
 論 文

大韓造船學會論文集
 第29卷 第2號 1992年 5月
 Transactions of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol.29, No. 2, May 1992

8절점 등매개 요소를 이용하여 이종재료 접합면에 수직인 크랙의
 특이성 표시를 위한 간편해석법

임원균*, 김상철**

A Simple Analysis to Obtain a Singularity near a Crack Perpendicular to Bimaterial
 Interface by Using 8-node Isoparametric Element

by

Won-Kyun Lim* and Sang-Chul Kim**

요 약

8절점 등매개 요소를 이용하여 이종탄성재료의 접합면에 수직인 크랙의 응력특이성을 표시하려는 Abdi의 방법을 재검토하여, 크랙특이성 표시를 위한 크랙요소변의 중앙절점의 위치를 간편하고, 효율적으로 얻을 수 있는 수정된 방법을 제안하였다. 본 해석방법은 기존의 방법 보다는 더욱 넓은 범위의 재료특성치에 걸쳐 유효하게 적용되어질 수 있으며, 좌표근사식도 더욱 정확히 나타낼 수 있음을 확인하였다.

Abstract

Numerical method by Abdi et al. for obtaining a stress singularity near a crack perpendicular to the interface between two elastic materials is reviewed. More efficient and simple method to obtain crack singularity by shifting a mid-side node of 8-node isoparametric element is presented. It is observed that the present analysis provides increased accuracy for the expression of the opening displacement and the determination of the optimal position of the mid-side node for a wide range of material properties.

발 표 : 1991년도 대한조선학회 추계연구발표회('91. 11.16)

접수일자 : 1991년 12월 16일, 재접수일자 : 1992년 2월 19일

* 정회원, 명지대학교 기계공학과

** 정회원, 인하대학교 기계공학과

大韓造船學會論文集 第29卷 2號 1992年 5月

1. 서 론

이종탄성재료의 접합면에 수직으로 존재하는 평면 크랙선단에서의 응력특이성에 대한 해석이 여러 연구자 [1,2,3]에 의하여 이루어졌다. 균질등방성 재료에서의 응력특이성이 $r^{-1/2}$ 으로 일정한 값을 가지고 있는데 비하여, Fig. 1과 같이 크랙이 접합면에 수직으로 존재하는 경우에는 $r^{\lambda-1}(0 < \lambda < 1)$ 으로 변화하며, 이러한 값의 변화는 이종탄성재료 각각의 특성을 나타내어 주는 재료 특성치인 전단탄성계수 및 포아슨비와 연관되어 있다. 이러한 $r^{\lambda-1}$ 로 변화하는 응력특이성을 가지는 문제에 대하여 정확한 수치해를 얻기 위하여서는 이와같은 성질을 나타낼 수 있는 크랙선단 특이성 모델링이 요구된다.

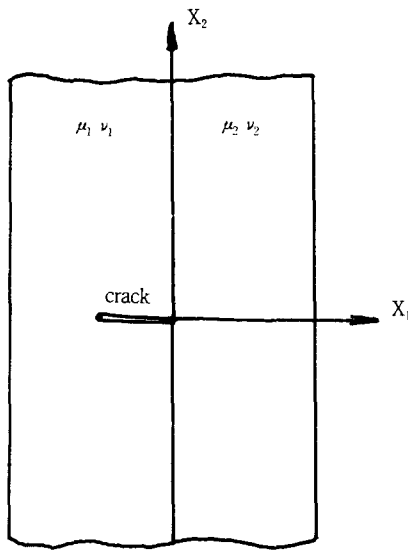


Fig. 1 Crack terminating at the interface

이를 위하여 Tracy등[4]은 3절점 삼각형요소를 개발하여 $r^{\lambda-1}$ 의 응력 특이성을 나타내고 있으며, Akin[6]도 삼각형 및 사각형 요소를 사용하여 $r^{\lambda-1}$ 의 특이성을 갖는 요소를 제안하고 있다. 그러나 이들 요소들은 크랙선단에서의 특이요소와 그 주위의 표준요소와 적합조건을 만족하고 있지 않다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 Henshell[6]과 Barsoum[7]은 8절점 등매개요소에서 크랙선단을 포함하는 변의 중앙절점의 위치를 크랙선단으로 1/4만큼 이동하여 놓음으로서 균질등방성재료에 대하여 $r^{-1/2}$ 응력의 특이성을 나타낼 수 있음을 제안하였으며, Abdi등[8]은 이러한 방법을 이종탄성재료의 접합면에 수직으로 존재하는 크랙에 대하여 확장 적용할

수 있음을 보이고, 크랙선단에서의 이론적 특이성을 얻기 위한 중간절점의 최적 위치를 나타내었다.

본 연구에서는 Abdi등에 의하여 제안된 방법을 재검토하여, 특이차수 λ 에 따른 좌표 근사식을 더욱 정확하게 나타낼 수 있으며, 아울러 크랙을 포함하는 요소 변의 중간절점의 최적위치를 간편하게 구할 수 있는 수정된 최소자승법을 제안한다. 이 방법은 기존의 방법보다 더 넓은 범위의 재료특성치에 걸쳐 유효하게 적용될 수 있음을 확인하였다.

2. 특이요소의 형성

앞에서 언급하였듯이 서로 다른 두 재료의 접합면에 수직인 크랙의 응력특이성은 이종탄성재료 각각의 특성을 나타내어 주는 재료상수에 따라 $r^{\lambda-1}(0 < \lambda < 1)$ 로 변화하며, 균질등방성 재료내 크랙은 우리가 잘 알고 있듯이 $r^{-1/2}$ 특이성을 갖고 있다. 즉 등방성 재료에 대한 특이차수 λ 는 0.5의 값을 가지고 있다.

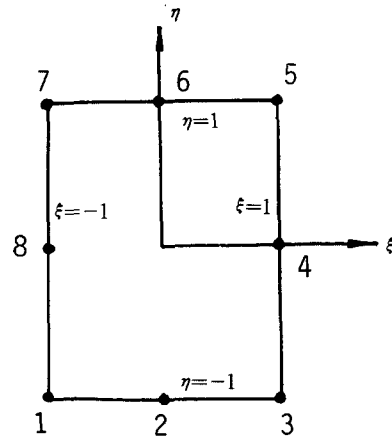


Fig. 2 8-node isoparametric element

지금 Fig. 2와 같은 8절점등매개 요소를 생각하여 보자. 이때 국소좌표 $\eta = -1$ 인 변 1-3을 따르는 x 좌표는 다음과 같이 주어진다.

$$x = \sum_{i=1}^3 N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \quad (1)$$

여기서 N_i 는 각 절점에 대한 형상함수로서 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} N_1 &= (-1/2)\xi(1-\xi) \\ N_2 &= (1-\xi^2) \\ N_3 &= (1/2)\xi(1+\xi) \end{aligned} \quad (2)$$

절점 1을 원점으로 하고 변1-3의 길이를 L이라 표시하면, $x_1 = 0, x_2 = \alpha L, x_3 = L$ 이 된다. 따라서 변 1-3을 따르는 x 좌표는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} x &= (1-\xi^2)\alpha L + (1/2)\xi(1+\xi)L \\ x/L &= \alpha + (1/2)\xi + ((1/2) - \alpha)\xi^2 \end{aligned} \quad (3)$$

중간 절점의 위치 α 를 1/4로 취한 경우에 Barsoum이 제안한 $r^{-1/2}$ 의 응력특이성을 얻을 수 있으며, 이때 x 좌표식은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} x/L &= [(1+\xi)/2]^2 \\ \text{또는 } \xi &= -1+2(x/L)^{1/2} \end{aligned} \quad (4)$$

한편 상기식을 이중탄성재료에 대하여 적용시킬 수 있는 일반식으로 표시하기 위하여 특이차수 λ 를 이용한 다음식으로 표시 가능하다.

$$\begin{aligned} x/L &= [(1+\xi)/2]^{2\lambda} \\ \text{또는 } \xi &= -1+2(x/L)^{1/\lambda} \end{aligned} \quad (5)$$

이때 변 1-3을 따르는 x 방향의 변위 u 는

$$u = \sum_{i=1}^3 N_i u_i = (-1/2)\xi(1-\xi)u_1 + (1-\xi^2)u_2 + (1/2)\xi(1+\xi)u_3 \quad (6)$$

로 표시되며, 상기식에 식(5)를 대입하면 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} u &= [+1-2(x/L)^{1/\lambda}] [1-(x/L)^{1/\lambda}] u_1 \\ &\quad + 4[(x/L)^{1/\lambda} - (x/L)^{2/\lambda}] u_2 \\ &\quad + [-1+2(x/L)^{1/\lambda}] [(x/L)^{1/\lambda}] u_3 \end{aligned} \quad (7)$$

x 방향의 변형을 ϵ_x 는,

$$\begin{aligned} \epsilon_x = \partial u / \partial x &= x^{\lambda-1} [3\lambda/L^\lambda - (4\lambda/L^{2\lambda})(x^\lambda)] u_1 \\ &\quad + 4x^{\lambda-1} [(\lambda/L^\lambda) - (2\lambda/L^{2\lambda})x^\lambda] u_2 \\ &\quad + x^{\lambda-1} [(-1\lambda/L^\lambda) + (4\lambda/L^{2\lambda})x^\lambda] u_3 \end{aligned} \quad (8)$$

로 주어지므로, 변 1-3을 따라서 r^{-1} 의 변형률 특이성을

가지고 있음을 알 수 있다.

3. α 간편 계산법의 제안

λ 의 함수인 식(5)를 식(3)과 같은 2차함수로 근사화할 수 있다면, 이로부터 α 의 값을 구할 수 있으며, 따라서 8절점 등매개요소의 중간절점의 위치를 α 만큼 이동시켜 놓음으로서 이중재료 접합면에 수직인 크랙에 대한 특이성을 나타낼 수 있다. 이를 위하여 Abdi등은 일반 최소자승법과 Simplex method를 이용하여 α 의 근사함수를 구하고 있고, 또한 근사함수의 계수와 α 와의 관계로부터 Optimization method를 이용하여 중간절점의 최적위치를 구하는 다소 번잡한 계산과정을 거치고 있다. 본 연구에서는 위와 같은 번잡한 계산을 하지 않고서도 간편히 α 의 값을 결정할 수 있는 수정된 최소자승법을 제안한다.

Y 를 x/L 의 2차 근사함수라고 하면 이는 다음과 같이 나타내어 진다.

$$Y = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 \quad (9)$$

식(3)에서 보듯이 ξ 의 계수는 1/2이므로 식(9)는 다음 식으로 바꾸어 나타낼 수 있다.

$$Y' = A_0 + 1/2\xi + A_2\xi^2 \quad (10)$$

따라서 상기 근사식에서 실제값인 y 와 오차가 최소가 되도록 편차의 제곱의 총합이 최소가 되는 A_0 와 A_2 의 값을 결정하면 된다.

지금 편차 제곱의 총합 S 를

$$S = \sum (Y'_i - y_i)^2 = \sum [A_0 + (1/2)\xi + A_2\xi^2 - y_i]^2 \quad (11)$$

으로 하였을 때 S 가 최소로 될 필요 조건은,

$$\partial S / \partial A_0 = 0 \quad \partial S / \partial A_2 = 0 \quad (12)$$

이며, 이의 편미분을 통하여 다음 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \partial S / \partial A_0 &= \sum 2(A_0 + 1/2\xi_i + A_2\xi_i^2 - y_i) = 0 \\ \partial S / \partial A_2 &= \sum 2(A_0 + 1/2\xi_i + A_2\xi_i^2 - y_i)\xi_i^2 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

위의 식들을 정리하면 다음과 같은 A_0 와 A_2 에 관한 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} nA_0 + A_2 \sum \xi_i^2 &= \sum y_i - (1/2) \sum \xi_i \\ A_0 \sum \xi_i^2 + A_2 \xi_i^4 &= \sum \xi_i^2 y_i - (1/2) \sum \xi_i^2 \end{aligned} \quad (14)$$

따라서 상기 조건식들을 연립하여 풀므로서 근사함수의 계수 A_0 와 A_2 를 얻을 수 있으며, 따라서 이들 계수들을 식(3)에 대입함으로써 α 의 값을 간단히 결정할 수 있다.

4. 결과 및 검토

λ 의 값에 따라 수정된 최소 자승법을 이용하여 얻어진 계수들의 값을 Table 1에 나타내었다. A_0 와 A_2 의 합이 대부분 0.5로 일정한 값을 가지고 있으나, λ 가 작은 값을 가질수록 위의 값과 멀어진다. 즉 λ 가 작은 값은 경우에 x 좌표는 2차 함수로 근사화 할 수 없으며, 따라서 고차의 다항식이 요구된다고 볼 수 있다. 위 결과들은 Abdi등에 의하여 얻어진 결과와 비교하기 위하여 실선으로 표시한 실제함수와 함께 Fig. 3~9에 도시하였다. 이종재료의 재료특성치에 따라서 0에서 1사이로 변화하는 λ 가 중간 값을 가지는 경우에 두 방법 모두 별차이 없이 실제함수에 근접함을 보이고 있으나 λ 가 작은 값을 가지는 경우에 본 해석을 통하여 얻어진 결과가 Abdi등에 의한 결과 보다도 실제함수에 더욱 근접하고 있음을 알 수 있다. 그러나 앞에서 언급하였듯이 λ 가 0.25이하의 값을 가지는 경우에 2차함수로의 근사식은 다소 무리가 따름을 그림을 통하여 알 수 있다. 또한 λ 가 0.8의 값을 가지는 Fig. 7을 보면 Abdi등에 의하여 얻어진 결과는 실제함수로 부터 다시 이탈하는 경향을 보이고 있으나, 본 해석에서 얻은 결과는 거의 변함이 없으며, 오히려 λ 가 1.0에 이르기 까지 정확한 근사함수를 나타내어 주고 있다. 다음 크랙선단을 포함하는 변의 중앙절점의 최적 위치를 나타내어 주는 α 의 값은 식(3)으로 부터 Table

Table 1 A_i values computed by modified least square method for various λ values

λ	A_0	A_1	A_2
0.25	0.0553	0.5	0.4375
0.3	0.0974	0.5	0.4007
0.4	0.1778	0.5	0.3233
0.5	0.25	0.5	0.25
0.6	0.3137	0.5	0.1848
0.7	0.3696	0.5	0.1280
0.8	0.4186	0.5	0.0791
0.9	0.4618	0.5	0.0367
1.0	0.50	0.5	0.0

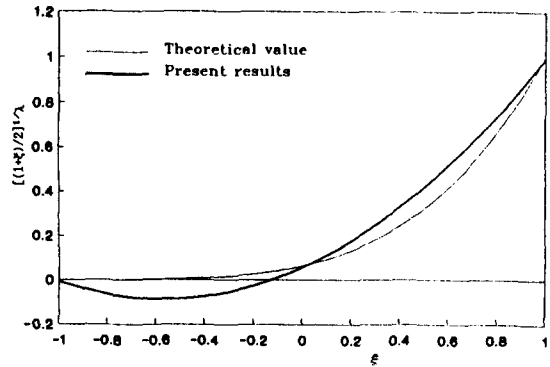


Fig. 3 Approximate values of a theoretical displacement($\lambda = 0.25$)

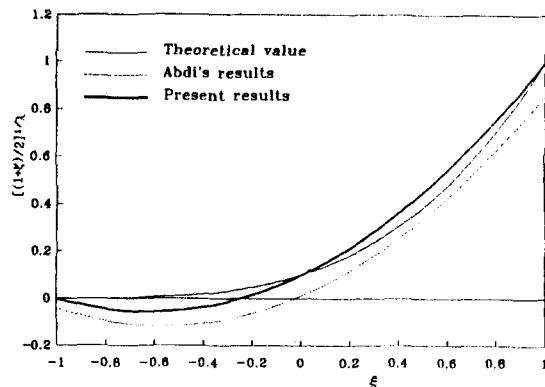


Fig. 4 Approximate values of a theoretical displacement($\lambda = 0.3$)

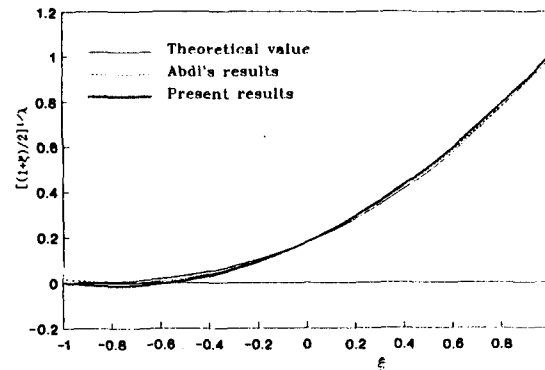


Fig. 5 Approximate values of a theoretical displacement($\lambda = 0.4$)

1의 A_0 의 값이 바로 α 의 값이 됨을 알 수 있다. 위 결과를 Abdi등이 Optimization method에 의하여 얻어진 결과와 함께 Table 2에 도시하였다.

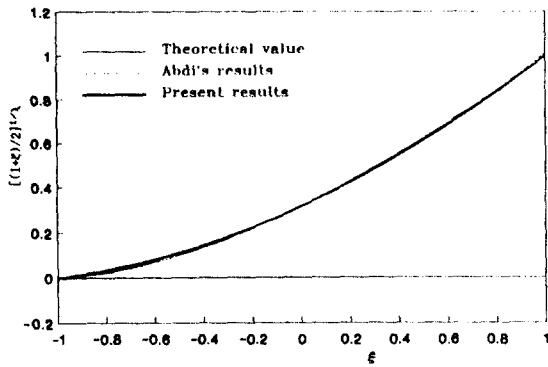


Fig. 6 Approximate values of a theoretical displacement($\lambda = 0.6$)

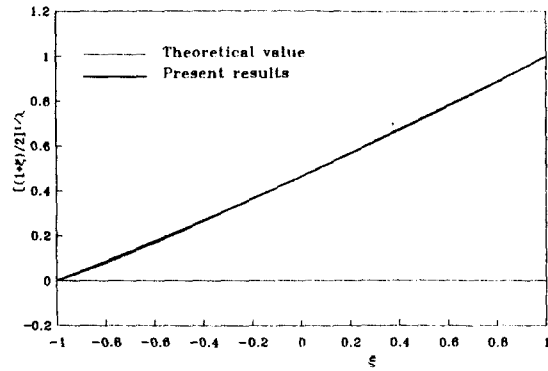


Fig. 8 Approximate values of a theoretical displacement($\lambda = 0.9$)

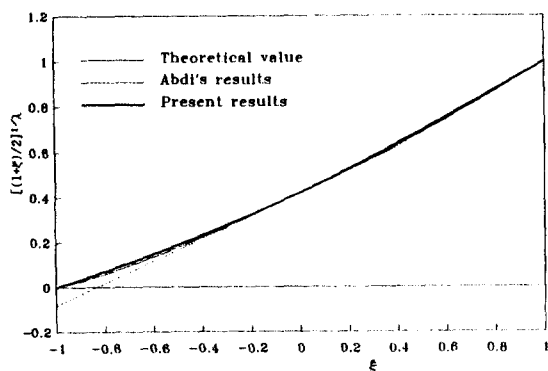


Fig. 7 Approximate values of a theoretical displacement($\lambda = 0.8$)

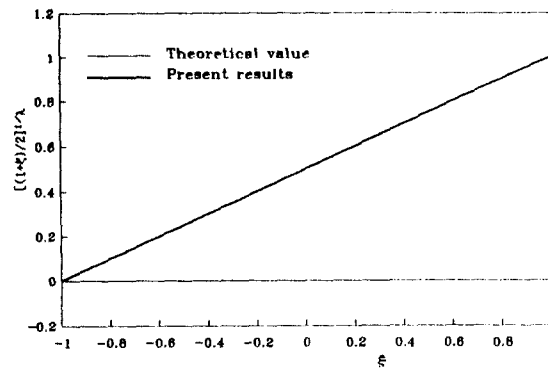


Fig. 9 Approximate values of a theoretical displacement($\lambda = 1.0$)

Table 2 α values for various λ values

λ	α (Abdi's results)	α (Present results)
0.25	****	0.0553
0.3	0.0984	0.0974
0.4	0.1772	0.1778
0.5	0.25	0.25
0.6	0.3145	0.3137
0.7	0.3707	0.3696
0.8	0.4198	0.4186
0.9	****	0.4618
1.0	****	0.50

5. 결 론

본 연구에서 제안된 수정된 최소자승법을 이용하므

로서, 두 이중탄성재료의 접합면에 수직인 크랙의 특이성 표시를 위한 8절점 등매개 요소 변의 중간절점의 최적 위치를 간편하고, 효율적으로 구할 수 있음을 확인하였다. 상기 방법은 기존의 방법보다도 더욱 넓은 λ 의 범위 ($0.25 < \lambda < 1.0$)에 걸쳐서 적용되어질 수 있으며, 또한 더욱 향상된 좌표근사식을 얻을 수 있다.

참 고 문 헌

[1] Lu,M.C. and Erdogan,F., "Stress Intensity Factors in Two Bonded Elastic Layers Containing Cracks Perpendicular to and on the Interface. I-Analysis", Engng. Frac. Mech., Vol.18 No.3, pp.491-506, 1983.
 [2] Cook,T.S. and Erdogan,F., "Stresses in Bonded Materials with a Crack Perpendicular to the Interface", Int. J.Engng.Science Vol.10, pp.677-697, 1972.

- [3] Zak,A.R. and Williams, M.L., →Crack Point Stress Singularities at a Bimaterial Interface~, *Trans. of ASME*, pp.142-153, March 1963.
- [4] Tracy,D.M. and Cook,T.S., →Analysis of Power Type Singularities Using Finite Elements~, *Int.J. Num.Meth.Engng.*, Vo1.11 No.8, pp.1225-1233,1977
- [5] Akin,J.E., →The Generalization of Elements with Singularities~, *Int.J.Num.Meth.Engng.*, Vo1.10, No. 6, pp.1249-1259, 1976.
- [6] Henshell,R.D. and Shaw,K.G., →Crack Tip Elements are Unnecessary~, *Int.J.Num.Meth.Engng.*, Vo1.9, pp.495-509, 1975
- [7] Barsoum, →On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics,~ *Int.J.Num. Meth.Engng.*, Vo1.10, No.1, pp.25-37,1976
- [8] Abdi, R.E. and Valentin,G., →Isoparametric Elements for a Crack Normal to the Interface Between Two Bonded Layers~, *Computers & Structures*, Vo1. 33, No.1, pp.241-248, 1989.