

論 文

大韓造船學會論文集
제 29卷 第 4號 1992年 11月
Transactions of the Society of
Naval Architects of Korea
Vol.29, No. 4, November 1992

연성재료의 소성손상 구성방정식에 관한 연구

노인식*, 임상전**, 신종계*

Constitutive Model for Plastic Damage of Ductile Materials

by

I.S.Nho*, S.J.Yim** and J.G.Shin*

요 약

연속체 손상역학 분야의 열역학적 정식화 과정에 따라 연성재료의 탄소성-손상 구성방정식을 유도하였다. 이때, 재료 내부의 비가역적인 열역학적 상태변화를 표현하는 소성변형, 손상진전 등의 물리적현상을 내부상태변수로 간주하였다. 이 새로운 구성방정식 모형을 실제 문제에 적용함으로써 연성재료의 탄소성 거동 뿐만 아니라 재료의 자체가 손상을 입어 약화되는 과정 까지도 합리적으로 예측 가능함을 확인할 수 있었다.

Abstract

An elasto-plastic-damage constitutive model for ductile materials was derived under the framework of thermodynamic approach of continuum damage mechanics (CDM) in which internal irreversible thermodynamic change of micro-structure of materials such as plastic deformation and damage evolution were considered as thermodynamic state variables. New constitutive model can predict not only the elasto-plastic behaviors but also the sequential degradation process of ductile materials more rationally.

1. 서 론

재료가 하중을 받고 내부적인 손상이 누적되어 마침내 파단에 이르게되는 일련의 과정을 이론적으로 설명하기 위해서 이미 재료과학적인 측면에서 많은 연구들이 이루어져 왔고 이 연구결과들을 실제적인

문제해결에 적용하기 위한 역학적인 측면에서의 연구도 상당한 진전을 보이고 있다. 강, 알루미늄, 구리 등과 같은 연성금속재료의 소성변형 현상은 미시적인 측면에서 입자들간의 전위(dislocation)이론으로 설명가능하며, 거시적인 거동은 현재까지 개발된 소성해석이론으로써 근사적으로 표현될 수 있다.

발표 : 1992년도 대한조선학교 춘계연구발표회('92.4.18)
접수일자 : 1992년 5월 21일, 재접수일자 : 1992년 7월 8일
* 정회원, 해사기술연구소
** 정회원, 서울대학교 조선해양공학과

또한, 파괴역학의 발전에 따라 균열진전에 따른 에너지 방출 및 불안정 급속파단 현상을 어느정도까지는 이론적으로 예측가능하게 되었다. 그러나 소성이론은 재료가 완전히 강성을 잃고 파단되는 경우에 대한 적절한 판정기준을 제공할 수 없다는 한계가 있고 파괴역학적인 접근방법 역시 균열자체의 기하학적 특성 즉 선단 부근의 특이점 거동에 초점이 주어지기 때문에 재료 결정 입자간의 수많은 미소공동이나 미소균열의 생성으로 인하여 야기되는 재료자체의 약화현상을 설명하기에는 부적절하다. 현재까지 개발되어 사용되고있는 이러한 현상학적 모형들의 공통적인 문제점으로 지적될 수 있는 것은 하중을 받고있는 재료 내부에서 손상을 입지 않은 부분(virgin material)과 이미 손상이 발생한 부분을 구분하여 처리할 수 없을 뿐 아니라 손상의 정도를 표현하기는 더욱 불가능하다는 점이다. 따라서 손상을 변형도와 마찬가지로 재료거동의 이력을 나타내는 고유의 상태변수로 처리해야할 필요성이 대두되었다.

최근에는 Truesdell등에 의해 체계화된 구성방정식의 열역학적 정식화 과정[1,2]에 1958년 Kachanov[3]에 의해 제안된 연속체손상역학(CDM, continuum damage mechanics)을 접목함으로써 고온금속의 크리프(creep)현상, 연성재료의 저사이클 피로(low cycle fatigue)파괴 및 콘크리트, 암석, 빙의 취성파괴 등을 이론적으로 해석할 수 있는 구성방정식의 개발에 관한 연구가 시도되고 있다. 손상역학에서는 재료의 파손현상이 미세조직(micro-structure)수준에서 발생하는 공동(void), 미소균열등 미소결합들의 생성 및 발전과 깊은 연관이 있다는 재료공학분야의 연구성과들을 바탕으로 하여 개개결합들의 형상에 구애받지 않고 어떤 일정부위에 분포된 미세 결합들의 평균적인 밀도를 손상이라는 내부변수로 고려함으로써 재료의 비선형 거동을 거시적으로 잘 표현할 수 있으며 최종적으로 강성을 완전히 잃게되는 시점까지도 예측가능하기 때문에 구조공학 분야에 광범위하게 적용가능할 것으로 예측된다.

본 연구에서는 이러한 연속체 손상역학 분야의 접근방법에 따라 구조물의 소성변형 현상을 추적함에 있어서 기존의 소성이론이 갖는 한계를 극복하여 변형과정에서 발생하는 재료자체의 손상을 고려할 수 있는 좀더 합리적인 구조안전성 평가기법을 개발하는 데 그 목적을 두었다. 연속체역학의 열역학적 정식화과정에 따라 손상을 포함하는 각 내부변수들의 구성방정식을 구하였으며 이를 이용하여 소성-손상

유동법칙(plastic-damage flow rule)을 유도하였다. 또한 예제계산을 통하여 이 수치모형의 적용성 및 타당성을 검토하였다.

2. 연속체 손상역학

2.1 등방성 손상

Kachanov^[3]는 크리프 현상하에서 금속의 손상이 미소공동 발생에 기인하는 것으로 간주하고 이 공동에 의한 단면적의 감소비율을 손상변수 Ψ 로 정의하여 유효응력(effective stress) σ^* 과 변형도의 관계식을 다음과 같이 표현하였다(Fig.2.1).

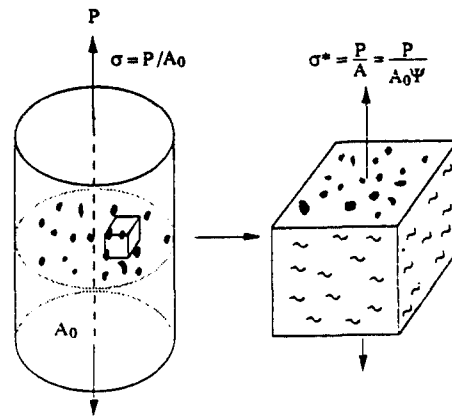


Fig.2.1 Damage model of Kachanov [1958]

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{\Psi} \tag{2.1}$$

$$\epsilon = \frac{\sigma^*}{E} = \frac{\sigma}{E\Psi} \tag{2.2}$$

$$\Psi = -A(\sigma_{max} / \Psi)^n \tag{2.3}$$

일차원적인 응력상태만을 대상으로 하였기 때문에 Ψ 는 손상의 방향성을 고려하지 못하는 스칼라 량으로 표시된다. 이때 재료의 응력상태에 따른 손상의 진전속도, 즉 손상발전식(damage evolution equation)은 기본형태를 경험적으로 가정하고 관련계수들을 실험을 통하여 결정한다.

2.2 이방성 손상

일반적으로 재료의 손상은 어떤 방향성을 가진 미소균열 형태로 나타는 경우가 많으며 취성이 큰 재질일수록 이러한 경향은 더욱 현저하다. 결국 손상을 모든 방향으로 투영면적이 같은 공동으로 간주하는

등방성 손상이론으로는 이러한 손상에 기인하는 이방성 문제를 다룰수 없기 때문에 취성재료나 다축응력상태 문제에 등방성 손상을 적용하는 것은 상당한 무리가 따른다는 것을 쉽게 짐작할 수 있다. Vakulenko and Kachanov[5]는 균열이 존재하는 물체에서 손상변수를 균열의 수직방향 단위벡터와 변위점프(displacement jump)벡터의 다이아드 곱(dyadic product)에 대한 적분량으로 표시되는 텐서 손상(tensor damage)개념을 최초로 도입함으로써 이방성 손상의 가능성을 제시하였으며 손상을 내부변수로 취급하고 열역학적인 접근방법에 따른 연속체 역학의 일반적 유도과정을 도입하여 정식화 하였다. Davison and Stevens[6], Krajcinovic[16] 등은 손상을 면적과 방향을 가진 벡터로 표시함으로써 취성재료의 파쇄손상(spall damage)문제를 다루었다. Murakami and Ohno[7] 등은 Vakulenko 형 손상텐서에서 변위점프벡터의 방향이 균열의 수직방향 벡터와 일치하는 것으로 간주하여 좀 더 간편한 모델을 제시하였으며 이 손상 텐서의 고유치가 고유 벡터방향의 면적감소율을 뜻한다는 사실을 물리적 모델로써 설명하였다. 이들에 따르면 이방성 손상텐서 Ω 는 다음식과 같이 일반화하여 표현할 수 있다.

$$\Omega = \sum_{i=1}^3 \omega_i (v_i \otimes v_i) \quad (2.4)$$

이때 v_i 는 손상의 주축방향 역행벡터, ω_i 는 v_i 방향의 유효면적 감소율을 뜻한다. 유효응력 σ^* 로부터 다음과 같이 변환된다.

$$\sigma^* = \sigma \cdot \phi \quad (2.5)$$

$$\phi = (I - \Omega)^{-1} \quad (2.6)$$

여기서 I는 2차단위텐서를 의미하며(2.5)식은 1차원적인 (2.1)식을 3차원으로 확장한 형태가 된다.

3. 기본방정식의 정식화

연속체의 거동은 3가지의 기본방정식으로써 표현할 수 있다. 즉, 변형의 기하학(kinematics)으로부터 변형도와 변위의 관계가 정의 되며 질량, 운동량 보존법칙 들로부터 운동방정식이 도출된다. 또한 재료 고유의 특성을 나타내는 응력-변형도 관계식이 구성방정식으로 표현된다.

3.1 연속체변형의 기하학

(1) 변형구배텐서(Deformation gradient tensor)

연속체 \mathcal{B} 가 변형하면서 이동할 때 \mathcal{B} 내부의 임의점 p 의 원점에 대한 위치벡터는 x 에서 y 로 변화하게 된다. 따라서 변형전후에 있어서 연속체 내부 각점들의 위치는 다음과 같은 1대1 대응관계가 성립된다.

$$y = y(x, t) \quad (3.1)$$

그리고 변형전 연속체 내부의 미소길이 dx 가 dy 로 변형될 때 이 두개 미소량의 변환관계를 정의하는 변형구배 텐서 F 를 다음과 같이 정의한다.

$$dy = F \cdot dx \quad (3.2)$$

$$F = \text{Grad } y = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (3.3)$$

이때, F 의 행렬식(determinant)은 Jacobian J 로 정의된다.

$$J = \det F \quad (3.4)$$

(2) 속도 구배 텐서(Velocity gradient tensor)

속도구배텐서 L 을 변형구배텐서 F 와 유사한 방법으로 다음과 같이 정의한다.

$$L = \text{grad } v = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.5)$$

여기서, v 는

$$v(y, t) = \frac{\partial y}{\partial t} \quad (3.6)$$

이며, 임의의 질점에서의 속도를 Euler 류로 표현한 식이다. 이때, 속도구배텐서 L 은 대칭성분인 변형률(stretching or rate of deformation or velocity strain)텐서 D 와 역대칭 성분인 회전율(spin) 텐서 W 의 합으로 표현할 수 있다.

$$L = D + W \quad (3.7)$$

$$D = L_{\text{sym}} = \frac{1}{2}(L + L^T) \quad (3.8)$$

$$W = L_{\text{anti-sym}} = \frac{1}{2}(L - L^T) \quad (3.9)$$

(3) 변형구배텐서의 가산분해(additive decomposition)

고체의 탄소성거동을 쉽게 다루기 위해서는 영구 변형인 소성변형성분과 하중을 제거한 후 복구되는 탄성변형성분을 분리하여 고려하는 것이 편리하다. Nemat-Nasser[9], Guo[10]등은 변형구배텐서를 탄성성분과 소성성분의 합으로 표시하는 가산분해법을 제안하고 있다.

먼저 순수한 재료자체의 거동만을 고찰하기 위하여 모든 재료요소들이 동일한 변형상태를 유지하며 적합조건이 자동적으로 만족되는 균일변형상태(homogeneous deformation)를 가정한다. 그러면 임의의 질점 p 에서의 변위벡터 \mathbf{u} 는 탄성변위 \mathbf{u}_e 와 소성변위 \mathbf{u}_p 로 분해하여 쓸 수 있다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_p \tag{3.10}$$

(3.10)식으로부터 속도 $\dot{\mathbf{u}}$ ($=\mathbf{v}$)가 다음식으로 표현된다.

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_e + \dot{\mathbf{u}}_p = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_p \tag{3.11}$$

(3.10)식을 위치벡터의 합으로 바꾸어쓰면

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_e + \mathbf{y}_p - \mathbf{x} \tag{3.12}$$

이 되며 이때, \mathbf{y}_e 와 \mathbf{y}_p 는 각각 순수한 탄성 혹은 변형시에 질점 p 가 점유하는 가상적인 위치벡터를 표시한다. (3.12)식의 양변을 \mathbf{x} 로 편미분하면 변형구배텐

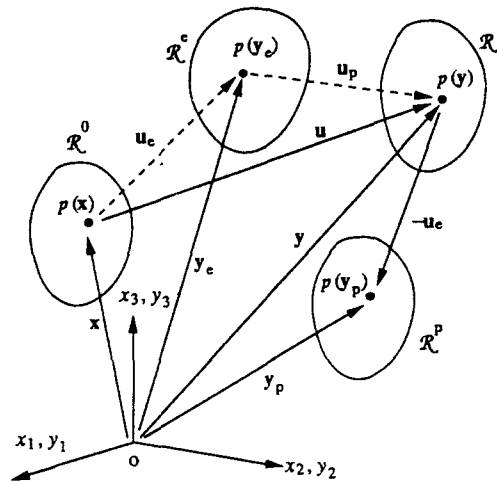


Fig.3.1 Configurations in elasto-plastic deformation

서가 다음과같은 가산분해 형태로 유도된다.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_p - \mathbf{I} \tag{3.13}$$

(3.13)식으로부터 다음식이 유도되며

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{F}}_e + \dot{\mathbf{F}}_p \tag{3.14}$$

(3.11)식과 (3.5)식으로부터 (3.15)식이 도출된다.

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{L}_e + \mathbf{L}_p \tag{3.15}$$

그리고 (3.8)식에 (3.15)식을 대입하면 변형률 \mathbf{D} 가 다음과 같이 탄성성분과 소성성분의 합으로 표시된다.

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \frac{1}{2}(\mathbf{L}_e + \mathbf{L}_p + \mathbf{L}_e^T + \mathbf{L}_p^T) = \mathbf{D}_e + \mathbf{D}_p \tag{3.16}$$

(4) 변형도 평가단위(Strain measure)

대변형도 탄소성 해석의 경우와 같이 재료성질이 변형경로 의존적인 경우에는 구성방정식이 변형도 및 응력의 변화율 간의 관계식(rate type constitutive equation)으로 표현되어야 하기 때문에 Euler류의 변형률을 사용하는 것이 편리하다. 따라서 본 연구에서는 (3.16)식으로 표현된 변형률을 직접 전적분(material time integration)한 ϵ 를 변형도 텐서로 정의한다.

$$\dot{\epsilon} = \mathbf{D}, \epsilon = \int_{t_0}^t \mathbf{D} dt \tag{3.17}$$

변형도 ϵ 의 표현방식은 현재 형상에 대한 변형량의 비율을 적분해가는 접근방식을 택하고 있기 때문에 흔히 말하는 로그 변형도(logarithmic strain), 진 변형도(true strain) 혹은 자연 변형도(natural strain)의 3차원적인 확장형으로 이해될 수 있다. (3.16) (3.17)식으로부터 변형률 역시 탄성성분과 소성성분의 합으로 표현가능하다.

$$\dot{\epsilon} = \mathbf{D}_e + \mathbf{D}_p = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_p \tag{3.18}$$

3.2 운동방정식(Equation of motion)

(1) 질량보존(Mass Balance)

변형후에도 연속체 B의 총질량이 변화하지 않는다

는 조건에서 다음식이 유도된다.

$$\rho_0 = \rho J = \rho \det \mathbf{F} \quad (3.19)$$

(2) 선운동량 보존(Balance of linear momentum)

Newton 제3법칙인 선운동량 보존법칙에 따라 다음과 같은 운동방정식이 유도된다.

$$\operatorname{div} \sigma + \rho \mathbf{b} - \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0 \quad (3.20)$$

이때 Cauchy 응력텐서 σ 는 변형된 현재상태에서의 단위 면적당 작용하는 내력을 의미하는 Euler 류의 응력단위(stress measure)가 된다.

(3) 각 운동량 보존(Balance of angular momentum)

내력과 외력에 의한 각 운동량이 평형을 이룬다는 조건으로부터 다음과 같은 Cauchy 응력텐서의 대칭 조건이 도출된다.

$$\sigma = \sigma^T \quad (3.21)$$

3.3 에너지 보존(Energy balance)

(1) 열역학 제1법칙

외부와의 물질교환이 없는 연속체 내부의 총에너지의 변화량은 계로 유입되는 일률(power) 및 열량의 합과 같다는 열역학 제1법칙에 따라 다음과 같이 에너지 보존법칙이 성립된다.

$$\dot{E}_{\text{total}} = P_{\text{input}} + Q_{\text{input}} \quad (3.22)$$

여기서 입력되는 일률 P_{input} 은 작용력에 의한 일률의 합으로 나타낼 수 있고 열유입량 Q_{input} 은 표면으로부터 전도되는 열량과 내부에 분포된 열원에서 공급되는 열량의 합으로 표시할 수 있다. (3.22)식의 에너지 보존법칙은 다음과 같은 수식으로 표현된다.

$$\rho \dot{u} = \sigma : \mathbf{D} + \rho r - \operatorname{div} \mathbf{q} \quad (3.23)$$

여기서, \mathbf{q} 는 열속(heat flux)벡터이며 r 은 단위 질량당 내부 열원의 세기를 나타낸다. 이때 단위질량당 내부에너지 u 는 계의 열역학적 상태를 표시하는 상태 변수들의 함수로서 표현가능하다.

(2) 열역학 제2법칙

열역학 제2법칙에 의하면 닫힌계를 이루는 연속체에서의 엔트로피 증가율은 열전도에 의한 엔트로피 증가율보다 항상 크다. 다시 말하면 연속체 내부의 엔트로피를 증가시키는 요인은 열전도에 의한 영향 뿐만 아니라 연속체 내부상태의 각종 비가역적 변화에 의해 에너지 소산이 이루어지고 이에 따라 엔트로피의 증가가 수반된다는 것이다. 이것을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{s} \geq \frac{r}{\theta} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \quad (3.24)$$

여기서, s 는 단위질량당 엔트로피, θ 는 절대온도를 나타낸다. (3.24)식은 Clausius-Duhem 부등식으로 널리 알려져 있다.

3.4 구성방정식

Clausius-Duhem 부등식으로 부터 연속체 내부의 상태를 표시하는 각 상태변수들의 연관관계가 유도되는데 이것이 바로 연속체를 구성하는 재료의 고유 특성을 나타내는 구성방정식이 된다.

(1) 자유에너지 포텐셜

정식화의 편의를 위하여 내부에너지 중 등온과정(isothermal process)하에서 순수하게 일로 변환가능한 에너지분인 자유에너지의 밀도(Helmholz free energy density) Ψ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\Psi = u - s\theta \quad (3.25)$$

(3.25)식을 (3.23)식에 대입하여 내부에너지 u 를 소거한 다음 다시 (3.24)식의 Clausius-Duhem 부등식에 대입하여 r 을 소거하게 되면 최종적으로 다음과 같은 부등식이 유도된다.

$$\rho \mathfrak{D} = \sigma : (\dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_p) - \rho (\dot{\Psi} + s\dot{\theta}) - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (3.26)$$

여기서, \mathbf{g} 는 온도구배 즉 $\operatorname{grad} \theta$ 를 나타낸다. \mathfrak{D} 는 에너지소산일률밀도(energy dissipation power density)이며 과정중에 발생하는 에너지 소산을 의미한다.

(2) 상태변수

재료의 거시적 거동특성은 내부조직의 미시적 변화 즉, 열역학적 상태에 따라 결정되는 것으로 간주할 수 있고 이러한 고체내부의 열역학적 상태는 유한

개의 독립변수들 즉, 상태변수들(state variables)의 함수로써 근사적 표현할 수 있는 것으로 간주한다. [1][2] 또한 이 상태변수들은 외부적으로 관찰이 가능한 관찰변수(observable variables)와 변형이력에 관계되어 현재상태만으로는 외부적으로 측정이 불가능한 내부변수(hidden or internal variables)로 구분될 수 있다. Lemaitre, Chaboche 등[11,12,13]은 상태변수들을 열역학적 에너지 공액을 이루는 관계변수(associate variable)들과 함께 Table 3.1과 같이 정의하고 있다.

Table 3.1 Mechanical thermodynamic variables

State variables		Associated variables
Observable	Internal	
strain ϵ		stress σ
temperature θ		entropy s
temp. gradient g		heat flux $-q/\theta$
	elastic strain ϵ_e	stress σ
	plastic strain ϵ_p	stress $-\sigma$
	other variables A_k	V_k

(3) 열역학적 제한조건

Truesdell의 등출현법칙(principle of equipresence)에 따라 관계변수와 상태변수들간의 상관관계를 나타내는 구성방정식이 다음과 같은 형태로 존재하는 것으로 가정할 수 있다[1,2,14].

$$\Psi = \Psi(\epsilon_e, \theta, g, V_k) \tag{3.27.a}$$

$$\sigma = \sigma(\epsilon_e, \theta, g, V_k) \tag{3.27.b}$$

$$s = s(\epsilon_e, \theta, g, V_k) \tag{3.27.c}$$

$$q = q(\epsilon_e, \theta, g, V_k) \tag{3.27.d}$$

$$A_k = A_k(\epsilon_e, \theta, g, V_k) \tag{3.27.e}$$

따라서, 연쇄규칙에 의해 자유에너지 포텐셜의 전미분 $\dot{\Psi}$ 은 다음과 같은 형태로 전개된다.

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_e} : \dot{\epsilon}_e + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \Psi}{\partial g} \cdot \dot{g} + \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \cdot \dot{V}_k \tag{3.28}$$

(3.28)식을 (3.26)식의 Clausius-Duhem 부등식에 대입하여 정리하면 다음과 같은 식이 유도된다.

$$\rho \mathcal{D} = (\sigma - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_e}) : \dot{\epsilon}_e + \sigma : \dot{\epsilon}_p - \rho (s + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}) \dot{\theta} - \frac{q}{\theta} \cdot \dot{g} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial g} \cdot \dot{g} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \cdot \dot{V}_k \geq 0 \tag{3.29}$$

변형과정을 등온과정으로 가정하면 (3.29)식은 결국 다음과같이 1개의 등식과 에너지 소산을 의미하는 1개의 부등식으로 간단하게 정리된다.

$$\sigma = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_e} \tag{3.30}$$

$$\rho \mathcal{D} = \sigma : \dot{\epsilon}_p - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \cdot \dot{V}_k \geq 0$$

$$X \cdot J \geq 0 \tag{3.31}$$

여기서,

$$X = \{\sigma, A_k\}^T \tag{3.32.a}$$

$$J = \{\dot{\epsilon}_p, \dot{V}_k\} \tag{3.32.b}$$

$$A_k = - \frac{\rho \partial \Psi}{\partial V_k} \quad (k=1,2,\dots) \tag{3.32.c}$$

J는 열역학적 플럭스 변수(thermodynamic flux variable), X는 열역학적 공액력(coujugated thermodynamic forcess)을 의미한다.

(4) 소산 포텐셜 및 보 법칙(complementary law)

(3.31)식의 기계적 에너지 소산과정을 표현하기 위해서는 플럭스변수들의 발전식(evolution equation)이 정의되어야 한다. 먼저 플럭스 벡터 J를 독립변수로 하는 소산포텐셜 ϕ 의 존재를 다음과 같이 가정한다.

$$\phi(J) = \frac{1}{2} \rho \mathcal{D} = \frac{1}{2} X(J) \cdot J \tag{3.33}$$

그러면, 열역학적 공액력 X는 소산포텐셜 ϕ 에 대한 직교법칙(nornality rule)으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$X = \frac{\partial \phi}{\partial J} \tag{3.34}$$

그러나 내부변수들의 발전식을 유도하기 위해서는 공액력 X를 독립변수로 하는 보(complementary) 포텐셜 ϕ^* 를 정의하고 내부변수를 ϕ^* 의 직교법칙으로 표현하는 것이 더욱 편리하다. 따라서 소산포텐셜 ϕ 로부터 독립변수와 종속변수의 상호변환 과정인 Legendre-Fenchel 변환함으로써 보 포텐셜 ϕ^* 를 다음과 같이 정의한다 [13].

$$\phi^*(\mathbf{X}) = \text{Sup}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{J} - \phi) \quad (3.35)$$

보 포텐셜 ϕ^* 가 미분가능하면 직교법칙이 그대로 성립하고 따라서, 내부변수들의 발전식을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \phi^*(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \quad (3.36)$$

4. 탄소성-손상 구성방정식의 정식화

4.1 개요

열역학적 구성방정식의 정식화과정을 재료의 탄소성 거동 및 손상해석 문제에 적용하오 탄소성-손상 구성방정식을 유도한다.

(1) 내부변수의 정의

우선 재료내부의 미시적인 조직변화를 표현하는 내부변수들을 선정한다. 내부변수로는 전위의 이동 및 집적, 미소결합의 성장으로 인한 재료의 약화현상 등을 변형거동과 같은 거시적 관점에서 평가할 수 있는 경화계수, 손상변수 등을 선택하면 결국 소성 손상문제에서의 에너지 소산 현상을 표현하는 열역학적 플럭스변수 및 공역력 들은 Table 4.1과 같이 정리된다.

Table 4.1 State variables in plastic damage problem

Flux variables		Conjugated forces	
plastic strain	ϵ_p	stress	$-\sigma$
kinematic strain	A	back stress	α
effective plastic strain	p	isotropic hard stress	R
damage	Ω	energy release rate	Y

(2) 유효응력 및 손상텐서

(2.4)(2.5)식으로부터 실제 재료에 유효하게 작용하는 응력 σ^* 는 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma^* = \sigma \cdot \phi, \quad \phi = (\mathbf{I} - \Omega)^{-1} \quad (4.1)$$

그러나 (4.1)식에서 응력 σ^* 는 대칭텐서가 아니기 때문에 σ^* 의 대칭성분만으로 유효응력텐서 $\tilde{\sigma}$ 를 다시 정의한다.

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} = \sigma^*_{\text{sym}} &= \frac{1}{2} (\sigma^* + \sigma^{*\text{T}}) = \frac{1}{2} (\phi \cdot \sigma + \sigma \cdot \phi) \\ &= \Phi : \sigma \end{aligned} \quad (4.2)$$

손상텐서 Φ 는 유효응력 $\tilde{\sigma}$ 와 결보기 응력 σ 의 관계를 나타내는 대칭 4차 텐서이다.

(3) 에너지 등가법칙

손상의 진전으로 인하여 열화된 재료의 응력-변형도 관계식에서 유효단면적의 감소율을 의미하는 손상텐서 Φ 의 역할을 정의하는 방법은 기본가정에 따라 여러가지로 달라질 수 있다. 본 논문에서는 Sidoroff⁽¹⁸⁾가 제안한 에너지등가법칙(Energetic identification)의 가정을 적용한다. 먼저 손상이 없는 재료(virgin material)에서 보 탄성에너지(complementary elastic energy)는 다음과 같이 표현가능하다.

$$W^e(\sigma, 0) = \frac{1}{2} \sigma^{\text{T}} : \mathbf{C}_e^{-1} : \sigma \quad (4.3)$$

여기서, \mathbf{C}_e 는 $\sigma = \mathbf{C}_e : \epsilon_e$ 의 관계를 만족하는 탄성강성텐서이다. 손상을 입은 재료에서는 (4.3)식의 보탄성에너지가 σ 대신 유효응력 $\tilde{\sigma}$ 의 함수로 표현될 수 있다고 가정한다.

$$\begin{aligned} W^e(\sigma, \Phi) &= W^e(\tilde{\sigma}, 0) \\ &= \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^{\text{T}} : \tilde{\mathbf{C}}_e^{-1} : \tilde{\sigma} = \frac{1}{2} \sigma^{\text{T}} : \tilde{\mathbf{C}}_e^{-1} : \sigma \end{aligned} \quad (4.4)$$

(4.4)식에서 유효탄성강성텐서 $\tilde{\mathbf{C}}_e$ 가 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{\mathbf{C}}_e = \Phi^{-1} : \mathbf{C}_e : \Phi^{-\text{T}} \quad (4.5)$$

4.2 열역학적 정식화

(1) 자유에너지

(3.18)식에서 보는 바와 같이 소성변형과 탄성변형이 서로 독립적이며 분해가능하다고 가정하는 것과 마찬가지로 탄소성-손상 문제에서도 소성변형과 관련된 경화현상이 다른 내부변수들과 연성효과가 없는 것으로 가정하게 되면 Helmholtz의 자유에너지 포텐셜 Ψ 를 다음과 같이 탄성항과 소성항으로 분해하여 취급할 수 있다 [11,16].

$$\Psi(\epsilon_e, p, \mathbf{A}, \Omega) = \Psi_e(\epsilon_e, \Omega) + \Psi_p(p, \mathbf{A}) \quad (4.6)$$

(4.5)식의 유효탄성강성텐서 $\tilde{\mathbf{C}}_e$ 를 도입하면 Ψ_e 는 다음과 같이 표현가능하다.

$$\rho \Psi_e = \frac{1}{2} \varepsilon_e : \tilde{\mathbf{C}}_e : \varepsilon_e \quad (4.7)$$

그리고 탄성변형도-응력 관계식이 다음식으로 유도된다.

$$\begin{aligned} \sigma &= \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_e} = \rho \frac{\partial \Psi_e}{\partial \varepsilon_e} = \tilde{\mathbf{C}}_e : \varepsilon_e \\ &= \Phi^{-1} : \tilde{\mathbf{C}}_e : \Phi^{-T} : \varepsilon_e \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \text{즉,} \\ \tilde{\sigma} &= \tilde{\mathbf{C}}_e \tilde{\varepsilon}_e \end{aligned} \quad (4.9)$$

여기서,

$$\tilde{\varepsilon}_e = \Phi^{-T} : \varepsilon_e \quad (4.10)$$

또한, (3.32)식에 의해 열역학적 공액력들은 내부 변수들의 함수로써 다음과 같이 정의된다.

$$-R = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial p} = \rho \frac{\partial \Psi_p}{\partial p} \quad (4.11.a)$$

$$-\alpha = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial A} = \rho \frac{\partial \Psi_p}{\partial A} \quad (4.11.b)$$

$$\begin{aligned} -\mathbf{Y} &= \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \Omega} = \rho \frac{\partial \Psi_e}{\partial \Omega} \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_e : \frac{\partial \tilde{\mathbf{C}}_e}{\partial \Omega} : \varepsilon_e \end{aligned} \quad (4.11.c)$$

(4.11.c)식의 $-\mathbf{Y}$ 는 파괴역학에서 설명하는 Irwin의 균열진전에 의한 에너지 해방률과 유사한 개념이며 손상에 의한 변형도 에너지 해방률(damage strain energy release rate)을 의미한다[11,16,17].

(2) 소성-손상 유동법칙

(4.6)식에서와 마찬가지로(3.35)식의 보 포텐셜 φ^* 역시 소성유동에 의한 에너지 소산을 표시하는 φ_p^* 와 손상의 진전에 따른 에너지 소산을 표시하는 φ_d^* 의 합으로써 다음식과 같이 표현할 수 있다.

$$\varphi^*(\sigma, \alpha, R, \mathbf{Y}) = \varphi_p^*(\sigma, \alpha, R) + \varphi_d^*(\mathbf{Y}) \quad (4.12)$$

따라서, 플릭스변수들의 발전식은 (3.36)식에 의거 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial \sigma} \quad (4.13.a)$$

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial \alpha} \quad (4.13.b)$$

$$-\dot{p} = \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial R} \quad (4.13.c)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{\partial \varphi_d^*}{\partial \mathbf{Y}} \quad (4.13.d)$$

일반금속이 용융점 절대온도의 1/4이하가 되는 온도범위에서 소성변형을 겪을 때는 시간의존적 효과 즉, 점성효과가 무시할 수 있을 정도로 작은 것으로 알려져 있다[13]. 이러한 즉발적인 변형만을 고려한다면 포텐셜 φ^* 는 미분가능하지 않으며, 항복조건이 만족되지 않는 경우에는 0, 항복조건이 만족되는 경우에는 무한대의 값을 갖는다. 이러한 경우, (4.13)식은 F라는 등포텐셜곡면함수(equipotential surface function)에 대한 미분치와 λ 라는 승수(multiplier)의 곱으로 표현 가능하다[13]. 이때, (4.12)식에서와 마찬가지로 F역시 소성과 손상관련 변수들을 분리하여 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$F(\sigma, \alpha, R, \mathbf{Y}) = F_p(\sigma, \alpha, R) + F_d(\mathbf{Y}) \quad (4.14)$$

또한 관계소성(associated plasticity)의 특성을 만족하는 재료인 경우에는 F_p 는 항복함수 f 와 동일한 함수로 가정할 수 있고 (4.13)식으로부터 결국 다음식과 같은 소성-손상 유동법칙(plastic damage flow rule)이 유도된다.

$$\dot{\varepsilon}_p = \lambda \frac{\partial F_p}{\partial \sigma} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (4.15.a)$$

$$\dot{\mathbf{A}} = \lambda \frac{\partial F_p}{\partial \alpha} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha} \quad (4.15.b)$$

$$-\dot{p} = \lambda \frac{\partial F_p}{\partial R} = \lambda \frac{\partial f}{\partial R} \quad (4.15.c)$$

$$-\dot{\Omega} = \lambda \frac{\partial F_d}{\partial \mathbf{Y}} \quad (4.15.d)$$

손상된 재료의 항복조건식이 손상을 고려하지 않을 때와 동일한 형태를 유지하여 응력 σ 대신 유효응력 $\tilde{\sigma}$ 의 함수로 표현될 수 있다고 가정한다면 von Miess의 항복조건식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(\tilde{\sigma}, \tilde{\alpha}, R) = \tilde{\sigma}_{eq} - R(p) \quad (4.16)$$

여기서,

$$\tilde{\sigma}_{eq} = \left\{ \frac{3}{2} (\tilde{\sigma} - \tilde{\alpha})^D : (\tilde{\sigma} - \tilde{\alpha})^D \right\}^{1/2} \quad (4.17.a)$$

$$\tilde{\alpha} = \Phi : \alpha \quad (4.17.b)$$

이며 ()^D는 편차성분(deviatoric component)을 의미한다. 일반적으로 가장 많이 사용되는 수정 Ramberg-Osgood식(Swift 식)에 따르면 등방경화계수 R은 다음과 같이 주어진다.

$$R(p) = \sigma_y(1 - cp)^n \quad (4.18)$$

이때, c, n은 재료상수이다. (4.16)-(4.18)식을 (4.15)식에 대입하면 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \sigma} \\ &= \frac{3}{2} \dot{\lambda} \Phi : (\tilde{\sigma} - \tilde{\alpha})^D \end{aligned} \quad (4.19a)$$

$$\dot{A} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \alpha} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\alpha}} : \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \alpha} = \dot{\epsilon}_p \quad (4.19.b)$$

$$\dot{p} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial R} = \dot{\lambda} \quad (4.19.c)$$

여기서, 유효소성변형률 $\dot{\epsilon}_p$ 를 다음과 같이 도입한다.

$$\dot{\epsilon}_p = \Phi^{-T} : \dot{\epsilon}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} (\tilde{\sigma} - \tilde{\alpha})^D \quad (4.20)$$

4.2 손상발전식(Damage evolution equation)

(4.15.d)식의 손상포텐셜 F_d를 Y에 선형적인 함수의 형태로 가정하면 (13) (4.15)식에 의해 손상진전을 - $\dot{\Omega}$ 는 다음과 식과 같이 정리된다.

$$-\dot{\Omega} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F_d}{\partial Y} = -\dot{\lambda} F_n Q \quad (4.21)$$

여기서 Q는 손상발전의 이방성을 표시하는 텐서로서 유효응력 $\tilde{\sigma}$ 의 주축방향에 따라 결정된다. 따라서 손상발전 과정에 있어서의 모든 비선형성은 함수 F_n에 결집된 형태로 표현될 수 있다. 등방성손상의 발전은 수직방향 손상의 평균치에 비례하여 이방성손상의 발전은 손상의 유효응력의 주축방향 성분에 비례하는 것으로 간주하면 (4.21)식은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$-\dot{\Omega} = V_n \dot{p} \quad (4.22)$$

여기서,

$$\begin{aligned} V_n &= C_1(1 - \beta_1 \Omega_m) \langle \tilde{\sigma}_m \rangle I \\ &+ C_2 \sum_{i=1}^3 (1 - \beta_2 \Omega_{v^{(i)}}) \langle \tilde{\sigma}_i^D \rangle (v^{(i)} \otimes v^{(i)}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

C₁, C₂, β₁, β₂ : 재료상수

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &= 1 & a > 0 \text{일때} \\ &= 0 & a \leq 0 \text{일때} \end{aligned}$$

$$\Omega_m = (\Omega_{11} + \Omega_{22} + \Omega_{33}) / 3 \quad (4.24)$$

$$\tilde{\sigma}_m = (\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{\sigma}_{22} + \tilde{\sigma}_{33}) / 3 \quad (4.25)$$

$\tilde{\sigma}_i$: 주축방향의 유효응력

$v^{(i)}$: 유효응력 주축방향의 방향여현 벡터

$$\tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}_i - \tilde{\sigma}_m \quad (4.26)$$

$$\Omega_{v^{(i)}} = v^{(i)} \cdot \Omega \cdot v^{(i)} \quad (4.27)$$

(4.23)식의 우변 첫째항은 등방성 손상, 두번째항은 유효응력의 주축방향으로 발전되는 이방성손상을 의미한다.

4.4 응력-변형도의 증분을 관계식

소성변형 및 손상이 발전되기 위해서는 항복함수 f가 다음의 조건들을 만족해야 한다.

$$f(\tilde{\sigma}, \tilde{\alpha}, R) = 0 \quad (4.28)$$

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} \dot{\tilde{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{\alpha}} \dot{\tilde{\alpha}} + \frac{\partial f}{\partial R} \dot{R} = 0 \quad (4.29)$$

(4.16) - (4.19)식으로부터 (4.29)식은 다음과 같이 변환된다.

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} \dot{\tilde{\sigma}} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{\alpha}} \dot{\tilde{\alpha}} - \frac{\partial R}{\partial p} \dot{p} = 0 \quad (4.30)$$

(4.30)식을 일관조건(consistency condition)이라고 하며 $\dot{p} (= \dot{\lambda})$ 는 식으로부터 구해진다.

$$\dot{p} = \dot{\lambda} = \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} \dot{\tilde{\sigma}} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{\alpha}} \dot{\tilde{\alpha}} \right) / \frac{\partial R}{\partial p} \quad (4.31)$$

여기서, 유효변형을 $\dot{\tilde{\epsilon}}_p$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$\dot{\tilde{\epsilon}} = \dot{\tilde{\epsilon}}_e + \dot{\tilde{\epsilon}}_p \quad (4.32)$$

(4.9)식의 양변을 시간에 대해서 미분한 다음 (4.19.b) (432)식을 대입하면 다음과 같이 변환되며

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\sigma}} &= C_e : \dot{\tilde{\epsilon}} \\ &= C_e : \dot{\tilde{\epsilon}} - C_e : \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} \dot{p} \end{aligned} \quad (4.33)$$

(4.33)식의 양변에 $\frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}}$ 를 전승하면 (4.34)식이 도출된다.

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} : \dot{\tilde{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} : C_e : \dot{\tilde{\epsilon}} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} : C_e : \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} \dot{p} \quad (4.34)$$

또한, (4.30)의 일관조건에 (4.34)식을 대입하면

$$\frac{\partial R}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} : C_e : \dot{\tilde{\epsilon}} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} : \dot{\tilde{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} : C_e : \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} \dot{p} \quad (4.35)$$

와 같이 쓸 수 있다. 여기서, 등방경화율 H'_I 와 이동경화율 H'_K 를 다음과 같이 정의한다.

$$\frac{\partial R}{\partial p} \dot{p} = H'_I \dot{p}, \quad \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} \dot{\tilde{\alpha}} = H'_K \dot{p} \quad (4.36)$$

(4.36)식을 (4.35)식에 대입하여 정리하면 (4.37)식이 도출되며

$$\dot{p} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} : C_e : \dot{\tilde{\epsilon}}}{[H'_I + H'_K + \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} : C_e : \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}}]} \quad (4.37)$$

(4.33)식에 (4.37)식을 대입하면 유효응력 및 유효변형도 증분율간의 관계식이 다음식과 같이 정리된다.

$$\dot{\tilde{\sigma}} = [C_e - \frac{(C_e : \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}}) \otimes (\frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} : C_e)}{[H'_I + H'_K + \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} : C_e : \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}}]}] = C_{ep} : \dot{\tilde{\epsilon}} \quad (4.38)$$

(4.31)식에 (4.10) (4.20)식을 대입하면 다음식이 도출되며

$$\dot{\tilde{\epsilon}} = \frac{\partial \Phi^{-T}}{\partial \Omega} : \epsilon_e : \dot{\Omega} + \Phi^{-T} : \dot{\epsilon} \quad (4.39)$$

(4.38)식에 (4.39)식을 대입하여 정리하면 응력-변형도-손상의 증분율에 대한 관계식이 최종적으로 다음과 같이 유도된다.

$$\dot{\sigma} = \tilde{C}_{ep} : \dot{\epsilon} - C_d : \dot{\Omega} \quad (4.40)$$

여기서

$$\tilde{C}_{ep} = \Phi^{-1} : C_{ep} : \Phi^{-T} \quad (4.41)$$

$$C_d = (\tilde{C}_{ep} : \frac{\partial \Phi}{\partial \Omega} : C_e^{-1} - \frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial \Omega}) \tilde{\sigma} \quad (4.42)$$

5. 수치계산

5.1 재료상수의 결정

Chow and Wang[4.5]은 알루미늄 합금 2024-T3의 인장시험을 수행하여 손상이 연성재료의 소성거동에 미치는 영향을 고찰하였다. 실험과정은 Fig 5.1에서 보는 바와 같이 부하(load)와 제하(unloading)과정을 반복하면서 겉보기 탄성계수를 측정하여 손상

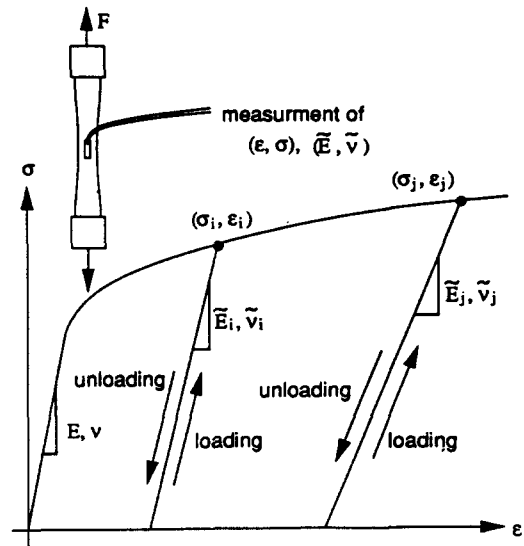


Fig.5.1 Measurement process of anisotropic damage

의 발전을 추정한다. 손상의 이방성을 충분히 관찰하기 위해서는 다축방향 하중실험을 수행해야 할 필요성이 있으나, 여러가지 실험상의 어려운 제약조건들 때문에 겉보기 Poisson 비의 변화를 함께 측정하여 다음과 같은 과정을 거쳐 이방성 손상 관련 계수들을 결정한다. 단축인장 응력상태에서는 $\sigma_{22}=\sigma_{33}=\sigma_{12}=\sigma_{23}=\sigma_{31}=0$, $\epsilon_{12}=\epsilon_{23}=\epsilon_{32}=\epsilon_{12}0$, $\Omega_{12}=\Omega_{23}=\Omega_{31}=0$ 이므로 (4.9) (4.10) (4.2)식들로부터 다음과 같은 관계식이 성립함을 알 수 있다.

$$\epsilon_{11}^e = \frac{\sigma_{11}}{E(1-\Omega_{11})^2} = \frac{\sigma_{11}}{\tilde{E}} \quad (5.1.a)$$

$$\epsilon_{22}^e = \frac{\nu\sigma_{11}}{E(1-\Omega_{11})(1-\Omega_{22})} = \frac{\tilde{\nu}_{12}}{\tilde{E}} \sigma_{11} \quad (5.1.b)$$

$$\epsilon_{33}^e = \frac{\nu\sigma_{11}}{E(1-\Omega_{11})(1-\Omega_{33})} = \frac{\tilde{\nu}_{13}}{\tilde{E}} \sigma_{11} \quad (5.1.c)$$

여기서, 겉보기 탄성계수 \tilde{E} 및 겉보기 Poisson 비 $\tilde{\nu}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{E} = E(1-\Omega_{11})^2 \quad (5.2.a)$$

$$\tilde{\nu}_{12} = \nu(1-\Omega_{11}) / (1-\Omega_{22}) \quad (5.2.b)$$

$$\tilde{\nu}_{13} = \nu(1-\Omega_{11}) / (1-\Omega_{33}) \quad (5.2.c)$$

(5.2)식으로부터 각 변형단계에서의 이방성손상 Ω 는 다음과 같이 계산된다.

$$\Omega_{11} = 1 - (\tilde{E} / E)^{1/2} \quad (5.3.a)$$

$$\Omega_{22} = 1 - (1-\Omega_{11})\nu / \tilde{\nu}_{12} \quad (5.3.b)$$

$$\Omega_{33} = 1 - (1-\Omega_{11})\nu / \tilde{\nu}_{13} \quad (5.3.c)$$

단축인장 문제에 있어서는 $\epsilon_{22}=\epsilon_{33}$ 이므로 결국 ($\tilde{\nu}_{12}=\tilde{\nu}_{13}$, $\Omega_{22}=\Omega_{33}$)으로 귀착된다.

Chow and Wang[4]은 단축인장 시험시 Fig.5.2, Fig.5.3과 같은 겉보기 탄성계수 및 Poisson비의 변화를 계측, 제시하고 있으며 이 계측결과를 바탕으로 하여 (5.3)식으로 부터 계산된 손상변수의 변화를 Fig.5.4에 도시하였다. 또한 유효응력과 유효변형도 간의 관계를 Fig.5.5에 도시하였다. Fig.5.4의 점들을

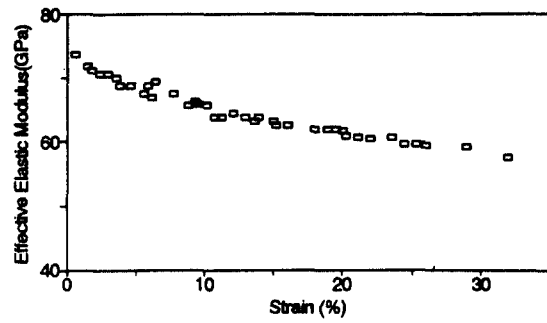


Fig.5.2 Variation of effective elastic modulus

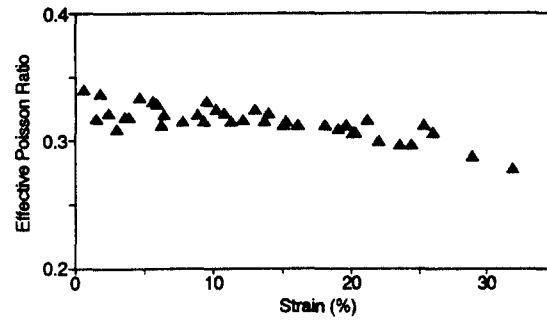


Fig.5.3 Variation of effective Poisson's ratio

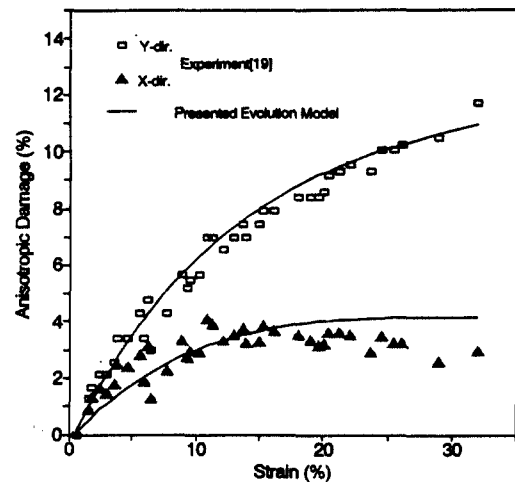


Fig.5.4 Measured anisotropic damages and proposed evolution curves

fitting함으로써 (4.23)식의 손상발전식과 관련된 재료상수 C_1 , C_2 , β_1 , β_2 값을 결정하였으며 Fig.5.5로부터 (4.18)식의 등방경화 관련계수 σ_y , c , n 값들이 Table 5.1과 같이 결정된다. 이때 역전하중이 작용하는 경우가 아니므로 이동경화는 고려하지 않았다.

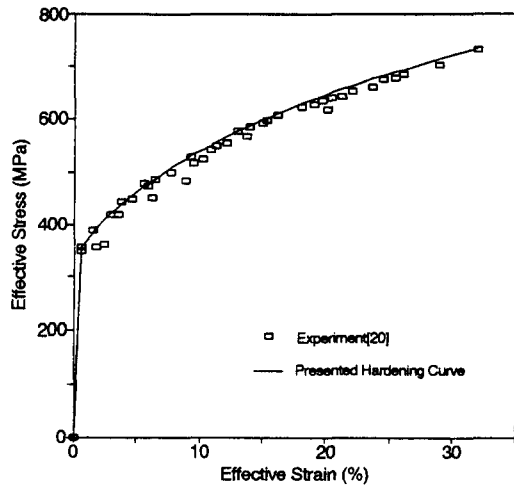


Fig.5.5 Relation between effective stress and strain; measured data and fitted hardening curve

Table 5.1 Material constants for plastic-damage analysis

Material properties		Value
Elastic modulus	E	73600 Mpa
Poisson's ratio	ν	0.35
Yield stress	σ_y	350 Mpa
Isotropic hardening parameters		
	c	34
	n	0.3
Damage evolution parameters		
	C_1	0.45
	C_2	0.5
	β_1	7
	β_2	16

Fig.5.4, Fig.5.5에서 실선으로 표현된 선은 바로 이러한 재료상수들을 이용하여 fitting한 현상학적 모형을 의미한다.

5.2 구성방정식의 검증

최종적으로 (4.40)식과 같이 유도된 탄소성-손상 구성방정식의 타당성을 검증하기 위하여 Fig.5.6과 같은 평면응력 단축인장 상태에 대한 응력해석을 수행하여 손상의 발전과정 및 유효응력-유효변형도 관계를 계산한 다음 Fig.5.7, Fig.5.8에서 비교, 검토하였다. 구성방정식의 현상학적 모델과 응력해석의 결과가 서로 잘 일치하고 있다는 것을 확인할 수 있다. Fig.5.8에서 직접비교가 가능한 경화곡선과 유효응력은 2% 이내의 오차범위로 일치하고 있으며 손상의 영향을 고려하지 않은 Cauchy응력은 이보다 약

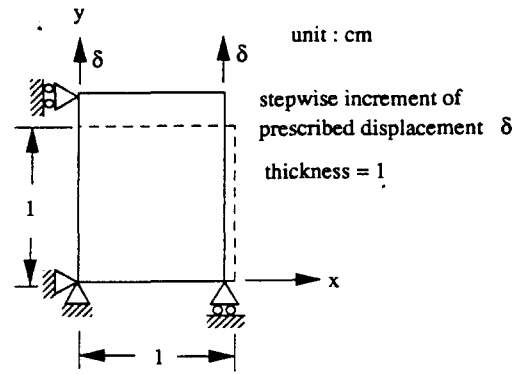


Fig.5.6 Uni-axial tension of a plane stress element

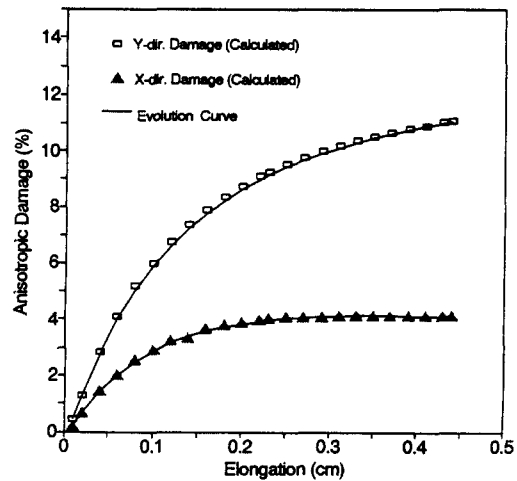


Fig.5.7 Calculated anisotropic damages

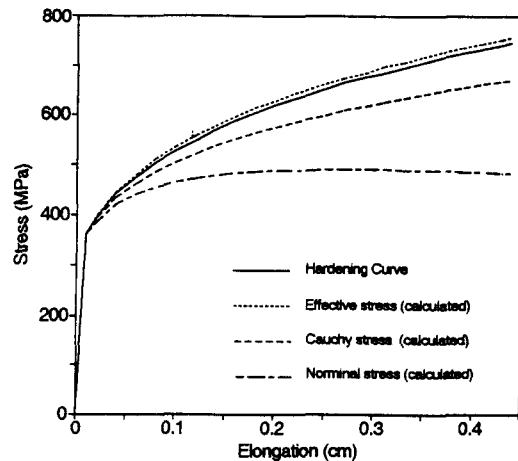


Fig.5.8 Calculated stress-displacement curves

0-10% 작은 값을 보이고 있다. 변형에 의한 단면적의 감소를 고려하지 않은 공칭응력은 인장변위 δ 가 약 0.2cm 정도에서 최대값을 보인 이후 점점 감소되고 있다. 이것은 이점 부근에서 변위증분에 대하여 반력이 감소되는 불안정 현상 즉, necking(necking)이 발생된다는 사실을 암시하고 있다.

6. 결 언

재료내부에서 발생하는 미시적 조직변화를 비가역적 에너지 소산과정으로 간주하여 재료자체의 손상을 소상변형, 온도등과 함께 일종의 내부상태변수로 두고 열역학적인 정식화 과정에 따라 구성방정식을 유도하였다.

본 연구에서 제안된 소성-손상 구성방정식은 재료의 손상이라는 새로운 정보를 제공할 뿐만 아니라 실험결과와도 잘 일치함을 확인 할 수 있었다. 차후 실험분야의 연구, 유한요소법과의 결합, 복잡구조물 해석에의 적용등에 관한 보충연구가 이루어진다면 구조물의 모든 비선형거동 및 재료손상을 좀 더 합리적으로 평가 할 수 있는 수치모형이 개발될 수 있을 것이다.

7. 후 기

본 연구는 과학기술처의 기본연구사업으로 수행된 연구결과의 일부입니다. 아울러 연구진행 과정에서 여러가지 자료제공과 조언을 아끼지 않은 해양대 최경식 교수께 감사드립니다.

참 고 문 헌

- [1] Malvern, L.E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. 1969.
- [2] Coleman, B.D., and Gurtin, M.E., "Thermodynamics with Internal State Variables," *Journal of Chemical Physics*, Vol.47, pp.597-613. 1967.
- [3] Kachanov, L.M., "Time of the Rupture Process under Creep Conditions," *Izv. AN SSSR., Otd. Tekh. Nauk.*, No.8, pp.26-31. (in Russian) 1958.
- [4] Bodner, S.R., and Partom, Y., "Constitutive Equations for Elastic-Viscoplastic Strain-Hardening Materials," *Journal of Applied Mechanics Vol.42*, pp.385-389. 1975.
- [5] Vakulenko, A.A., and Kachanov, M.L., 1971, "Continual Theory of a Medium with Cracks," *Izv. AN SSR., Mekhanika Tverdogo Tela*, Vol.6, pp.159-166. (Mechanics of Solids, pp.145-151, translated from Russian)
- [6] Davison, L., and Stevens, A.L., "Thermomechanical Constitution of Spalling Elastic Bodies," *Journal of Applied Physics*, Vol.44, pp.668-674. 1973.
- [7] Murakami, S., and Ohno, N., "A Continuum Theory of Creep and Creep Damage," *3rd IUTAM Symposium on Creep in Structures*, eds., A.R.S. Ponter and D.R.Hayhurst, Springer-Verlag, pp.422-444. 1981.
- [8] Betten, J., "Damage Tensor in Continuum Mechanics," *147th European Mechanics Colloquium on Damage Mechanics*, Cachan, France, ed., J. Lemaitre. 1981.
- [9] Nemat-Nasser, S., "Decomposition of Strain Measures and Their Rates in Finite Deformation Elastoplasticity," *International Journal of Solids and Structures*, Vol.15, pp.155-166. 1979.
- [10] Guo, Z.H., "A Note on the Decomposition of Elastoplastic Finite Deformations," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 17, pp.925-927. 1981.
- [11] Lemaitre, J., "How to use Damage Mechanics" *Nuclear Engineering and Design*, Vol.80, pp.233-245. 1984.
- [12] Lemaitre, J., "A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture," *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol.107, pp.83-89. 1985.
- [13] Lemaitre, J. and Chaboche, J.L., *Mechanics of Solid Material*, Cambridge University Press. 1990.
- [14] Kim, S.J., and Oden, J.T., "A Note on the Numerical Analysis of Material Damage based on the Theory of Materials of Type-N" *Computers and Mathematics with*

- Applications*, Vol.15, No.3, pp.169-174. 1988.
- [15] Choi, K., "A Damage Mechanics Approach to the Three Dimensional Constitutive Modelling of Ice Deformation," Ph.D. Thesis, I.T.. 1989.
- [16] Krajcinovic, D., "Continuous Damage Mechanics Revisited: Basic Concepts and Definitions," *Journal of Applied Mechanics*, Vol.52, pp.829-834. 1985.
- [17] Cordebois, J.P., and Sidoroff, F., "Damage Induced Elastic Anisotropy," *Proceedings of the 115th European Mechanics Colloquium on Mechanical Behavior of Anisotropic Solids*, ed., J.P. Boehler, pp.761-774. 1979.
- [18] Sidoroff, F., "Description of Anisotropic Damage Application to Elasticity," *IUTAM Symposium on Physical Nonlinearities in Structural Analysis*, ed., J.Hult, pp.237-244. 1981.
- [19] Chow, C.L., and Wang, J., "An Anisotropic Theory of Continuum Damage Mechanics for Ductile Fracture," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.27, pp.547-558. 1987.
- [20] Chow, C.L., and Wang, J., "A Finite Element Analysis of Continuum Damage Mechanics for Ductile Fracture", *International Journal of Fracture*, Vol.38, pp.3-16. 1988.