
 論 文

大韓造船學會論文集
 第29卷 第2號 1992年 5月
 Transactions of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 29, No. 2, May 1992

기하학적 초기결함을 갖는 원통형 쉘의 탄성 좌굴신뢰성 해석

양영순*, 김두기**

Elastic Buckling Reliability Analysis of Circular Cylindrical Shell with Random Geometric Initial Imperfection

by

Y. S. Yang* and D. K. Kim**

요 약

본 논문에서는 기하학적 초기결함을 갖는 원통형 쉘이 축방향 압축하중을 받는 경우의 탄성좌굴 신뢰성 해석을 수행하였다. 이를 위하여 Donnell형의 비선형 편미분 방정식으로부터 Galerkin근사법을 사용하여 좌굴모드간의 연성효과를 고려한 불완전한 원통형 쉘의 좌굴하중을 구할 수 있는 다중모드 해석기법을 정식화하였다. 이때 기하학적 초기결함은 축대칭 및 비 축대칭 좌굴모드 형태의 이중급수로 가정하고, 각 급수의 계수는 결합정규분포특성을 갖는 확률변수로 취급하였다.

신뢰성 해석방법으로는 Monte Carlo기법을 사용하였고 초기결함의 통계적 특성의 변화에 따른 좌굴신뢰도의 변화 특성을 살펴보고 실제 경우에 적용하여 그 결과를 검토하였다.

Abstract

A study result of buckling reliability is presented for the axially compressed imperfect elastic cylinder. Multi-mode analysis program is developed from Karman-Donnell Equation for the calculation of the buckling load of the cylindrical shell. Geometric initial imperfection is approximated by double Fourier series of which coefficients are assumed random variables with jointly normal distribution characteristics. Crude Monte Carlo simulation technique is used to calculate the probabilistic failure properties of several cases with various imperfection Conditions.

발 표 : 1991년도 대한조선학회 추계연구발표회('91. 11. 16.)

접수일자 : 1991년 12월 16일, 재접수일자 : 1992년 3월 12일

* 정회원, 서울대학교 조선해양공학과

** 정회원, 국방과학연구소

大韓造船學會論文集 第29卷 2號 1992年 5月

1. 서 론

여러가지 형태의 원통형 셀은 해양구조물, 비행기 동체 등과 같은 복잡한 구조물의 1차적 구조요소로 사용되고 있는데 그 사용목적에 따라 여러가지 하중을 받게되며 특별히 축방향 압축력을 받는 원통형 셀의 좌굴거동은 구조공학자에게 많은 관심의 대상이 되어왔다. Fig. 1-1은 축방향 압축력을 받는 원통형 셀에 대한 탄성영역내에서의 이론좌굴하중과 실험치를 비교한 것이다. Fig. 1-1에 확인할 수 있는 이론 해석치와 실험치의 막대한 차이는 지난 수십년간 여러 연구가로 하여금 이 문제에 대해 많은 연구를 수행케 하였다. 여러 연구결과에 의하면 축방향 압축력하의 원통형 셀에서는 초기좌굴 후 경로 (initial postbuckling path)가 불안정하며, 좌굴거동이 좌굴모드간의 비선형 연성(nonlinear coupling)에 의해 지배되어 그 결과 기하학적 초기결함 등의 외부요인에 지극히 민감하게 반응하게 되므로 정확한 좌굴강도 예측을 위해서는 여러 좌굴모드 형태의 기하학적 초기결함을 동시에 고려해서 해석을 수행해야 한다. 여기에서의 기하학적 초기결함은 원통형 셀의 제작과정에서 필연적으로 발생하는 진원도, 원통도의 이탈정도를 의미한다. 또한 실제적인 원통형 셀의 기하학적 초기결함은 매우 불규칙한 형태를 가지며 이러한 불규칙성을 고려한 합리적인 좌굴강도 예측을 위해서는 확률론적 방법에 의한 좌굴신뢰성해석이 수행되어야 한다.

기하학적 초기결함에 의한 좌굴강도의 감소정도를 초기결함 민감도(imperfection sensitivity)라고 하는데 원통형 셀에 대한 결정론적 초기결함 민감도 해석에 관련된 현재까지의 해석적 연구내용은 매우 방대하며 그 전체적인 흐름은 세 가지로 대별할 수 있다.

i) 축대칭 및 비 축대칭 성분을 모두 포함하는 일반적인 형태의 기하학적 초기결함의 형태를 가정하고 Flüge, Sanders, Donnell 이론에 의한 평형, 적합방정식을 이용하여 비선형 하중-변위 경로를 추적하여 최대하중을 구하고 이를 좌굴하중으로 간주하는 데 이는 Donnell, Wan, Arbocz, Sechler, Yamaki, Simitses 등에 의해 사용되었다[2-4][18].

ii) 초기결함을 축대칭형태로 가정하고 좌굴전의 축대칭 변형상태에서 비 축대칭 모드로 분기가 발생하는 최소하중을 실제 좌굴하중으로 간주하는 방법으로서 Koiter에 의해 시작되어 Budiansky, Hutchinson에 의해 집약, 발전되었고 Hutchinson, Amazigo, Arbocz 등에 의해 사용되었다[1][11][24].

iii) 분기점근처에서의 포텐셜 에너지의 점근적 형태를

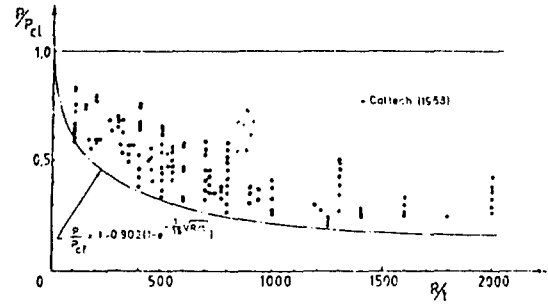


Fig. 1-1 Test data for isotropic cylinders under axial compression [24]

구하고 이를 Thom의 급변론(catastrophe theory)에 의해 분류되는 여러 급변형상과 대응시켜 원통형 셀의 모드 연성현상 및 jump현상을 분석하는데 이는 Thompson, Hunt, Watanabe, Naschie 등에 의해 사용되었다[8][9][23].

전술한 결정론적 초기결함 민감도 해석 연구에서는 기하학적 초기결함을 결정적인 형태로 가정하여 해석하는데, 실제의 측정된 기하학적 초기결함은 매우 복잡하고 불규칙한 형태를 가지고 있는 것이 보통이다. 그리하여 구조물의 초기결함 민감도 해석에 관한 이론을 초기결함에 관한 통계분석과 결합시켜 좀 더 실용적이며 합리적인 연구결과를 얻고자 Bolotin[16]이래 많은 연구가 수행되어왔다.

원통형 셀에 대한 좌굴 신뢰성 해석 또는 확률론적 초기결함 민감도해석에 대한 방법론 또한 두가지로 대별될 수 있다.

첫번째 방법은 초기결함을 기지의 상관함수를 갖는 ergodic, zero mean, stationary한 Gaussian 확률과정의 ensemble에서 추출한 sample function으로 간주하고 이를 포함한 확률 미분방정식을 풀어서 좌굴하중을 점근적으로 구하는 방법으로서 Amazigo, Fersht, Palassopoulos 등이 사용하였다[6][10][17][19].

두번째 방법에서는 random한 진폭을 가지면서 주어진 형태의 초기결함함수의 합으로 초기결함을 간주하고 초기결함의 결합 확률밀도함수 초기결함-좌굴하중간의 결정론적 관계를 이용하여 파괴확률을 계산하는데 이 방법은 Hansen, Elishakoff, Ivanova 등이 이용하였다[8][15][12].

국내에서의 관련연구로서는 이[26] 등이 복합적층 셀의 비선형응력해석을, 장[20] 등이 초기결함이 없는 보강원통에 대한 탄성 좌굴강도해석을 포텐셜 에너지

이론을 이용하여 수행하였고, 박[21]이 기하학적 초기결합을 갖는 보강원통형 쉘에 대한 최종강도해석을 유한요소법에 의해 수행하였다. 백[22] 등은 초기손상을 갖는 원통의 최종강도 해석연구를 간이유한요소법을 사용하여 실시한 바 있다. 또한 이[25]는 신뢰성이론에 기초하여 초기결합이 없는 보강 원통형 쉘의 최적설계 연구를 수행하였다. 이와 같이 원통형 쉘과 관련하여 많은 연구가 국내에서 수행되었으나 다중모드의 초기결합을 갖는 원통형 쉘의 좌굴 신뢰성해석에 관한 연구는 아직 미흡한 실정이다.

본 논문에서는 일반적인 형태의 random한 기하학적 초기결합을 갖는 원통형 쉘이 축방향 압축하중을 받는 경우의 탄성좌굴 신뢰성 해석을 수행하였다. 이를 위해 여러 좌굴 모드간의 연성효과를 고려한 불완전한 원통형 쉘의 좌굴하중을 도출할 수 있는 다중모드 해석기법을 정식화하였다. 이때 기하학적 초기결합은 축대칭 및 비축대칭 형태의 Fourier 이중급수로 가정하고 각 급수의 계수는 통계적으로 종속되고 결합 정규분포 특성을 갖는 확률 변수로 취급하였다. 신뢰성해석 방법으로는 Crude Monte Carlo 기법을 이용하였고 초기결합의 통계적 특성의 변화에 따른 좌굴 신뢰도의 변화특성을 살펴보고 실제경우에 적용하여 그 결과를 여타 연구결과와 비교 검토하였다.

2. 다중 모드해석을 위한 정식화 과정

2.1 지배방정식

Fig. 2-1에는 본 논문에서 취급하고자 하는 원통형 쉘의 기하학적 특성 및 좌표계를 표시하였다.

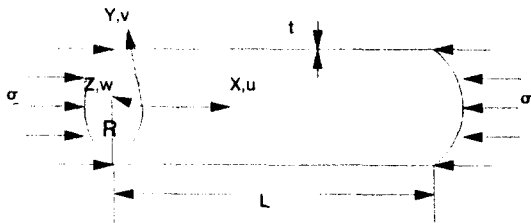


Fig. 2-1 Coordinate system of circular cylindrical shell

그림에서의 원통형 쉘은 다음의 가정들을 만족한다.

- 1) 쉘의 두께는 충분히 얇다. $t/L \ll 1$
- 2) 변형도 ϵ 은 매우작고 Hooke의 법칙이 적용된다.
- 3) 변형전 중립면에 수직인 직선이 변형 후 중립면에

수직하여 직선을 유지한다. 또한 중립면에 수직인 방향의 응력은 중립면에 평행한 방향의 응력에 비해 미소하다.

- 4) $|U| \ll t, |V| \ll t, |W| = O(t)$
- 5) $\left\{ \left| \frac{\partial W}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial W}{\partial y} \right| \right\} \ll 1$
 $\left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2, \left| \frac{\partial W}{\partial x} \right| * \left| \frac{\partial W}{\partial y} \right|, \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right\} = O(\epsilon)$
- 6) 반경방향의 초기결합 \bar{W} 는 다음의 관계를 갖는다.
 $|\bar{W}| \ll R, |\bar{W}_x| \ll 1, |\bar{W}_y| \ll 1$
- 7) $\omega_1 = \frac{12(1-\nu^2)^{0.25}}{\pi} \frac{L}{\sqrt{Rt}}$
 $\omega_2 = \frac{1}{\pi \sqrt{12(1-\nu^2)}} \frac{L}{R} \sqrt{t/R}$ 일 때
 $\omega_1 > 1.0, \omega_2 < 0.1$ 의 관계를 만족한다.

가정 7)을 만족하면 경계조건에 무관하게 좌굴하중이 결정되며, 비교적 짧은 쉘의 경우에는 이 가정을 적용할 수 없다[28].

반경방향 초기형상 결함 \bar{W} 를 고려한 원통 쉘에 관한 적합, 평형방정식은 다음과 같이 표현된다[3][5].

$$\frac{1}{Et} \nabla^4 F = -\frac{W_{xx}}{R} - L_{NL}(W, W + 2\bar{W})/2 \tag{2-1}$$

$$\frac{1}{D} \nabla^4 W = \frac{F_{xx}}{R} + L_{NL}(F, W + \bar{W}) \tag{2-2}$$

여기에서 ∇^4, D 는

$$\nabla^4(\) = \{ (\)_{xxxx} + 2(\)_{xxyy} + (\)_{yyyy} \} \tag{2-3a}$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2-3b}$$

또한 비선형 Operator는

$$L_{NL}(S, T) = S_{xx}T_{yy} - 2S_{xy}T_{xy} + S_{yy}T_{xx} \tag{2-4}$$

위식 (2-3), (2-4)에서 하부첨자는 편미분되는 변수를 의미한다. 또한 E, t, ν 는 각각 재료탄성계수, 쉘의 두께, poisson비를 의미한다. 또한 \bar{W} 는 반경방향의 기하학적

초기결합을, F는 Airy 응력함수를 의미한다.

식 (2-1), (2-2)는 비선형 방정식이므로 그 해를 구하기 위해 근사해를 이용한 반복계산이 필요하게 된다. 정식 화과정에 따라 주어진 특정변위에서의 식(2-1), (2-2)에 대한 (m+1)번째 근사해인 $W_{m+1}, F_{m+1}, \lambda_{m+1}$ 는

$$W_{m+1} = W_m + \delta W_m \tag{2-5a}$$

$$F_{m+1} = F_m + \delta F_m \tag{2-5b}$$

$$\lambda_{m+1} = \lambda_m + \delta \lambda_m \tag{2-5c}$$

여기에서

W_m, F_m : W, F의 m번째 근사해

λ_m : 무차원 하중 λ 의 m번째 근사해

$\delta W_m, \delta F_m, \delta \lambda_m$: m번째 근사해에 대한 수정량

식 (2-5)를 식 (2-1), (2-2)에 대입한 후 수정량인 $\delta W_m, \delta F_m, \delta \lambda_m$ 의 2차항 이상을 무시하여 정리하면 다음과 같이 준선형화된 방정식을 얻게된다.

$$\frac{1}{Et} \nabla^4(\delta F_m) + \frac{(\delta W_m)_{xx}}{R} + N_{NL}(W_m + \bar{W}, \delta W_m) = -R_m \tag{2-6}$$

$$\frac{1}{D} \nabla^4(\delta W_m) - (\delta F_m)_{xx}/R - L_{NL}(F_m, \delta W_m) - L_{NL}(W_m + \bar{W}, \delta F_m) = -S_m \tag{2-7}$$

이때

$$R_m = \frac{1}{Et} \nabla^4(F_m) + \frac{(W_m)_{xx}}{R} + L_{NL}(W_m, W_m + 2\bar{W})/2 \tag{2-8a}$$

$$S_m = \frac{1}{D} \nabla^4(W_m) - \frac{(F_m)_{xx}}{R} - L_{NL}(F_m, W_m + \bar{W}) \tag{2-8b}$$

2.2 좌굴하중의 수치계산

기하학적 초기결합의 형태는 다음과 같이 가정 하였다.

$$\begin{aligned} \bar{W} &= t \sum_{i=1}^{N_1} \bar{W}_{m1(i),o} \cos(m1(i)\pi x/L) \\ &+ t \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{l=1}^{N_2} \bar{W}_{m2(k),m3(l)} \sin(m2(k)\pi x/L) \cos(m3(l)y/R) \end{aligned} \tag{2-9}$$

식 (2-9)은 가정 7)에 의해 경계조건에 무관하게 Elishakoff[15], Watanabe[9] 등이 이용하였다. 식 (2-9)의 첫 번째 항은 축대칭 성분을, 두번째 항은 비 축대칭 성분을 의미한다.

식 (2-9)에서 $m1(i), m2(k), m3(l)$ 은 각각 다음을 의미한다.

- $m1(i)$: i번째 축대칭 모드의 길이방향 half wave number
- $m2(k)$: k번째 비 축대칭 모드의 길이 방향 half wave number
- $m3(l)$: l번째 비 축대칭 모드의 원주방향 full wave number

또한 식 (2-1), (2-2)의 m번째 근사해 및 수정량은 초기결합의 형태를 따라 다음과 같이 가정한다.

여기에서 원통형 좌굴전 변형상태는 membrane 변형상태로 가정하였다.

$$\begin{aligned} W_m &= tW_o + t \sum_{i=1}^{N_1} W_{m1(i),o} \cos(m1(i)\pi x/L) \\ &+ \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{l=1}^{N_2} W_{m2(k),m3(l)} \sin(m2(k)\pi x/R) \cos(m3(l)y/R) \end{aligned} \tag{2-10a}$$

$$\begin{aligned} F_m &= \frac{ERt^2}{c} \left(-\frac{\lambda m y^2}{2R^2} \right) + \frac{ERt^2}{c} \sum_{i=1}^{N_1} F_{m1(i),o} \cos(m1(i)\pi x/L) \\ &+ \frac{ERt^2}{c} \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{l=1}^{N_2} F_{m2(k),m3(l)} \sin(m2(k)\pi x/R) \cos(m3(l)y/R) \end{aligned} \tag{2-10b}$$

$$\begin{aligned} \delta W_m &= t \sum_{i=1}^{N_1} \delta W_{m1(i),o} \cos(m1(i)\pi x/L) \\ &+ t \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{l=1}^{N_2} \delta W_{m2(k),m3(l)} \sin(m2(k)\pi x/R) \cos(m3(l)y/R) \end{aligned} \tag{2-10c}$$

$$\begin{aligned} \delta F_m &= \frac{ERt^2}{c} \left(-\frac{y^2}{2R^2} \right) \delta \lambda_m \\ &+ \frac{ERt^2}{c} \sum_{i=1}^{N_1} \delta F_{m1(i),o} \cos(m1(i)\pi x/L) \\ &+ \frac{ERt^2}{c} \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{l=1}^{N_2} \delta F_{m2(k),m3(l)} \sin(m2(k)\pi x/R) \cos(m3(l)y/R) \end{aligned} \tag{2-10d}$$

위 식에서 W_o 는 좌굴전의 축대칭 membrane 변형을 의미하며 N_1, N_2 는 축대칭 및 비 축대칭 모드의 수이고 c, 무차원 하중 λ_m 은 다음과 같다.

$$c = \sqrt{3(1-\nu^2)}, \quad \lambda_m = \frac{\sigma}{\sigma_d}, \quad \sigma_d = \frac{Et}{cR}$$

식 (2-10)을 식 (2-6), (2-7)에 대입한 후 식(2-10)의 각 좌굴모드에 대해 Galerkin 적분을 수행하면 다음과 같은

형태의 비선형 대수방정식을 얻게된다.

$$[CO]_m \{\delta X\}_m = -[R]_m \quad (2-11)$$

여기에서

$$[CO]_m = \begin{bmatrix} [P]_m & [Q]_m \\ [R]_m & [S]_m \end{bmatrix}$$

$$\{\delta X_m\}^T = [\delta \lambda_m, \delta W_{m1(i),cm}, \dots, \delta F_{m2(k),m3(l)m}]^T$$

$$\{V\}_m = \text{residual 벡터}$$

위의 식을 이용하여 각각 주어진 특정변위값에 대해 반복계산을 수행하여 수렴된 해를 구하게 되고 이러한 과정을 반복하여 좌굴하중 및 후좌굴 경로를 구하게 된다.

3. 원통형 쉘의 초기결합 민감도 해석

본 논문의 다중모드 해석기법의 검증을 위해 우선 1개 모드의 축대칭 초기결합만을 갖는 단순한 경우에 대해 Koiter의 이론해석결과와 비교하였다. Table 3-1에는 다중모드해석의 정확도 검증을 위해 사용한 모델인 Shell-1의 기하학적, 재료적 특성을 표시하였다. Fig. 3-1에는 Koiter의 special theory를 이용한 해석 결과와 다중모드해석 기법에 의한 결과를 비교하고 있는데 무차원 초기결합이 0.3-0.4일 때까지 두 결과가 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있다. Koiter의 special theory는 분기점 근처에서의 점근적인 해의 성격을 가지므로 무차원 초기결합의 값이 0.4이상으로 커지는 경우에는 본 논문에 의한 결과보다 커지게 됨을 알 수 있다[5]. Fig 3-1에서 축대칭 초기결합의 부호를 음(-)으로 하고 있는 것은 비 축대칭 초기결합과 달리 양(+)의 부호의 축대칭 초기결합은 좌굴강도감소에 기여하지 않는다는 Koiter [27], Watanabe[9]의 연구결과에 따른 것이다.

원통형 쉘은 여러개의 모드가 연성되어 좌굴이 발생되는 특성을 가지고 있으므로 특정한 단일 모드의 초기결합만이 존재한다 해도 연성이 가능한 모드들을 유발시켜 이들이 결합된 형태로 좌굴모드를 형성하게 된다.

Table 3-1 Geometric and material data of Shell-1

Data	Shell-1
Length(mm)	206.7
Thickness(mm)	0.118
Radius(mm)	101.770
Young's modulus(N/mm ²)	1.065E5

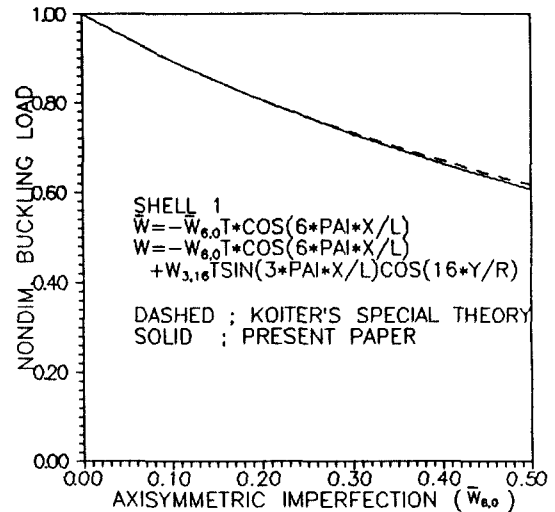


Fig. 3-1 Comparison with Koiter's result for shell-1

이러한 현상을 2차 분기(secondary bifurcation)로 부르는데 불완전한 원통형 쉘에서는 두 가지의 2차 분기현상이 발생한다[7]. 그 한가지는 축대칭 초기결합만이 존재하는 경우, 이로 인해 비 축대칭 좌굴 모드가 유발되어 두 모드가 결합된 비선형 하중-변위 경로상에서 축대칭 모드만의 극한점(limit point)에 이르기 전에 2차 분기가 발생하는 경우이고, 또 한가지는 반대로 비 축대칭 초기결합 모드가 축대칭 좌굴 모드를 유발시켜 2차 분기가 발생하는 경우이다. Fig. 3-1의 각 점은 이러한 2차 분기가 발생하는 좌굴점을 의미하고 있다. 그 중의 한 경우를 Fig. 3-2에 표시하였는데 좌굴모드를 축대칭 모드로만 제한하였을 경우의 극한점보다 훨씬 낮은 점에서 2차 분기로 인해 좌굴이 발생하는 것을 확인할 수 있다.

Fig. 3-3에서는 세가지 형태의 초기결합모드가 존재하는 경우, Shell-1에 대해 초기결합 민감도 해석을 수행한 결과를 나타내었는데 결합 모드-비 축대칭 모드-축대칭모드 순으로 그 효과가 크게 나타남을 알 수 있다.

원통형 쉘의 정확한 좌굴강도예측을 위해서는 연성 가능한 모드를 가능한 한 많이 고려하는 것이 중요한데 모드의 연성은 다음의 세가지 형태로 대별될 수 있다.

- 경우 1 : 1개의 축대칭 모드와 1개의 비 축대칭 모드 사이의 연성
- 경우 2 : 1개의 축대칭 모드와 2개의 비 축대칭 모드 사이의 연성
- 경우 3 : 3개의 비 축대칭 모드간의 연성

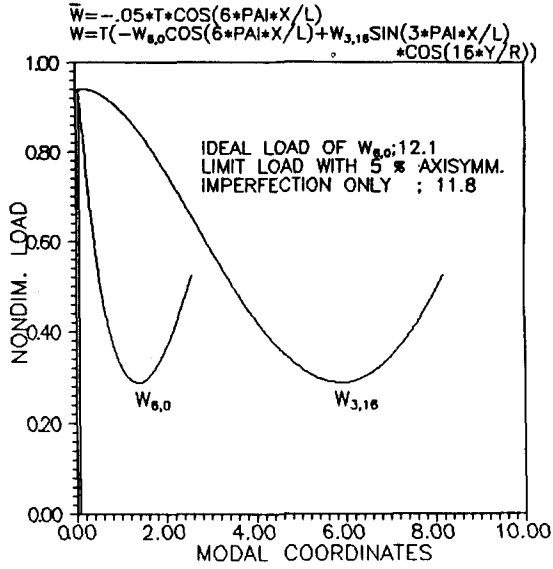


Fig. 3-2 Secondary bifurcation shown

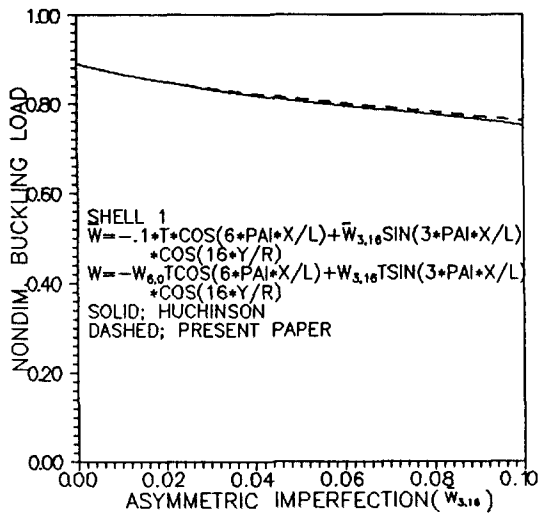


Fig. 3-3 Comparison with result by Huchinson's formula

각 경우의 연성 조건은 Table 3-2에 표시되는 바와 같으며 이는 식(2-11)의 계수행렬 $[CO]_m$ 의 계산 과정시 확인할 수 있다. 임계 초기결합 모드를 선택하는 문제는 각 초기결합모드에 해당하는 이상적 좌굴하중의 크기, 초기결합의 진폭, 모드연성 가능성의 측면에서 해결해야 한다.

실제적인 경우와 비교하기 위해 California 대학에서

Table 3-2 Condition of Mode Coupling

경우	측대칭 모드	비대칭 모드	조건
1	(i,0)	(k,1)	$i=2k$
2	(i,0)	(k,1),(m,n)	$i = k \pm m , l = n$
3	—	(k,1),(m,n) (p,q)	$ k \pm m \pm p = \text{odd}$ $q = 1 \pm n $

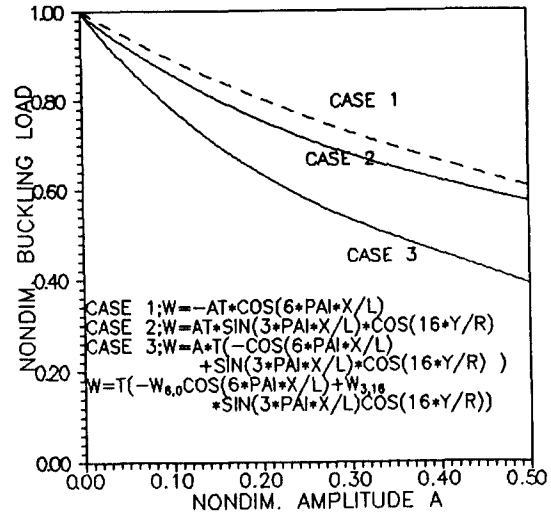


Fig. 3-4 Imperfection sensitivities with various imperfection conditions

구한 Shell-1에 대한 초기결합의 측정치를 이용하여 여러가지의 연성가능한 초기결합 모드를 30개까지 점진적으로 증가시키면서 좌굴강도를 계산하였고 모드 수에 따른 좌굴강도의 변화과정을 Fig. 3-5에 나타내었는데 최종적인 이론해석치가 실험치에 7% 이내까지 접근하는 것을 확인할 수 있다. 최종적으로 고려한 30개의 모드 및 그때의 Fourier 계수는 Table 3-2에 표시되어 있다. Table 3-2의 (m1,0)는 $\bar{W}_{m1,0}$ 를, (m2,m3)는 $\bar{W}_{m2,m3}$ 를 의미한다. 이 결과에서 알 수 있듯이 정확한 좌굴하중의 결정을 위해서는 모드의 연성 효과를 고려하는 것이 중요하며 실제 측정된 초기결합 모드 중 연성가능한 모드 수를 증가시킬 수록 계산치가 실제 실험결과에 근접함을 알 수 있다. 이때 고려된 모드 수가 어느 크기 이상이 되면 좌굴하중의 변화율이 매우 완만해지는 것을 알 수 있다. Fig. 3-6, 3-7에는 30개의 초기결합 모드를 갖는 경우에 대하여 하중을 받지않은 경우의 초기결합형상과 좌굴직전의 변위형상을 평면적으로 표현하였다.

좌굴직전의 변위형상이 모드연성효과에 의해 초기결

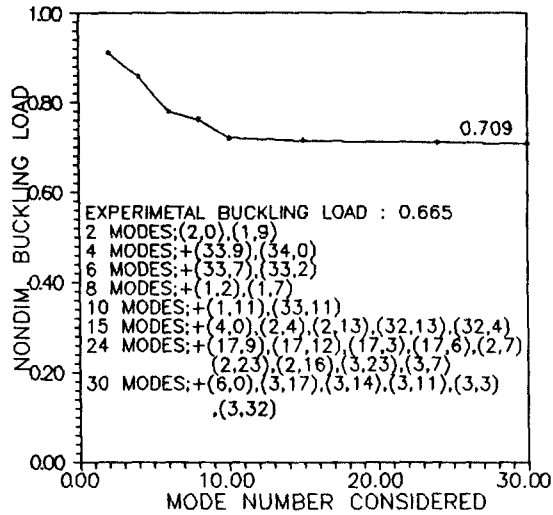


Fig. 3-5 Variation of buckling load with increase of imperfection mode number

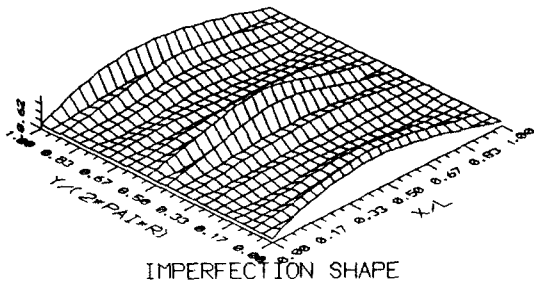


Fig. 3-6 Initial imperfection shape of shell-1

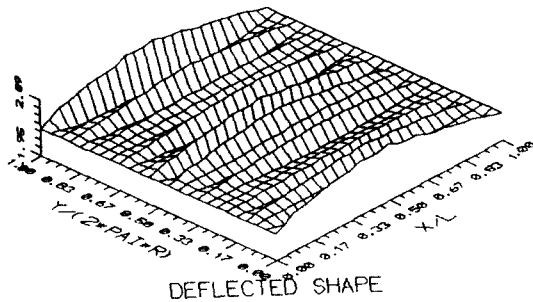


Fig. 3-7 Deflected shape at buckling point of shell-1

함형상으로부터 의해 초기결함형상으로부터 상당히 변화한 것을 확인할 수 있다.

Table 3-3 Imperfection model and values of the Fourier coefficients for shell-1

Imperfection mode	Fourier coefficient	Imperfection mode	Fourier coefficient
(2,0)	-0.05649	(17,9)	0.00523
(1,9)	0.08771	(17,12)	0.00342
(34,0)	-0.00199	(17,3)	0.02160
(33,9)	0.00254	(17,6)	0.00859
(33,2)	0.01897	(2,23)	0.01251
(33,7)	0.00358	(2,7)	0.06083
(1,2)	0.64894	(2,16)	0.02026
(1,7)	0.12254	(3,23)	0.00833
(33,11)	0.00197	(3,7)	0.04039
(1,11)	0.06716	(6,0)	0.01545
(32,4)	0.00778	(3,17)	0.01241
(2,4)	0.12806	(3,14)	0.01607
(4,0)	0.02493	(3,11)	0.02214
(2,13)	0.02673	(3,3)	0.12461
(32,13)	0.00162	(3,31)	0.00558

4. 원통형 쉘의 좌굴 신뢰성 해석

4.1 다중모드 초기결함의 생성

좌굴 신뢰성 해석에 필요한 초기 결함에 관한 데이터 생성 방법으로는 두 가지를 생각할 수 있는데 기저의 공분산함수를 이용하는 방법과 측정된 이산 데이터를 이용하여 공분산 함수를 모사하고 이를 이용하여 확률장을 형성하는 방법이 있다.

본 논문에서는 두번째 방법에 따라 초기결함의 이산 데이터를 이용하여 초기결함에 대한 확률장을 생성하는 방법을 사용하였다.

초기결함이 식(2-9)와 같이 표현될 때 그 공분산 함수는

$$\begin{aligned}
 C_W(x_1, y_1; x_2, y_2) &= E[[\bar{W}(x_1, y_1) - E[\bar{W}(x_1, y_1)]] \\
 &\quad [\bar{W}(x_2, y_2) - E[\bar{W}(x_2, y_2)]]] \\
 &= t \sum_{i=1}^{N1} \sum_{j=1}^{N1} S(\bar{W}_{m1(i),0}, \bar{W}_{m1(j),0}) \cos\left(\frac{m1(i)\pi x_1}{L}\right) \cos\left(\frac{m1(j)\pi x_2}{L}\right) \\
 &\quad + t \sum_{m=1}^{N1} \sum_{n=1}^{N2} S(\bar{W}_{m1(i),0}, \bar{W}_{m2(m),m3(n)}) \cos\left(\frac{m1(i)\pi x_1}{L}\right) \\
 &\quad \sin\left(\frac{m2(m)\pi x_2}{L}\right) \cos\left(\frac{m3(n)\pi y_2}{R}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ t \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{l=1}^{N_3} S(\bar{W}_{m1(j),n}, \bar{W}_{m2(k),m3(l)}) \cos\left(\frac{m1(j)\pi x_2}{L}\right) \\
 &\quad \sin\left(\frac{m2(k)\pi x_1}{L}\right) \cos\left(\frac{m3(l)\pi y_1}{R}\right) \\
 &+ t \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{l=1}^{N_3} \sum_{m=1}^{N_2} \sum_{n=1}^{N_3} S(\bar{W}_{m2(k),m3(l)}, \bar{W}_{m2(m),m3(n)}) \sin\left(\frac{m2(k)\pi x_1}{L}\right) \\
 &\quad \cos\left(\frac{m3(l)\pi y_1}{R}\right) \sin\left(\frac{m2(m)\pi x_2}{L}\right) \cos\left(\frac{m3(n)\pi y_2}{R}\right)
 \end{aligned}
 \tag{4-1}$$

위식의 공분산 행렬 성분 $S(\bar{W}_{m1(i),n}, \bar{W}_{m1(j),n})$, 및 평균값 벡터 $E[\bar{W}_{m1(i),n}]$, 등은 측정된 이산데이터를 이용하여 계산한다.

이때 공분산 행렬 [S]는 positive semi-definite인 성질을 가지며, Cholesky decomposition algorithm에 의해서 다음과 같이 분해된다.

$$[S] = [G][G]^T \tag{4-2}$$

위 식에서 [G]는 lower triangular matrix이다.

Delft 대학에서 수행한 연구결과[14]에 따르면 원통형 쉘의 기하학적 초기결함은 convex set을 형성하며 그 분포는 결함정규분포를 따른다. Monte Carlo 기법으로 이를 모사하기 위해서는 이를 통계적으로 독립인 등가의 확률변수로 치환해야 한다. Monte Carlo모사에 의해 생성되는 평균이 0, 분산이 1이며 통계적으로 독립적인 정규분포의 random vector를 {u}라고 하면 결함정규분포인 초기 결함의 Fourier계수 vector들은 다음의 식과 같이 생성되며 생성된 초기결함을 이용하여 좌굴신뢰성 해석을 수행하게 된다[13][14].

$$\{\bar{W}\} = [G]\{u\} + \{E(\bar{W})\} \tag{4-3}$$

4.2 좌굴 신뢰성 해석

실제적인 다중모드의 초기결함을 갖는 원통형 쉘의 신뢰성 해석에 앞서 초기결함의 통계적 파라메타의 변화에 따른 좌굴 신뢰성의 변화를 살펴보았다. 이를 위해 초기결함의 종류, 평균값, 표준편차를 Table 4-1에 표시한 것처럼 변화시켜 각각의 결과를 분석하였다. 각 경우에 1,000회의 Monte Carlo 모사를 실시하였다.

좌굴하중 λ^* 가 외부하중 λ 이하일 확률 $P_r(\lambda)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$P_r(\lambda) = \frac{n(\lambda)}{NN}$$

여기서 NN은 총 Monte Carlo 모사회수이고 $n(\lambda)$ 는 모사회수 중 좌굴하중이 외부하중을 초과하지 않는 회

Table 4-1 Specifications of reliability case study

Case	Imperfection mode	Mean variation	S. D. variation
1	axisymmetric(6,0)	0.0-0.6	0.0-0.4
2	asymmetric(3,16)	0.0-0.6	0.0-0.4
3	both (6,0) + (3,16)	0.0-0.6	0.0-0.4

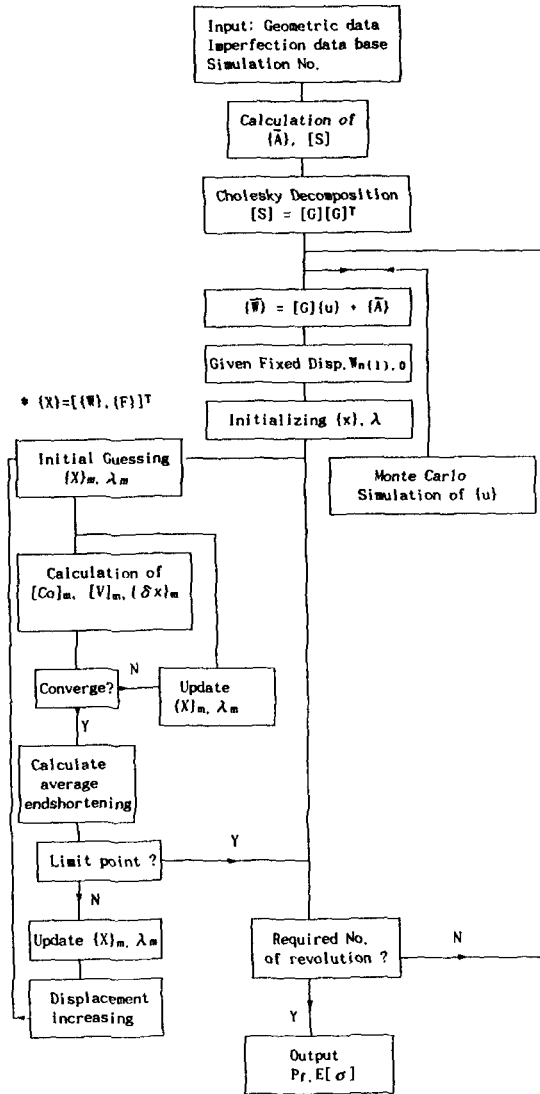


Fig. 4-1 Reliability analysis procedure

수를 의미한다.

Fig. 4-1에는 전체적인 신뢰성해석의 흐름을 표시하였다.

Fig. 4-2~Fig. 4-3에는 단일모드의 최대칭 초기결함

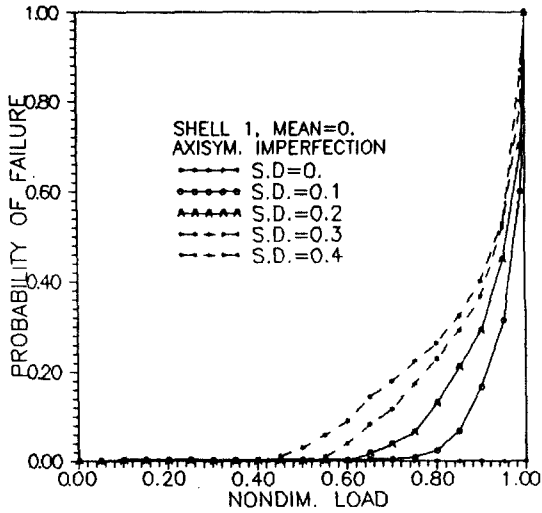


Fig. 4-2 Buckling load v.s. failure probability
(axisymmetric imperfection, mean=0.)

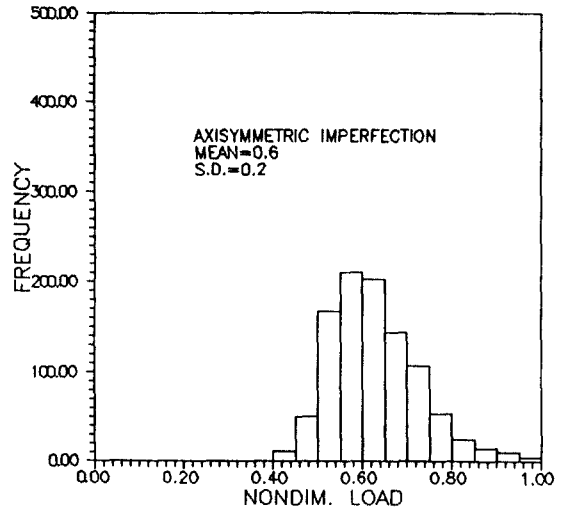


Fig. 4-4 Buckling load v.s. frequency
(axisymmetric imperfection, mean=0.6,
S. D.=0.2)

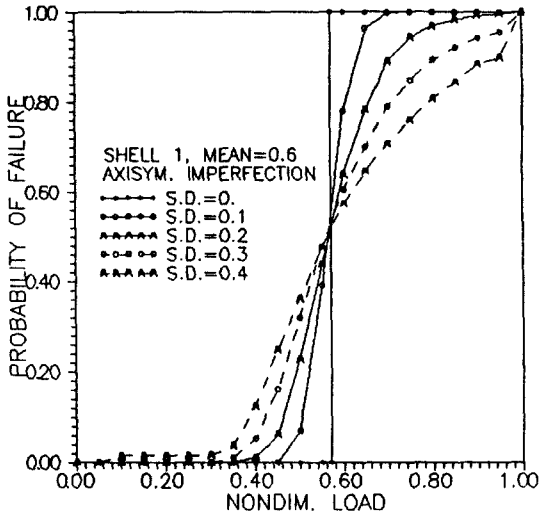


Fig. 4-3 Buckling load v.s. failure probability
(axisymmetric imperfection, mean=0.6)

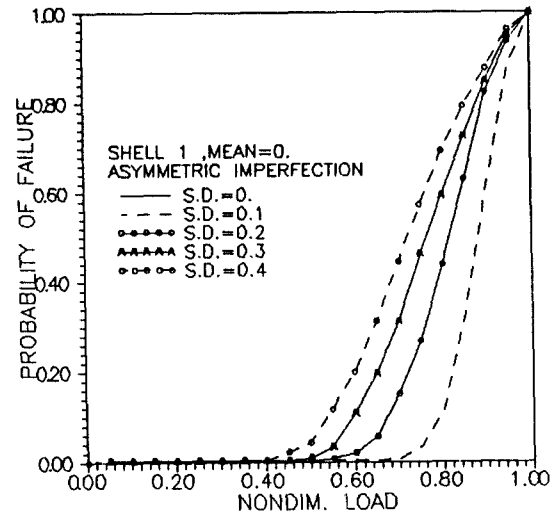


Fig. 4-5 Buckling load v.s. failure probability
(asymmetric imperfection, mean=0)

만이 존재하는 경우에 대해 초기결함의 평균값을 고정하고 표준편차를 파라메타로 하여 무차원하중 λ 가 0에서 1.0까지 변화할 때의 하중-좌굴확률의 관계를 표시하였다. 초기결함의 평균값이 0인 경우는 표준편차의 값에 관계없이 좌굴확률이 1.0인 점에서 모든 하중-좌굴확률 곡선이 결정론적 좌굴하중과 만나고 있다. 초기결함의 평균값이 0.6인 경우에는 표준편차의 값에 따라 약간 상이하지만 하중-좌굴확률곡선은 좌굴확률이 0.5인 점

근처에서 결정론적 좌굴하중과 만나게 된다. Fig. 4-4에는 대표적인 경우에 대해 총모사회수 중 무차원좌굴하중-빈도수의 관계를 보여주고 있다. Fig. 4-5~4-8에는 단일모드의 비축대칭 초기결함을 갖는 경우와 축대칭 및 비 축대칭 초기결함을 갖는 경우에 대해 하중-좌굴 확률의 관계를 표시하였는데 축대칭 초기결함을 갖는 경

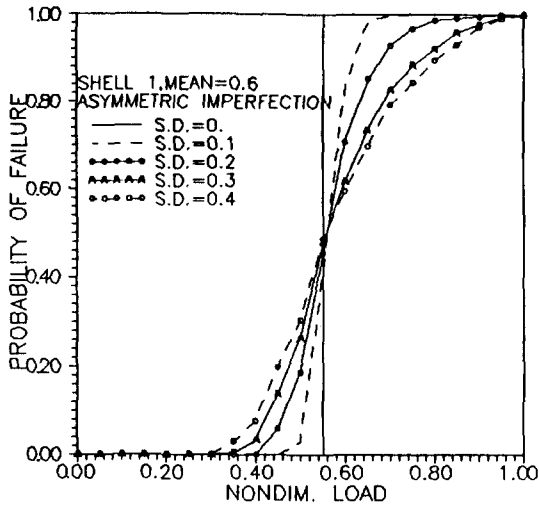


Fig. 4-6 Buckling load v.s. failure probability (asymmetric imperfection, mean=0.6)

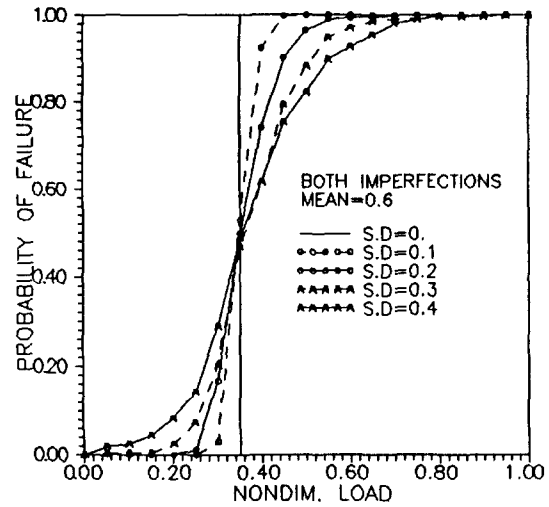


Fig. 4-8 Buckling load v.s. failure probability (both imperfections, mean=0.6)

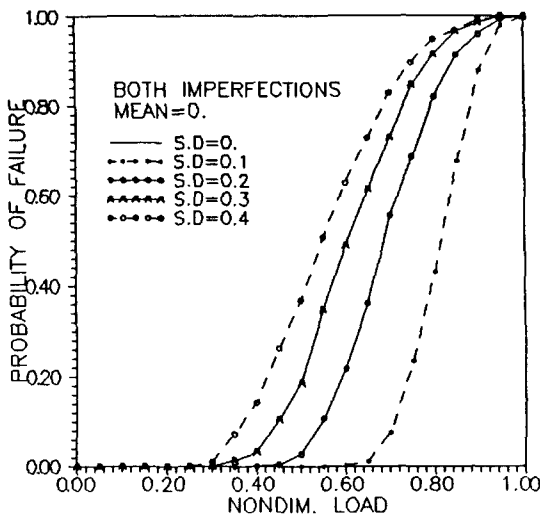


Fig. 4-7 Buckling load v.s. failure probability (both imperfections, mean=0.)

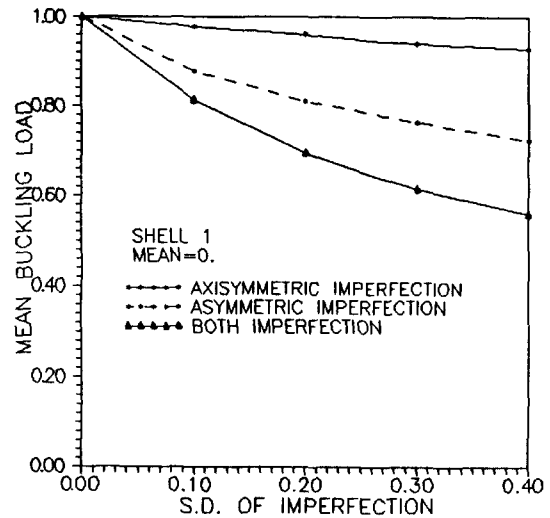


Fig. 4-9 Variation of mean buckling load with respect to S. D. of imperfection for various imperfection modes

우의 결과와 유사한 경향을 보이고 있다. 세가지 경우의 결과를 비교해보면 결정론적 해석결과의 경향과 유사하게 결합모드-비 축대칭 모드-축대칭 모드의 순으로 동일하중에 대해 좌굴확률이 크게 나타나고 있으며 이는 [7]의 해석결과와 동일한 경향을 보여주고 있다. Fig. 4-9에는 초기결함계수의 평균값이 0일때 세가지의 초기결함 모드에 대해 평균좌굴하중-초기결함계수의 표준편차의 관계를 표시하였다. 결정론적 초기결함 민감도 곡

선인 Fig. 3-4에 비해 축대칭 초기결함의 경우에 그 영향이 현저히 감소하는 것을 알 수 있으며 이는 좌굴강도 감소에 영향을 갖지 못하는 양의 부호를 갖는 축대칭 초기결함이 통계적 특성에 따라 대칭적으로 생성된 것에 기인한 것으로 사료된다.

다중모드의 초기결함을 갖는 원통형 쉘의 신뢰성해석은 [15]에서의 초기결함 측정데이터를 이용하여 수

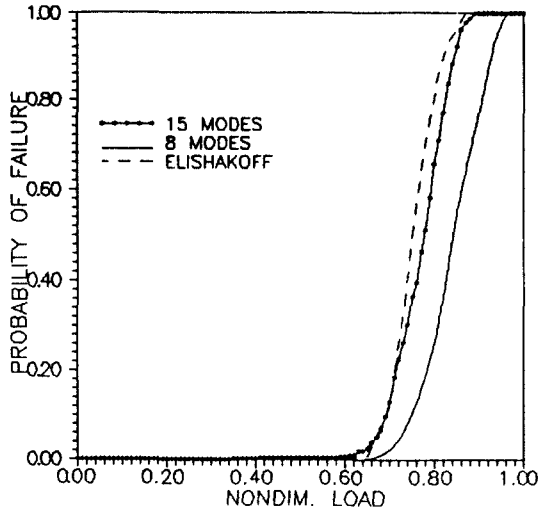


Fig. 4-10 Reliability computation result of Delft shells

Table 4-2 Geometric and material data of Delft shells

Shell No.	Radius(mm)	Thickness(mm)	Length(mm)
D1	101.6	0.2050	196.85
D2	101.6	0.1852	144.78
D3	101.6	0.1491	140.97
D4	101.6	0.2634	140.97

* Young's modulus 1.065E5 N/mm²(Y. Brass)

Table 4-3 Imperfection model and values of the Fourier coefficients for Delft shells

Imperfection mode	Shell number			
	D1	D2	D3	D4
(2,0)	-0.010809	-0.027238	-0.089906	-0.017560
(4,0)	0.022578	-0.007836	-0.025508	-0.009239
(26,0)*	-0.001600	0.000012	-0.000023	-0.000027
(1,2)	0.417400	0.392870	0.741280	0.222900
(1,6)	-0.077872	-0.143490	0.017483	0.077668
(1,8)	-0.263690	-0.009405	0.112470	0.101510
(1,10)	0.036568	0.043628	-0.245610	-0.008853
(2,3)	-0.101290	0.034018	-0.064766	-0.001887
(2,11)	0.009732	-0.008685	-0.028261	0.013545
(24,3)*	0.007230	0.000534	0.000174	0.002233
(24,11)*	0.001560	0.000131	0.000065	0.000528
(25,2)*	0.011102	0.000774	0.000233	0.003292
(25,6)*	0.003033	0.000245	0.000075	0.000974
(25,8)*	0.002111	0.000174	0.000074	0.000712
(25,10)*	0.001734	0.000137	0.000063	0.000553

* extrapolation

행하였는데 Table 4-2, Table 4-3에는 측정에 이용된 실제 모델의 기하학적 치수, 초기결함에 대한 Fourier계수를 표현하였다. 일부 초기결함모드의 Fourier계수는 회귀 분석에 의해 extrapolation하였다. Table 4-3의 초기결함 측정결과를 이용하여 초기결함의 평균치 벡터, 분산-공분산 행렬을 만들어 Delft shell에 대한 신뢰성 해석을 수행한 결과를 종합하여 Fig. 4-10에 표시하였다. 해석 결과는 [15]에서 동일한 모델에 대해 구한 결과와 대략 일치하고 있으며 차이를 보이는 부분은 [15]에 포함하지 않은 초기결함모드의 Fourier 계수를 extrapolation하는 과정의 차이에서 비롯된 것으로 사료된다.

5. 결 론

이상과 같은 연구과정을 통해 다음과 같은 몇 가지 결론을 얻었다.

첫째, 실제적인 원통형 셸에 있어서 기하학적 초기결함이 연성된 모드형태로 존재하므로, 연성효과로 인해 좌굴하중이 상당히 저하되며 이 효과를 고려할 필요가 있다. 본 논문의 다중모드해석 기법을 이용한 계산결과를 여타 연구결과와 비교하여 그 타당성을 확인하였고 초기결함 민감도 측면에서 결함모드, 비 축대칭 모드, 축대칭 모드의 초기결함 순으로 크게 나타남이 확인되었다. 또한 실제적인 다중모드의 초기결함을 갖는 경우에 대해 해석하였을 때 연성가능한 초기결함모드를 고려할수록 이론해석치가 실험치에 근접하게 되고 고려한 초기결함 모드수가 어느 수 이상이 되면 그 변화율이 완만해진다.

둘째, 좌굴 신뢰성 측면에서도 결정론적 유사하게 결함모드, 비 축대칭 모드, 축대칭 모드의 순으로 동일 하중에 대해 파괴확률이 크게 나타나는 데 이때 축대칭 모드의 영향이 결정론적 해석결과에 비해 현저히 줄어들게 된다.

셋째, 실제적인 다중모드의 초기결함을 갖는 경우에 대한 좌굴신뢰성 해석을 수행하여 여타 연구결과와 유사한 결과를 얻었으며 이러한 결과는 원하는 신뢰도를 만족하는 knock-down 계수를 결정하는데 이용될 수 있을 것이다.

본 논문에서는 축방향 압축력하에서의 비교적 긴 원통형 셸에 대한 탄성영역에서의 연구만을 수행하였는데 비교적 짧은 셸인 경우이거나 하중이 횡하중, 외부수압인 경우 및 탄소성 영역에서의 좌굴신뢰성해석이 추후 수행되어야 한다.

참 고 문 헌

- [1] Koiter W. T., "On the Stability of Elastic Equilibrium", Dissertation, U. of Delft, Holland, 1945, English Translation AFFDL-TR-70-20, 1970
- [2] Donnell L. H., Wan C. C., "Effect of Imperfection on Buckling of Thin Cylinders and Columns under Axial Compression", *J. of Applied Mechanics*, pp73-83, March, 1950
- [3] Arbocz J., "The Effect of Initial Imperfection on Shell Stability" in 'Thin-Shell Structure' edited by Fung & Sechler, pp 205-245, Prntice-Hall, 1974
- [4] Yamaki N., "Elastic Stability of Circular Cylindrical shells", North-Holland, 1984.
- [5] Bushnell D., "Computerized Buckling Analysis of Shells", Martinus Nijhoff Publishers, 1985
- [6] Amazigo J. C., "Buckling under Axial Compression of Long Cylindrical Shells with Random Axisymmetric Imperfections", *Q. of Applied Mathematics*, Vol. 26, 1969
- [7] Hansen J. S., "General Random Imperfections in the Buckling of Axially Loaded Cylindrical Shells", *A.I.A. A. Journal*, Vol.15, No.9, 1977
- [8] Hunt G. W., "Hidden Symmetry Concepts in the Elastic Buckling of Axially Loaded Cylinders", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 22, No. 12, pp 1501-1515, 1986
- [9] Watanabe E., "A Unified Approach to Elasto-Plastic Strength of Compressed Cylindrical Shells", *J.S.C.E*, Vol.4, No.2, pp 131-139, April, 1987
- [10] Palassopoulos G. V., "Reliability-Based Design of Imperfection-Sensitive Structures", *J. of Engineering Mechanics, A.S.C.E*, Vol.117, No.6, June, 1991
- [11] Hutchinson J. W. & Amazigo J. C., "Imperfection Sensitivity of Eccentrically Stiffened Cylindrical Shells", *AIAA J.*, Vol. 5, No.3, 1967
- [12] Ivanova J., "A Stochastic Approach to the Problem for Stability of a Spherical Shell with Initial Imperfections", SMiRT 11 Transactions, Vol.M, Tokyo, Japan, 1991
- [13] Elishakoff I., "Probabilistic Methods in the Theory of Structures", Wiley-Interscience, N.Y., 1983
- [14] Vermeulen P. G., "The Statistical Analysis of Initial Imperfection Measurements", Delft Univ. Report LR-442, Sep., 1984
- [15] Elishakoff I., "First-Order Second Moment Analysis of the Buckling of Shells with Random Imperfections", *A.I.A.A. Journal*, Vol. 25, No. 8, 1987
- [16] Bolotin V. V., "Statistical Methods in Structural Mechanics", Holden-Day, 1969
- [17] Fersht R. S., "Buckling of Cylindrical Shells With Random Imperfections", in 'Thin-Shell Structure', pp 325-341, Prentice-Hall, 1974
- [18] Simitse G. J., "Buckling and Postbuckling of Imperfect Cylindrical Shells : A Review", *Appl. Mech. Rev.* Vol. 39, No.10, 1986
- [19] Palassopoulos G. V., "Probabilistic Approach to Buckling of Thin Shells", Proceeding of 3rd IUTAM on Shell Theory, pp. 417-443, 1980.
- [20] 장창두, 노완, "보강 원통셸의 좌굴 및 최적 보강", 대한조선학회지, 24권 1호, pp 42-50, 1987
- [21] 박치모, "원환으로 보강된 원통형 셸의 최종강도 해석", 서울대학교 조선공학과 박사학위논문, 1990
- [22] 백점기, 신병천, "손상원통부재의 최종강도 해석에 관한 연구", 대한조선학회지, 27권 1호, pp24-34, 1990
- [23] EI Naschie M. S., "Generalized Bifurcation and Shell Buckling as Spacial-Statistical Chaos", *ZAMM*, 69(5/6), T376-T377, 1989
- [24] Arbocz J., "Koiter's Stability Theory in a Computer-Aided Engineering Environment", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 26, No. 9/10, pp 945-973, 1990
- [25] 이주성, "신뢰성 해석에 기초한 보강된 실린더 부재의 최적 구조설계", 대한조선학회지, 제 27 권 4 호, pp 67-71, 1990
- [26] 이재욱, 염철웅, "복합적층 원통형 구각의 최적구조를 위한 비선형 해석", 대한조선학회 추계연구 발표회, 1989
- [27] Olszac W., "Thin Shell Theory ; New Trends and Applications", Springer Verlag, pp65-88, 1980
- [28] Kollar L, Dulacska E., "Buckling of Shells for Engineers", John Wiley & Sons, 1984