


Fig.2 Rotations of the direction vectors

$$\begin{aligned} {}^tV_{s1}^k &= \text{Cost}^k \chi^k \\ {}^tV_{s2}^k &= \text{Sint}^k \chi^k \text{Cost}^t \phi_2^k \\ {}^tV_{s3}^k &= \text{Sint}^k \chi^k \text{Sint}^t \phi_2^k \end{aligned} \quad (9)$$

$${}^t\phi_2 = {}^t\phi^k - \text{Cos}^{-1}(-\text{Cot}^t \phi^k \text{Cot}^t \chi^k) \quad (10)$$

따라서 6개의 방향 벡터성분을 3개의 회전각으로 표현하였으며, 상기의 관계식을 사용하여 9 자유도를 사용한 기하학적 변위 식(6)을 절점변위 및 회전중분의 6 자유도로 표현한다.

시간 t+dt 상태의 기하학적 전체변위의 증분을 나타내는 자유도는 식(11), 식(12)로 표현되며 회전각과 회전중분의 관계는 식(13)으로 표현된다.

$$[U(9)] = \begin{bmatrix} {}^{t+dt}U_i - {}^tU_i \\ {}^{t+dt}V_{Si} - {}^tV_{Si} \\ {}^{t+dt}V_{ti} - {}^tV_{ti} \end{bmatrix}^k \quad (11)$$

(i = 1, 2, 3)

$$[a(6)] = \begin{bmatrix} U_i \\ {}^{t+dt}\phi - {}^t\phi \\ {}^{t+dt}\psi - {}^t\psi \\ {}^{t+dt}\chi - {}^t\chi \end{bmatrix}^k \quad (12)$$

$$\begin{aligned} {}^{t+dt}\phi^k &= {}^t\phi^k + \alpha^k \\ {}^{t+dt}\psi^k &= {}^t\psi^k + \beta^k \\ {}^{t+dt}\chi^k &= {}^t\chi^k + \gamma^k \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 시간 t+dt 상태의 기하학적 전체변위 증분을 Taylor의 급수전개로 2차항까지 구하면 다음과 같다.

$${}^{t+dt}U(9) = {}^tU(9) + U(9) \approx {}^tU(9) + {}^t\left[\frac{\partial U(9)}{\partial a}\right] a + {}^t\left[\frac{\partial^2 U(9)}{\partial a^2}\right] \frac{a^2}{2!} \quad (14)$$

$$U(9) = \lambda_L a_L + \lambda_R a_R \quad (15)$$

$$\lambda_L = {}^t\left[\frac{\partial U(9)}{\partial a}\right] \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \lambda_R &= {}^t\left[\frac{\partial}{\partial a}\right] {}^t\left[\frac{\partial U(9)}{\partial a}\right] \\ &= \lambda_{R1} + \lambda_{R2} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} a_L &= [U_1^N \alpha^1 \beta^1 \gamma^1 \dots U_N^N \alpha^N \beta^N \gamma^N]^T \\ a_{R1} &= [\frac{1}{2}(\alpha^1)^2 \frac{1}{2}(\beta^1)^2 \frac{1}{2}(\gamma^1)^2 \dots \frac{1}{2}(\alpha^N)^2 \frac{1}{2}(\beta^N)^2 \frac{1}{2}(\gamma^N)^2]^T \\ a_{R2} &= [\alpha^1 \beta^1 \beta^1 \gamma^1 \gamma^1 \alpha^1 \dots \alpha^N \beta^N \beta^N \gamma^N \gamma^N \alpha^N]^T \\ N &= 1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

식(16), (17)과 식(6)을 사용해서 선형항에 대한 변환행렬  $\lambda_L$ 과 회전항에 대한 변환행렬  $\lambda_{R1}$ ,  $\lambda_{R2}$ 를 k 절점에 대하여 구하면 식(18), (19), (20)과 같고 k개의 절점이 있는 한 요소에 대한 변환행렬  $T_x$ 는 식(21)으로 표현된다.

$$[\lambda_L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial V_{sx}}{\partial \chi} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial V_{sy}}{\partial \phi} & \frac{\partial V_{sy}}{\partial \psi} & \frac{\partial V_{sy}}{\partial \chi} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial V_{sz}}{\partial \phi} & \frac{\partial V_{sz}}{\partial \psi} & \frac{\partial V_{sz}}{\partial \chi} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial V_{tx}}{\partial \phi} & \frac{\partial V_{tx}}{\partial \psi} & \frac{\partial V_{tx}}{\partial \chi} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial V_{ty}}{\partial \phi} & \frac{\partial V_{ty}}{\partial \psi} & \frac{\partial V_{ty}}{\partial \chi} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial V_{tz}}{\partial \phi} & \frac{\partial V_{tz}}{\partial \psi} & \frac{\partial V_{tz}}{\partial \chi} \end{bmatrix}^k \quad (18)$$

$$[\lambda_{R1}^t] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \chi} \left[ \frac{\partial V_{sx}}{\partial \chi} \right] \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial V_{sy}}{\partial \phi} \right] & \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \frac{\partial V_{sy}}{\partial \psi} \right] & \frac{\partial}{\partial \chi} \left[ \frac{\partial V_{sy}}{\partial \chi} \right] \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial V_{sz}}{\partial \phi} \right] & \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \frac{\partial V_{sz}}{\partial \psi} \right] & \frac{\partial}{\partial \chi} \left[ \frac{\partial V_{sz}}{\partial \chi} \right] \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \frac{\partial V_{tx}}{\partial \psi} \right] & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial V_{ty}}{\partial \phi} \right] & \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \frac{\partial V_{ty}}{\partial \psi} \right] & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial V_{tz}}{\partial \phi} \right] & \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \frac{\partial V_{tz}}{\partial \psi} \right] & 0 \end{bmatrix}^k \quad (19)$$

$$[\lambda_{R2}^t] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \chi} \left[ \frac{\partial V_{sx}}{\partial \chi} \right] \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial V_{sy}}{\partial \phi} \right] & \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \frac{\partial V_{sy}}{\partial \psi} \right] & \frac{\partial}{\partial \chi} \left[ \frac{\partial V_{sy}}{\partial \chi} \right] \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial V_{sz}}{\partial \phi} \right] & \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \frac{\partial V_{sz}}{\partial \psi} \right] & \frac{\partial}{\partial \chi} \left[ \frac{\partial V_{sz}}{\partial \chi} \right] \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \frac{\partial V_{tx}}{\partial \psi} \right] & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial V_{ty}}{\partial \phi} \right] & \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \frac{\partial V_{ty}}{\partial \psi} \right] & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial V_{tz}}{\partial \phi} \right] & \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \frac{\partial V_{tz}}{\partial \psi} \right] & 0 \end{bmatrix}^k \quad (20)$$



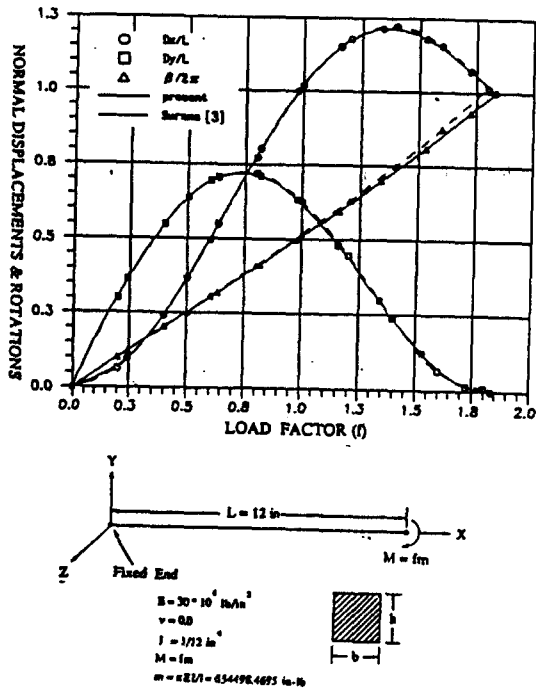


Fig.3 Load-deflection curves of the cantilever

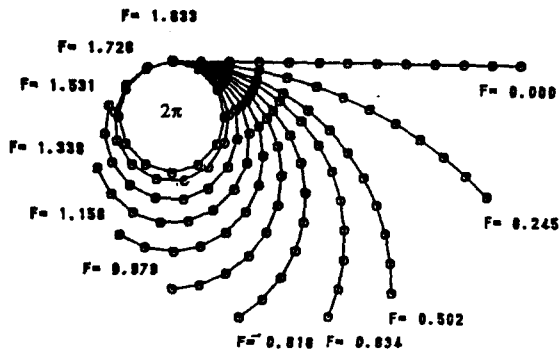


Fig.4 Deformed shapes of the cantilever

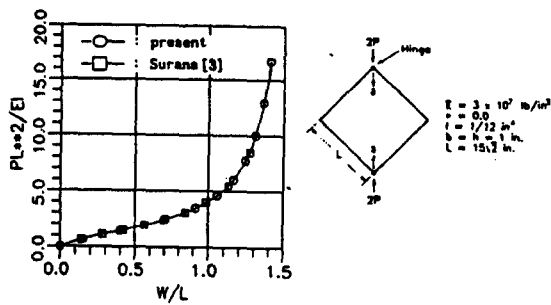


Fig.5 Load-deflection curves of the square frame

Table 1 Load-deflection characteristics of the cantilever

Case : Present approach(0.25KN)

TOTAL LOAD(KN)	X-DISP.	Y-DISP.	Z-ROTA-TION	NO. OF ITERRATION
0.24518	- 1.16073	-4.40102	-0.771374E+00	4
0.50157	- 4.44119	-7.65917	-0.158399E+01	5
0.63350	- 6.59975	-8.47597	-0.200705E+01	5
0.81620	- 9.63756	-8.52053	-0.260065E+01	4
0.97865	-11.98846	-7.58374	-0.313855E+01	4
1.15777	-13.79972	-5.77136	-0.374615E+01	4
1.33923	-14.55029	-3.57195	-0.438168E+01	4
1.53075	-14.15722	-1.47726	-0.508229E+01	5
1.72605	-12.85499	-0.19174	-0.584197E+01	5
1.83340	-11.99073	-0.00002	-0.628818E+01	7
TOTAL ITERATION				47
LINEAR STATIC(f=0.2)				
0.2	0.0	-3.769911E+00	-6.283185E-01	

CASE : S.K. SURANA [3]

TOTAL LOAD(KN)	X-DISP.	Y-DISP.	Z-ROTA-TION	NO. OF ITERRATION
0.2	- 0.76523	-3.62328	-0.63763	7
0.4	- 2.89947	-6.57447	-1.27781	7
0.6	- 5.95519	-8.32848	-1.92466	7
0.8	- 9.29273	-8.61971	-2.58299	7
1.0	-12.2150	-7.50693	-3.25884	7
1.2	-14.12230	-5.37612	-3.96051	8
1.4	-14.66210	-2.87708	-4.70038	8
1.6	-13.85440	-0.79721	-5.49895	9
1.8	-12.18030	-0.12317	-6.39686	9
TOTAL ITERATION				68
LINEAR STATIC(f=0.2)				
0.2	0.0	-3.769911	-6.283185	

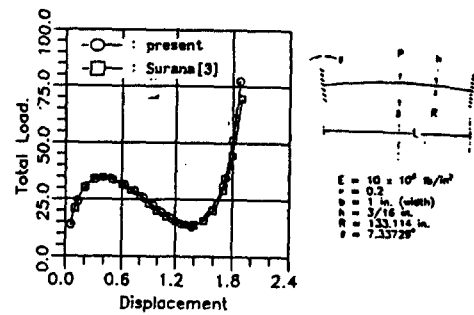
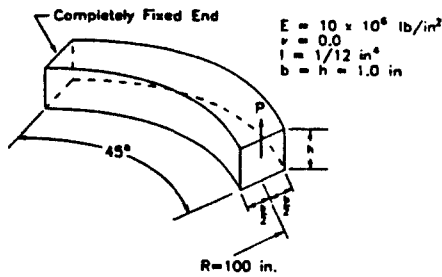


Fig.6 Load-deflection curves of the shallow arch

Table 2 Load-deflection characteristics of the square frame

Present			Surana [3]		
Disp. W/L	load factor PL**2/EI	* iter.	Disp. W/L	load factor PL**2/EI	* iter.
0.153786	0.690938	4	0.141421	0.64829	6
0.402196	1.45078	5	0.28284	1.107221	5
0.695543	2.3905	5	0.424264	1.51764	5
0.916924	3.46732	4	0.565685	1.94354	5
1.05885	4.61305	4	0.707100	2.43889	5
1.16577	6.02711	4	0.848528	3.07627	5
1.24744	7.7842	3	0.989949	3.98978	5
1.31279	10.0367	3	1.13137085	5.49196	5
1.36624	12.933	3	1.272793	8.51549	5
1.41149	16.7026	3	1.4142135	16.75346	6
total iterations:			38		
			52		

\* iter : number of iterations.



	U-DISP.	V-DISP.	W-DISP.	ITERA-TIONS	TOTAL FORCE (psi)
Bathe-Bolourchi[2]	-13.4	-23.5	53.4	-	600
Surana[3]	-13.32	-23.00	52.99	47	583.4
Dvorkin-Onate[4]	-13.6	-23.5	53.3	34	600
present	-13.922	-24.04	53.83	38	618

Fig.7 Analysis of a 45-degree bend

예제 4) 절점하중을 받는 45° 만곡된 외팔보  
 45° 만곡된 외팔보의 자유단에 절점하중이 작용하는 예제로서 해석모델 및 변위를 Fig.7에 비교하였으며 Fig.7에 비교된 전체하중의 차이는 비선형 수치해석법에서 변위중분법과 하중중분법 및 중분방법의 차이에서 발생하였다.

4. 결 론

대변위와 대회전을 고려한 격하 보요소의 비선형

중분 평형식을 정식화하였으며 기하학적 비선형 수치해석의 결과를 참고문헌[3, 4]의 예제와 비교하였다. 본 논문과의 비교에서, 변위의 크기가 미소한 차이를 보여주고 있으나 이는 대회전을 고려하는 방법의 차이에 의해서 기인한다고 사료된다. 또한 비선형 경로의 접근성에서 반복회수가 본 논문에서 빠른 결과를 보여주는데 이것은 비선형 수치해석법의 차이에서 나타나며 본 논문에서는 General Stiffness Parameter method를 사용하였다[7].

이상의 해석결과로부터 본 논문에서 개발된 프로그램은 편심 보강된 구조물에 대한 비선형 거동 및 좌굴해석에 유용하게 활용될 수 있으며 추후, T형 및 L형의 편심된 보강재를 이상화할 수 있는 요소에 대한 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

- [1] Bathe K.J., Ramm, and Willson E.L., "Finite element formulation for large deformation analysis", *Int. J. Numerical Method in Engineering*, Vol.9, pp.351-385, 1975.
- [2] Bathe K.J. and Bolourchi S., "A geometric and material nonlinear plate and shell element", *Int. J. Computers & Structures*, Vol.11, pp.23-28, 1980.
- [3] Surana K.S. and Serem Robert M., "Geometrically nonlinear formulation for three dimensional curved beam elements with large rotations", *Int. J. Numerical Method in Engineering*, Vol.28, pp.43-73, 1989.
- [4] Dvorkin, E. Onate E. and Oliver J., "On a nonlinear formulation for curved Timoshenko beam elements considering large displacement/rotation increments", *Int. J. Numerical Method in Engineering*, Vol.26, pp.1597-1613, 1988.
- [5] 이재욱, 정기태, 양영태, "선체구조 부재의 좌굴 강도 해석 프로그램 개발", 인하대학교 산업 기술 연구소, 1990.6.30.
- [6] 이재욱, 정기태, 양영태, "편심 보강평판의 기하학적 비선형 해석", 한국 선급 기술 연구소, 1991.
- [7] 양영태, "대변위와 대회전을 고려한 만곡된 셸 및 편심 보강평판의 기하학적 비선형 해석", 인하대 박사학위논문, 1992.2.