論 文

大 韓 造 船 學 會 論 文 集
第 29 卷 第 2 號 1992年 5月
Transactions of the Society of
Naval Architects of Korea
Vol. 29, No. 2, May 1992

대변위 및 대회전을 고려한 만곡된 쉘의 기하학적 비선형 해석

이재욱*, 양영태*

A Geometrically Nonlinear Analysis of the Curved Shell Considering Large Displacements and Large Rotation Increments

by

Jae Wook Lee* and Young Tae Yang*

요 약

기하학적 비선형 해석과정에서 일반적인 방법으로는 연속적인 하중증분단계의 기하학적 변위증분에서 절점회전이 미소하다는 가정에 의해 제한되어 접선강성행렬을 유도하고 유한회전의 영향을 증분평형 방정식의 반복계산하는 과정에서 고려하는 방법이 사용되고 있다. 그리고 개선된 방법으로는 미소회전 증분의 가정을 무시하고 유한회전증분의 영향을 고려하여 접선강성행렬을 유도하는 방법이 Surana, Onate 및 Dvorkin 등에 의해서 개발되었다.

유한 회전을 고려하는 방법에서 Surana는 비선형 절점 회전함수를 가정하여 강성메트릭스를 유도하였으며 Onate와 Dvorkin은 전체좌표에서 회전각에 대한 회전행렬의 2차항까지를 고려한 강성메트릭스를 유도하였다.

본 논문에서는 유한요소의 기하학적 위치를 나타내는 변위함수의 방향 벡터를 삼각함수로 표현하여 연속적인 하중증분 사이의 방향벡터 증분을 Tayler의 급수로 2차항까지 전개하므로써 비선형 회전 증분을 고려한 쉘 요소를 개발하였다.

기하학적 비선형 해석과정은 연속체 운동의 증분이론을 도입하여 Total Lagrange(T.L.)수식과 Updated Lagrange(U.L.)수식으로 비선형 거동을 해석하였다.

Abstract

This paper presents geometrically nonlinear formulation of shell problems using the three-dimensional curved shell element, which includs large displacements and large rotations.

Formulations of the geometrically nonlinear problems can be derived in a variety of ways, but most of them have been obtained by assuming that nodal rotations are small. Hence, the tangent stiffness

발표 : 1991년도 대한조선학회 추계연구발표회('91. 11. 16.)
접수일자 : 1992년 1월 23일, 재접수일자 : 1992년 3월 16일
*정회원, 인하대학교 선박해양공학과

matrix is derived under the assumptions that rotational increments are infinitesimal and the effect of finite rotational increments have to be considered during the equilibrium iterations.

To study the large displacement and large rotation problems, the restrictions are removed and the formulations of the curved shell element including the effect of large rotational increments are developed in this paper.

The displacement based finite element method using this improved formulation are applied to the analyses of the geometrically nonlinear behaviors of the single and double curved shells, which are compared with the results by others.

1. 서 론

선박 해양구조물의 대형화 및 경량화 추세에 의해 제기되고 있는 좌굴문제에서는 편심보강된 평판 구조의 안정성을 정량적으로 평가하기 위해 기하학적 대변형의 효과를 고려하는 비선형 좌굴해석의 정밀해가 요구되며, 구조물이 수용할 수 있는 하중의 능력을 보다 정확하게 평가하기 위해서는 좌굴 후의 거동인 기하학적 비선형 및 재료의 비선형 특성에 대한 연구가 이루어져야 한다.

구조물의 비선형 좌굴해석 및 좌굴 이후의 거동을 다루기 위해서는 좌굴 이후의 구조물 형상이 만곡된 형상을 유지하기 때문에 쉘 요소의 사용이 요구된다. 또한 유조선의 이중 선각구조에서 좌굴 및 충돌시 구조물의 하중 수용능력을 평가하기 위해서도 비선형 거동에 대한 연구가 필요하며 구조물의 동적안정성(dynamic stability) 및 접촉문제(contact problem)에 있어서도 이러한 비선형을 고려하는 쉘 요소의 개발이 요구된다.

쉘 구조의 구조해석에서 유한요소 해석방법이 20년 넘게 적용되고 있으며 접근방법에는 세가지 방법이 있다.

첫번째 방법에는 판 굽힘요소에 membrane 강성을 중첩시켜 사용하는 평면사각형 요소와 삼각형 요소이며 두번째 방법은 Kirchhoff-Love의 가정을 사용한 쉘 이론에 근거를 두고 유한요소를 정식화한 요소이다. 그리고 세번째 방법은 3차원 고체요소(solid element)에 격하개념(dgenerated concept)을 도입하여 연속체의 기하학적 운동을 reference surface 운동으로 격하시킨 요소이다. 첫번째 방법은 만곡된 형상 및 처짐을 근사적으로 표현하기 위해서는 요소 수의 증가가 필요하며 두번째 방법은 쉘 이론을 유한요소에 적용하기가 복잡하다는 문제가 있으므로 본 논문에서 쉘 이론의 복잡성을 피하고 쉘 거동을 근사적으로 나타낼 수 있는 3차 보간함수를 사용한 격하요소(degenerated element)를 사용하였다. 격하개념은 Ahmad[1]에 의해서 처음 소개 되었으며 두꺼운 쉘의 선형해석에서 회전과 처짐의 자유도가 독립된 등계수요소(isoparametric element)를 사용하여 쉘의 거동을 나타내는데 사용하였다. 그 후 격하개념은 여러종류의 요소를 유도하기 위해 적용되었으며 기하학적 비선형 및 재료의 비선형에 적용되었다[1-11].

격하요소를 이용한 비선형해석에서 Bathe, Ramm, Zienkiewicz, Owen, Hinton 등은 쉘 및 보 요소의 기하학적 변위증분을 연속적인 하중 증분단계에서 절점의 회전이 미소하다는 가정에 의해 제한되어 정식화하였다[1-11]. 따라서 이러한 요소의 접선 강성메트릭스는 회전 증분량을 선형화하여 유도되며 유한 회전증분의 영향은 증분평형식의 반복계산 과정에서 고려하게 된다.

개선된 방법으로 앞에서 언급된 격하요소의 제한조건인 미소 회전증분량의 가정을 무시하고 유한 회전증분의 영향을 고려한 격하요소의 정식화는 Surana, Onate 및 Dvorkin 등에 의해서 개발되었다[12,13].

유한 회전을 고려하는 방법에서 Surana는 비선형 절점 회전함수(nonlinear nodal rotation function)를 가정하여 강성메트릭스를 유도하였으며 Onate와 Dvorkin은 전체좌표에서 회전각에 대한 Argyris[14]의 회전행렬(rotation matrix)의 관계식을 이용하여 회전행렬의 2차항까지를 고려한 강성메트릭스를 유도하였다.

본 논문에서는 유한요소의 기하학적 위치를 나타내는 변위함수의 방향벡터를 삼각함수로 표현하여 연속적인 하중증분 사이의 방향벡터 증분을 Tayor의 급수로 2차항까지 전개하므로써 비선형 회전 증분을 고려한 쉘 요소를 개발하였다.

기하학적 비선형 해석과정은 연속체 운동의 증분이론을 도입하여 Total Lagrange(T.L.)수식과 Updated Lagrange(U.L.)수식으로 비선형 거동을 해석하였다.

2. 비선형 해석이론

연속체의 운동은 시간(time) 0, 시간 t, 시간 t+dt

에 따라 기하학적 위치가 변하는 연속체 내의 임의 절점 P를 사용해서 Fig. 1과 같이 직교좌표계에 나타낼 수 있다. 연속체 운동의 초기상태는 절점 P를 사용해서 ${}^0X_i$(i=1, 2, 3) 좌표계에 나타내며 임의 변형상태와 다음 단계는 ${}^tX_i$, ${}^{t+dt}X_i$ 좌표계에 나타낸다.

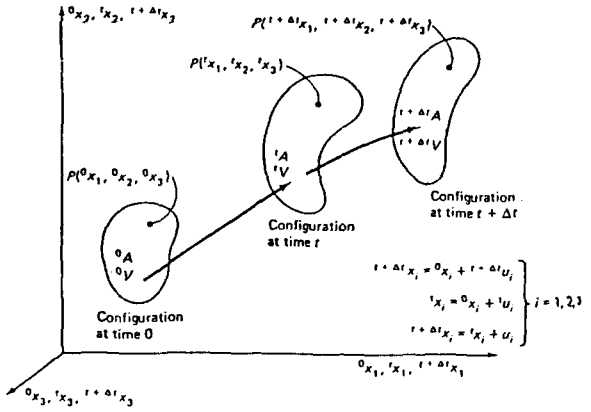


Fig. 1 Motion of body in stationary cartesian coordinate system

여기서 왼쪽 상첨자(0,t,t+dt)는 연속체 형상을 나타내는 시간으로 하중단계를 표시하며 오른쪽 하첨자(i)는 좌표축을 나타낸다. 따라서 본 논문에서 언급하고 있는 시간은 단계하중이 작용하는 연속체의 형상을 구분하기 위해 정의된 용어이다.

연속체의 운동에 대한 기하학적 위치의 거동이 Fig.1에 정의된 것처럼 시간 t, 시간 t+dt상태의 연속체 변위 ${}^tU_i$, ${}^{t+dt}U_i$와 두 단계의 연속체 변위증분 U_i는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} {}^{t+dt}X_i &= {}^tX_i + U_i \\ &= {}^0X_i + {}^tU_i + U_i \\ &= {}^0X_i + {}^{t+dt}U_i \end{aligned} \tag{1}$$

$$U_i = {}^{t+dt}U_i - {}^tU_i \tag{2}$$

또한 연속체의 지배방정식에 나타나는 임의 시간에서 변위와 좌표계의 편미분은 시간에 따라 구분하여 다음과 같이 표현한다.

$${}^{t+dt}_mU_{i,j} = \frac{\partial^{t+dt}U_i}{\partial {}^mX_j} \qquad {}^{t+dt}_mX_{i,j} = \frac{\partial {}^mX_i}{\partial {}^{t+dt}X_j} \tag{3}$$

연속체에 변형이 일어나면 변형 전, 변형 후 상태에서 절점 P는 상대적 위치변화가 발생하므로 변위, 변위증분 및 좌표계의 편미분을 사용하여 시간 m의 연속체 형상을 기준으로 계산된 시간 t+dt상태의 Green-Lagrange strain tensor를 표현하면 다음과 같다.

$${}^{t+dt}_m\varepsilon_{ij} = 1/2\left[{}^{t+dt}_mU_{i,j} + {}^{t+dt}_mU_{j,i} + {}^{t+dt}_mU_{k,i}\,{}^{t+dt}_mU_{k,j}\right] \tag{4}$$

시간 t+dt상태의 Green-Lagrange strain tensor는 시간 t+dt상태의 연속체 형상을 모르기 때문에 시간 t상태를 기준으로 변형도와 변형도 증분을 분리하여 표시하면 다음과 같다.

$${}^{t+dt}_m\varepsilon_{ij} = {}^t_m\varepsilon_{ij} + {}_m\varepsilon_{ij} \tag{5}$$

여기서 ${}_m\varepsilon_{ij}$는 변형도의 선형 증분량 ${}_me_{ij}$와 비선형 증분량 ${}_m\eta_{ij}$로 구분할 수 있다.

$${}_m\varepsilon_{ij} = {}_me_{ij} + {}_m\eta_{ij} \tag{6}$$

$${}_me_{ij} = 1/2\left[{}_mU_{i,j} + {}_mU_{j,i} + \underline{{}^t_mU_{k,i}\,{}_mU_{k,j} + {}_mU_{k,i}\,{}^t_mU_{k,j}}\right] \tag{7}$$

$${}_m\eta_{ij} = \tfrac{1}{2}\,{}_mU_{k,i}\,{}_mU_{k,j} \tag{8}$$

식(7)에서 임의 변형상태인 시간 t를 기준으로 계산하는 U.L.수식을 사용하면 밑줄친 부분은 0이 되며 초기상태를 기준으로 계산되는 T.L.수식에서는 시간 m이 시간 0상태를 나타낸다.

가상변위의 원리를 적용하여 시간 t+dt상태의 연속체 평형상태를 시간 m을 기준으로 표시하면 다음과 같이 표현된다.

$$\int_{mV} {}^{t+dt}_mS_{ij}\ \delta\,{}^{t+dt}_m\varepsilon_{ij}\ {}^mdV = \delta\,{}^{t+dt}W_e \tag{9}$$

time m = 0 : T.L. (Total Lagrange formulation)
m=t : U.L.(Updated Lagrange formulation)

여기서 ${}^{t+dt}_mS_{ij}$는 시간 m을 기준으로 계산된 시간 t+dt상태의 2nd Piola-Kirochhoff응력이며 시간 t+dt상태를 모르기 때문에 시간 t상태의 응력과 응력증분으로 분리하여 표시하면 다음과 같다. 또한 식(5)에 변분을 취하여 선형 및 비선형 변형도 증분으로 분리하면 다음과 같다.

$${}^{t+dt}_mS_{ij} = {}^t_mS_{ij} + {}_mS_{ij} \quad ({}^t_tS_{ij} = {}^t\tau_{ij}) \tag{10}$$

$$\delta\,{}^{t+dt}_m\varepsilon_{ij} = \delta_me_{ij} + \delta_m\eta_{ij} \tag{11}$$

식(10), (11)을 식(9)에 대입하면 다음과 같다.

$$\int_{mV}\left[{}^t_mS_{ij}(\delta_me_{ij} + \delta_m\eta_{ij}) + {}_mS_{ij}(\delta_me_{ij} + \delta_m\eta_{ij})\right]{}^mdV$$

$$= \delta^{t+dt}W_e \tag{12}$$

time t상태의 2차 Piola Kirchhoff응력 증분과 Green-Larange변형도 증분의 관계식은 식(13)으로 표시되며 식(12)에 대입하여 연속체의 비선형평형 방정식을 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} {}_mS_{ij} &= {}_mC_{ijrs}\ {}_m\varepsilon_{rs} \\ &= {}_mC_{ijrs}\ ({}_me_{rs} + {}_m\eta_{rs}) \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \int_{mV} \Big[& {}_mC_{ijrs}\ {}_me_{rs}\ \delta_me_{ij} + {}^t_mS_{ij}\ \delta_me_{ij} + {}^t_mS_{ij}\ \delta_m\eta_{ij} \\ & + \underline{({}_mC_{ijrs}\ {}_me_{rs}\ \delta_m\eta_{ij} + {}_mC_{ijrs}\ {}_m\eta_{rs}\ \delta_me_{ij}} \\ & + \underline{\tfrac{1}{4}{}_mC_{ijrs}\ {}_m\eta_{rs}\ \delta_m\eta_{ij})} \Big]\ {}^mdV = \delta^{t+dt}W_e \end{aligned} \tag{14}$$

식(14)에서 밑줄친 부분의 고차항(higher order term)은 무시하여 시간 t+dt상태의 연속체 비선형 평형방정식을 표시하면 식(15)로 표현된다.

$$\begin{aligned} \int_{mV} & \Big[{}_mC_{ijrs}\ {}_me_{rs}\ \delta_me_{ij} + {}^t_mS_{ij}\ \delta_me_{ij} + {}^t_mS_{ij}\ \delta_m\eta_{ij} \Big]\ {}^mdV \\ & = \delta^{t+dt}W_e \end{aligned} \tag{15}$$

3. 격하 쉘요소의 증분 평형식

시간에 따라 변하는 격하 쉘요소의 거동에서 시간 t와 시간 t+dt상태 사이의 요소형상에 대한 변위증분을 구하면 식(16), (17)과 같다[1-11].

$$U_i = \sum_{k=1}^{N} h^k(r,s)\ U_i^k + t/2 \sum_{k=1}^{N} a^k\ h^k(r,s)\ V_{ni}^k \tag{16}$$

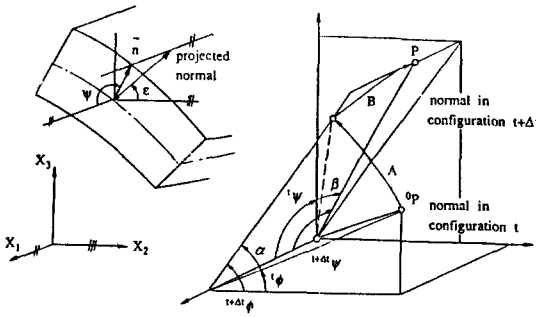
$$V_{ni}^k = {}^{t+dt}V_{ni}^k - {}^tV_{ni}^k \tag{17}$$

식(17)에서 시간 t와 t+dt에 따라 변하는 수직방향 벡터와 회전각의 관계는 Fig.2에 도시한 바와 같이 좌표축 X1,X2와 수직방향벡터와의 회전각 ${}^t\psi^k$, ${}^t\phi^k$와 회전증분 α^k, β^k로 나타내며 식(18), (19)로 표현한다.

$$\begin{aligned} {}^{t+dt}\psi^k &= {}^t\psi^k + \beta^k \\ {}^{t+dt}\phi^k &= {}^t\phi^k + \alpha^k \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} V_{n1}^k \\ V_{n2}^k \\ V_{n3}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}^{t+dt}\psi^k & - & \mathrm{Cos}^t\psi^k \\ \mathrm{Sin}^{t+dt}\psi^k\,\mathrm{Cos}^{t+dt}\phi^k & - & \mathrm{Sin}^t\psi^k\,\mathrm{Cos}^t\phi^k \\ \mathrm{Sin}^{t+dt}\psi^k\,\mathrm{Sin}^{t+dt}\phi^k & - & \mathrm{Sin}^t\psi^k\,\mathrm{Sin}^t\phi^k \end{bmatrix} \tag{19}$$

여기서 시간 t+dt상태의 변위는 증분이론에 의해 시간 t상태의 변위와 시간 t와 t+dt사이의 변위증분 U로 표시되며 이것을 Talyor 급수로 2차까지 전개하면 변위증분은 1차 선형항 a(U^K, V^K, W^K, α^K, β^K)와 2차 회전항 a_R ($1/2(\alpha^k)^2$, $1/2(\beta^k)^2$, $\alpha^k\beta^k$)으로 구분하여 표현된다.



a) Independent angles b) Change of angles

Fig. 2 Rotation of the direction cosines of $\vec{V}_n$ "normal" to the shell mid-surface

$$\begin{aligned} {}^{t+dt}U &= {}^tU + U \\ &\cong {}^tU + {}^t\left[\frac{\partial U}{\partial a}\right]a + {}^t\left[\frac{\partial}{\partial a}\right]{}^t\left[\frac{\partial U}{\partial a}\right]\frac{a^2}{2!} \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} U &= {}^t\left[\frac{\partial U}{\partial a}\right]a + {}^t\left[\frac{\partial}{\partial a}\right]{}^t\left[\frac{\partial U}{\partial a}\right]a_R \\ &= U_L + U_R \end{aligned} \tag{21}$$

$$U_{Li} = \sum_{k=1}^{N} h^k(r,s)\ U_i^k + t/2 \sum_{k=1}^{N} a^k\ h^k(r,s)\ [{}^tF_{i1}^k\ {}^tF_{i2}^k] \begin{bmatrix} \alpha^k \\ \beta^k \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$U_{Ri} = t/2 \sum_{k=1}^{N} a^k\ h^k(r,s)\ [{}^tG_{i1}^k\ {}^tG_{i2}^k\ {}^tG_{i3}^k] \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}(\alpha^k)^2 \\ \tfrac{1}{2}(\beta^k)^2 \\ \alpha^k\beta^k \end{bmatrix} \tag{23}$$

변위증분 식(22), (23)으로 변형도-변위 관계식을 나타내기 위하여 국부곡선좌표계(r_i = r,s,t)에 대한 편미분을 1차 선형항과 2차 회전항으로 분리하여 계산한 후, Jacobian 행렬을 사용, 전체좌표계에 대한 편미분값을 구하여 변형도 증분의 선형증분과 비선형증분을 나타낸다. 고차항을 무시하여 행렬형태로 표시하면 다음과 같다.

$${}_me_L = {}^t_mB_L\ a_L \tag{24}$$

$${}_me_R = {}^t_mB_R\ a_R \tag{25}$$

$${}_md = {}^t_mB_{NL}\ a_L \tag{26}$$

식(24), (25), (26)의 변분을 식(15)에 대입하여 유한회전을 고려한 시간 t+dt상태의 연속체 운동의 증분 평형식을 나타낸다.

$$\int_{mV} \left[{}^{t}_{m}B_{L}^{T}\, {}_{m}C\, {}^{t}_{m}B_{L} + {}^{t}_{m}B_{NL}^{T}\, {}^{t}_{m}S\, {}^{t}_{m}B_{NL} + {}^{t}_{m}B_{R}^{T}\, {}^{t}_{m}S \right]^{m} dV\ a$$

$$= {}^{t+dt}R - \int_{mV} {}^{t}_{m}B_{L}^{T}\, {}^{t}_{m}\hat{S}\, {}^{m}dV \qquad (27)$$

$${}^{t}_{m}K_{T}\ a = {}^{t+dt}R - {}^{t}_{m}F \qquad (28)$$

$${}^{t}_{m}K_{T} = \left[{}^{t}_{m}K_{L} + {}^{t}_{m}K_{NL} + {}^{t}_{m}K_{R} \right] \qquad (29)$$

여기서 사용된 행렬은 다음과 같다.

${}_{m}C$: 선형 재료 상수
${}^{t}_{m}B_{L}$: 선형 변형도-변위 행렬
${}^{t}_{m}B_{NL}$: 비선형 변형도-변위 행렬
${}^{t}_{m}B_{R}$: 2차 회전 변형도-변위 행렬
${}^{t}_{m}S$, ${}^{t}_{m}\hat{S}$: 2nd piola kirchhoff 응력텐서와 벡터
${}^{t}_{m}K_{L}$: 선형 강성 행렬
${}^{t}_{m}K_{NL}$: 비선형 강성 행렬
${}^{t}_{m}K_{R}$: 2차 회전 강성 행렬
${}^{t}_{m}K_{T}$: 접선 강성 행렬
a : 시간 t상태의 변위 증분 벡터
${}^{t+dt}R$: 시간 t+dt상태의 외력벡터
${}^{t}_{m}F$: 시간 m을 기준으로 계산된 시간 t상태의 내부절점 하중벡터

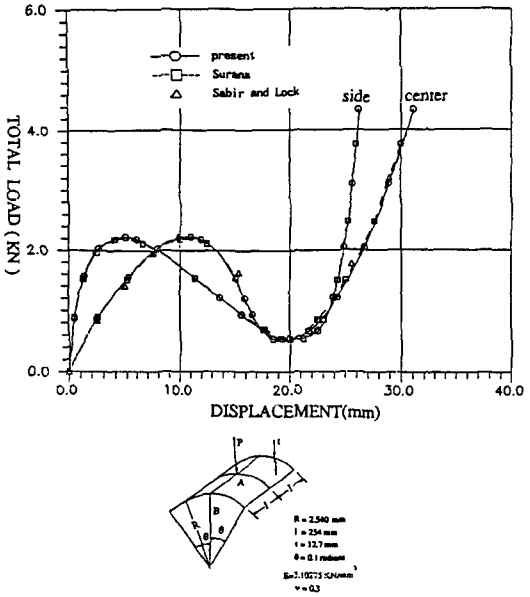


Fig. 3 Load-deflection curves of the cylindrical shell (ref.12, t=12.7)

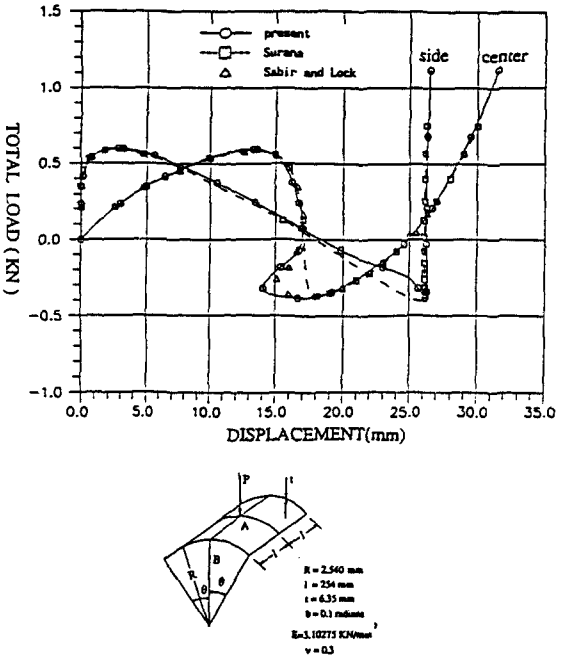


Fig. 4 Load-deflection curves of the cylindrical shell (ref.12, t=6.35)

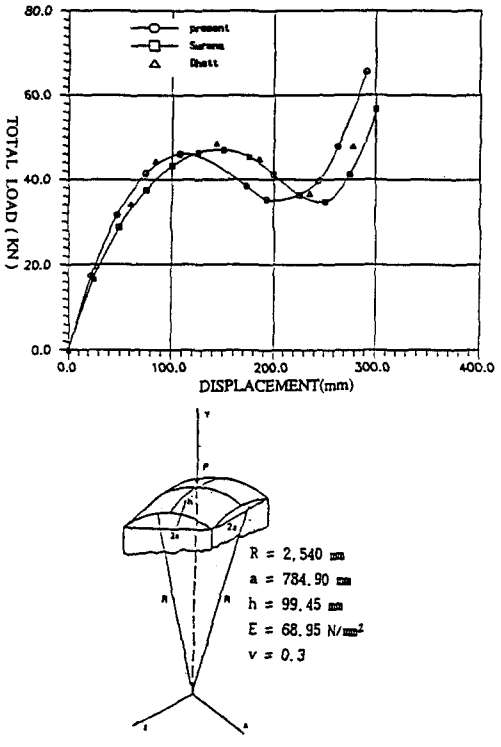


Fig. 5 Load-deflection curves of the spherical shell (ref.12, t=99.45)

Table 1 Load-deflection characteristics of hinged -end cylindrical shell

Case : Present approach(1.0KN) (t = 12.7 mm)

TOTAL LOAD(KN)	DISP.(CENTER)	DISP.(SIDE)	NO. OF ITERATION
0.864700E+00	-0.244346E+01	-0.536344E+00	3
0.156810E+01	-0.511630E+01	-0.134563E+01	3
0.204180E+01	-0.789127E+01	-0.259172E+01	3
0.222680E+01	-0.109945E+02	-0.488005E+01	4
0.218880E+01	-0.119495E+02	-0.591446E+01	2
0.123330E+01	-0.158351E+02	-0.136714E+02	3
0.960300E+00	-0.165523E+02	-0.155911E+02	2
0.549000E+00	-0.184870E+02	-0.193386E+02	3
0.671700E+00	-0.216902E+02	-0.224908E+02	3
0.122820E+01	-0.242779E+02	-0.239280E+02	2
0.205120E+01	-0.266800E+02	-0.248689E+02	2
0.309250E+01	-0.289398E+02	-0.255606E+02	2
0.433940E+01	-0.310998E+02	-0.261159E+02	2
		TOTAL ITERATION	32

Case : K. S. Surana [ref. 12]

TOTAL LOAD(KN)	DISP.(CENTER)	DISP.(SIDE)	NO. OF ITERATION
0.8859	-2.5	-0.5409	4
1.5186	-5.0	-1.2672	4
1.9619	-7.5	-2.3239	4
2.1848	-10.0	-3.9201	5
2.1207	-12.5	-6.5234	5
1.5584	-15.0	-11.3711	5
0.7071	-17.5	-17.7841	5
0.5500	-20.0	-21.1842	5
0.8613	-22.5	-23.0456	5
1.5118	-25.0	-24.2556	4
2.4757	-27.5	-25.1322	4
3.7578	-30.0	-25.8267	4
		TOTAL ITERATION:	54

Table 2 Load-deflection characteristics of hinged -end cylindrical shell

Case : Present approach(0.3KN) (t = 6.35 mm)

TOTAL LOAD(KN)	DISP.(CENTER)	DISP.(SIDE)	NO. OF ITERATION
0.2357700E+00	-0.2924230E+01	-0.007650E+01	2
0.4140000E+00	-0.6404240E+01	-0.134409E+00	3
0.5369400E+00	-0.9878180E+01	-0.806975E+00	3
0.5946300E+00	-0.1324260E+02	-0.281430E+01	3
0.5928300E+00	-0.1359760E+02	-0.320965E+01	2
0.5472000E+00	-0.1498140E+02	-0.562800E+01	3
0.3723000E+00	-0.1624300E+02	-0.105458E+02	3
0.2434500E+00	-0.1669730E+02	-0.134363E+02	3
0.7650000E-01	-0.1698010E+02	-0.168564E+02	3
-0.6600000E-01	-0.1671860E+02	-0.198048E+02	3
-0.1824000E+00	-0.1542750E+02	-0.229674E+02	3
-0.3213900E+00	-0.1411550E+02	-0.256981E+02	4
-0.3839100E+00	-0.1663540E+02	-0.262006E+02	6
-0.3399300E+00	-0.1915880E+02	-0.263043E+02	3
-0.2643000E-01	-0.2456810E+02	-0.262272E+02	3
0.2118000E+00	-0.2665180E+02	-0.262351E+02	2
0.6792900E+00	-0.2950020E+02	-0.263369E+02	2
0.1118070E+01	-0.3149320E+02	-0.264720E+02	2
		TOTAL ITERATION	52

Case : K. S. Surana [ref. 12]

TOTAL LOAD(KN)	DISP.(CENTER)	DISP.(SIDE)	NO. OF ITERATION
0.2101	-2.5	-0.0104	4
0.3479	-5.0	-0.0250	4
0.4528	-7.5	-0.1470	4
0.5319	-10.0	-0.6435	4
0.5817	-12.5	-1.7878	5
0.5555	-15.0	-4.7549	6
0.4694	-16.0	-7.6169	5
0.1264	-17.0	-15.5390	9
-0.3701	-18.0	-26.2121	9
-0.3486	-19.0	-26.2023	4
-0.3168	-20.0	-26.1929	4
-0.2636	-21.0	-26.1715	4
-0.2205	-22.0	-26.1453	4
-0.1542	-23.0	-26.1205	4
-0.0744	-24.0	-26.1019	4
0.0198	-25.0	-26.0932	4
0.1298	-26.0	-26.0971	4
0.2565	-27.0	-26.1153	4
0.4012	-28.0	-26.1489	4
0.5647	-29.0	-26.1984	4
0.7485	-30.0	-26.2637	4
		TOTAL ITERATION	95

4. 수치해석의 결과

4.1 단순지지 원통형 쉘

격하 쉘 요소의 대변위 및 대회전을 고려한 Surana[12]의 기하학적 비선형 해석결과와 비교하였다. snap through와 snap back이 발생하는 구조인 단순지지 원통형 쉘 구조(hinged cylindrical shell structure)의 기하학적 비선형해석을 수행하여 집중하중을 받는 원통형 쉘의 center 및 side의 처짐을 Fig. 3, 4에 도시하였으며 변위와 반복 계산회수를 Table. 1, 2에 비교하였다. 쉘의 두께가 6.35mm인 경우 Surana는 snap back을 나타내지 못했으나 본 논문의 경우는 Sabir and Lock의 결과와 같이 snap back을 보여 주고 있다. Surana의 경우는 비선형 수치해석 방법에서 displacement control 방법을 사용하였기에 snap back 현상이 나타나지 않았으며 본 논문에서는 arc-length method를 이용한 자동하중 증분법을 사용하였다[17, 18].

4.2 이중 구각 쉘

집중하중을 받는 사변이 단순지지인 이중 구각 쉘(spherical shell)구조의 기하학적 비선형해석 결과를 Fig. 5에서 비교하였으며 변위와 반복계산 회수를 Table 3에서 비교하였다. 해석결과에서 전체 반복 계산회수가 적으므로 비선형 경로의 접근성은 빠른 결과를 보여주고 있다. Fig.5에서의 변위차이는 Surana와 본 논문에서 대회전을 고려하는 방법의 차이에 의해서 발생하는 것으로 판단된다.

4.3 반구 쉘

이중 구각 쉘의 해석결과에서 변위차이의 정도를 평가하기 위해서 쉘 이론으로 정식화한 요소를 사용하여 해석한 예제[15, 16]인 집중하중을 받는 반구 쉘(hemis-

Table 3 Load-deflection characteristics of the spherical shell

Case : Present approach(1.0KN)(t=99.45mm)

TOTAL LOAD(KN)	DISP.(CENTER)	NO. OF ITERATION
0.17374E+02	-0.226973E+02	2
0.31592E+02	-0.478844E+02	2
0.41340E+02	-0.749834E+02	2
0.46034E+02	-0.107172E+03	2
0.38380E+02	-0.172138E+03	3
0.35192E+02	-0.192671E+03	2
0.39644E+02	-0.243844E+03	2
0.47690E+02	-0.263381E+03	2
0.65456E+02	-0.290680E+03	2
	TOTAL ITERATION	19

Case : K. S. Surana[ref. 12]

TOTAL LOAD(KN)	DISP.(CENTER)	NO. OF ITERATION
16.5684	-25	4
28.8113	-50	4
37.4830	-75	4
43.1707	-100	4
46.2597	-125	4
46.9210	-150	4
45.1676	-175	5
41.1574	-200	5
36.2697	-225	5
34.7353	-250	4
41.1698	-275	4
56.5641	-300	4
	TOTAL ITERATION	51

pherical shell) 구조의 기하학적 비선형 해석결과와 비교하였다. 해석결과로 집중하중을 받는 절점에 대한 X, Y 방향의 하중-처짐곡선 및 하중단계 10(하중계수=18.95)에서의 처짐형상을 Fig.6에 도시하였으며 Basar [15], Simo[16]의 해석결과와 기하학적 비선형 거동이 일치함을 보여주고 있다. 상기의 결과로 부터 Surana의 가정된 절점의 비선형 회전함수를 사용하는 방법과 본 논문에서 가정없이 대회전을 고려하는 방법과의 차이로 판단할 수 있고 본 논문의 결과가 쉘의 비선형 거동을 정확히 표현하고 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

대변위와 대회전을 고려한 만곡된 쉘 요소의 증분 평형식을 정식화하였으며 기하학적 비선형 수치해석의 결과를 비교하기 위해서 참고문헌[12]의 예제와 수치

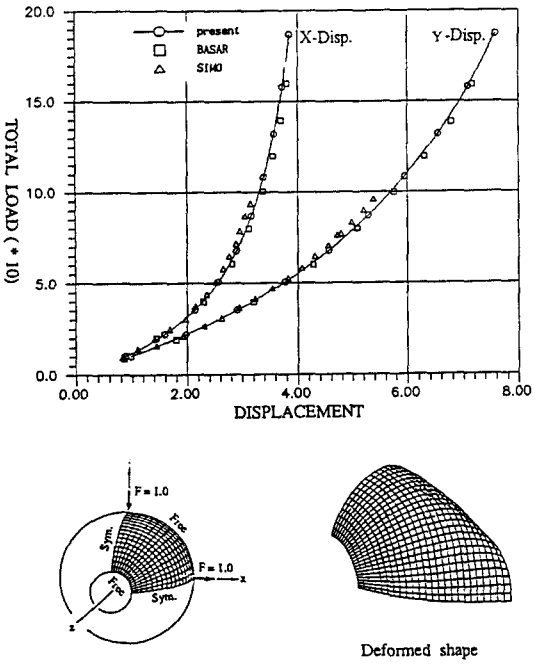


Fig. 6 Hemispherical shell under two point loads

해석을 비교하였다.

본 논문의 결과에서 하중 증분단계의 회수는 많지만 전체 반복 계산회수는 적으므로 비선형 경로의 접근성은 빠른 결과를 보여주고 있다.

단순지지 원통형 쉘(hinged-end cylindrical shell)의 비선형 해석결과를 보면 비선형 거동인 snap through 및 snap back 현상이 나타나며 이중 구각 쉘(spherical shell)의 해석결과에서 변위차이는 Surana[12]와 본 논문에서 대회전을 고려하는 방법의 차이에 기인한다고 사료된다. 따라서 해석결과의 정도평가를 위해 참고문헌 [15, 16]에서 Kirchhoff-Love Hypothesis의 쉘 이론을 사용하여 대회전을 고려한 반구(hemisperical shell)구조의 해석결과와 비교하였고, 해석결과에서 집중하중을 받는 절점의 X, Y 방향처짐의 비선형 거동이 Basar[15], Simo[16]의 대회전을 고려한 비선형 쉘 요소의 해석결과와 일치하였다.

이상의 해석결과로 부터 본 논문에서 개발된 유한요소 프로그램은 쉘 구조물의 비선형 거동 및 좌굴해석에서 매우 유용하게 활용될 수 있다.

후 기

이 연구는 인하대학교 산업과학기술연구소 '91학년

또 자체학술연구비의 지원에 의해 수행되었음을 후기한다.

참 고 문 헌

[1] Ahmad S., Irons B.M., and Zienkiewicz O.C., "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements", *Int. J. Numerical Method in Engineering*, Vol. 2, pp.419-451, 1970.

[2] Bathe K.J., Ramm, and Willson E.L., "Finite element formulation for large deformation analysis", *Int. J. Numerical Method in Engineering*, Vol. 9, pp. 351-386, 1975.

[3] Ramm E., "A plate / shell element for large deflection and rotation", in Formulation and Computational Algorithms in Finite Element Analysis, MIT Press, Cambridge, Mass, 1977

[4] Zienkiewicz O.C.,Bauer J. and Onate E., "A simple and efficient element for axisymmetric shell", *Int. J. Numerical Method in Engineering*, Vol. 11, pp. 1545-1558, 1977.

[5] Bathe K.J. and Bolourchi S., "A geometric and material nonlinear plate and shell element", *Int. J. Computers & Structures*, Vol. 11, pp. 23-28, 1980.

[6] Zienkiewicz O.C., "The finite element method", Third Edition, Magraw-Hill, 1982.

[7] Bathe K.J., "Finite element procedures in engineering analysis", Prentice-Hall, 1982.

[8] Bathe K.J. and Dvorkin Eduardo, "Our discrete-Kirchhoff and isoparametric shell elements for nonlinear analysis an assessment", *Int. J. Computers & Structures*, Vol. 16, pp. 88-98, 1983.

[9] Figueiras J.A. and Owen D.R.J., "Analysis of elastic-plastic and geometrically nonlinear anisotropic plate and shells", in Finite Element Software for Plates and Shells, Pineridge, 1984.

[10] 이재욱, 정기태, 양영태, "선체구조 부재의 좌굴강도 해석 프로그램 개발", 인하대학교 산업 기술연구소, 1990. 6. 30

[11] 이재욱, 정기태, 양영태, "편심 보강평판의 기하학적 비선형해석", 대한조선학회 논문집, 제2호, 1991.

[12] Surana K.S., "Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements", *Int. J. Numerical Method in Engineering*, Vol.19, pp581-615, 1983.

[13] ONATE E., DVORKIN E., CAN GA M.E. and OLIVER J., "On the Optention of the tangent matrix for geometrically nonlinear analysis using continuum based beam/shell finite elements" in "Computational Mechanics of Nonlinear Response of Shells", springer-verlag, 1990.

[14] John. Argyris, "An excursion into large rotations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp. 85-155, 1982.

[15] Basar Y., Kratzig W.B., "Introduction into finie-rotation shell theories and their operator formulation", in Computational mechanics of Nonlinear Response of Shells, Springer-Verlag, 1990.

[16] Simo J.C., Fox D.D. and Rifai M.S., "Formulation and Computational aspects of a stress resulatant geometrically exact shell model", in Computational Mechanics of Nonlinear Response of Shells, Springer-Verlag, 1990.

[17] Yeong-Bin Yang and Ming-Shan Shieh, "Solution method for nonlinear problems with multiple critical points", *AIAA.*, Vol. 28, No. 12, pp. 2110-2116, 1990.

[18] 이재욱, 양영태, "Riks Method를 이용한 비선형 수치해석", 대한 조선학회 논문, Vol.28, No.1, 1991

[19] Lee Jae Wook, "ZUR DISSIPATIONSENERGIE DER ISOTROPEN PLATE", DISS., AAchen, 1981.