
 論 文

大韓造船學會論文集
 第29卷 第2號 1992年 5月
 Transactions of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 29, No. 2, May 1992

등가 비선형화 법에 의한 선박 횡요의 확률론적 예측

권순홍*, 정정환*, 김대웅**

A Stochastic Prediction of Rolling of Ships Using Equivalent Non-linear Method

by

Sun-Hong Kwon*, Jung-Han Chung* and Dae-Woong Kim**

요 약

불규칙 해상에서 횡파중 선체의 횡요 운동 응답을 threshold crossing 과정의 관점에서 연구하였다. 비 백색 잡음 기진력은 응답의 crossing 성질이 유지되는 크기의 백색 잡음 기진력으로 대체할 수 있다는 가정하에 등가의 백색 잡음 기진력으로 모델링 하였고 원래의 비선형 감쇄 함수를 복원하였다. 등가의 백색 잡음 기진력을 가지고 복원된 운동방정식으로부터 결합 확률 밀도 함수를 얻기 위해 등가 비선형화법(equivalent non-linearization method)을 사용하였다. 제시된 방법을 각종 계수들의 값을 변화시키면서 예측하고 이를 다른 논문의 결과와 비교하였다.

Abstract

The roll response of a ship to random beam seas is investigated in terms of the threshold crossing process. The non-white excitation process is modeled as an equivalent white-noise one based on the assumption that the upcrossing properties of the response can be approximately replaced by the excitation with a white noise process with a suitable intensity. Then the non-linear damping is reinstated. The reinstated equation of motion with the equivalent white-noise intensity is solved using the equivalent non-linear method to get the desired probability density function. The proposed scheme is tested extensively with varying coefficients.

발 표 : 1991년도 대한조선학회 추계연구발표회('91. 11. 16.)

접수일자 : 1991년 12월 10일, 재접수일자 : 1992년 2월 19일

* 정회원, 부산대학교 조선공학과

** 학생회원, 부산대학교 조선공학과

1. 서 론

본 연구에서는 불규칙 해상에서 선체의 비선형 횡요 운동방정식으로부터 threshold crossing 시간을 예측하는 방법에 대해 기술하였다. 복잡한 파중에 있는 선체의 횡요 운동방정식은 비선형성이 매우 강하므로 완전한 해석하는 이러한 비선형성 때문에 아직까지 구해지지 않고 있다.

과거에는 이러한 문제를 해석하기 위해 등가 선형화법(equivalent linearization method)[1], 섭동법(perturbation method)[2], functional representation 법[3,4] 등을 사용하였으나 그 결과는 잘 맞지 않거나 유효성에 많은 한계가 있었다.

다른 방법으로서 비선형계의 응답을 예측할 수 있는 Fokker-Planck-Kolmogorov(FPK)방법이 있다. 그러나 이 방법을 사용하기 위해서는 기진 모멘트가 백색 잡음이어야 한다는 제약이 따른다. 1985년 영국의 Dunne[5]은 이러한 제약을 극복하고 비백색 잡음의 기진 모멘트를 받는 비선형계를 해석할 수 있는 새로운 방법을 제시하였다. 그는 유용한 결과를 얻기 위하여 등가 선형화법과 FPK 테크닉을 결합한 후 등가선형화된 운동방정식중 복원력항에 원래의 비선형 복원력 함수를 다시 대입하여 계를 해석하고 그 결과를 threshold crossing rate를 예측하는데 적용하였다. 예측 결과는 시뮬레이션의 결과와 비교하여 검토되었다. 이 방법은 주어진 비백색잡음을 등가의 밀도를 가진 백색잡음으로 근사화할 수 있다는 가정에 기초를 두고 있다.

본 연구에서는 감쇄의 비선형성을 살리기 위해서 원래의 비선형 감쇄 함수를 다시 복원하였으며 이러한 백색잡음 기진 모멘트를 받는 비선형 운동방정식으로부터 결합 확률 밀도 함수를 구하기 위해 등가 비선형화법을 사용하였다.

2. 지배 방정식 및 예측 기준

만약 다른 모든 자유도의 영향을 무시한다면 불규칙 횡파중에서 선체의 횡요 운동방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{\phi} + D(\dot{\phi}) + R(\phi) = n(t) \tag{1}$$

여기서 ϕ 는 횡요각이고, $D(\dot{\phi})$ 은 감쇄 함수이며, $R(\phi)$ 는 복원력 함수를 나타낸다. 그리고 $n(t)$ 는 Gaussian과정으로서 평균은 0이고, $S(\omega)$ 의 스펙트럼을 가진다. 시간 단위는 감쇄가 없는 자유 진동의 횡요 진동수가 1이

되도록 선택했다. 감쇄 함수와 복원력 함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$D(\dot{\phi}) = C_1 \dot{\phi} + C_3 \dot{\phi}^3 \tag{2}$$

$$R(\phi) = \phi + K_3 \phi^3 \tag{3}$$

식(1)을 해석한다는 것은 해에 대한 통계적 정보를 결정한다는 의미를 가진다. 해에 대한 유용한 통계적 성질은 threshold crossing 확률이다. 그리고 본 연구에서 사용한 thresholds $\phi = \pm a$ 는 위험한 전복 가능 횡요각이라고 간주한다. $a > 0$ 인 threshold에 대한 횡요각의 단위 시간당 upcrossing 수는 다음과 같다[6].

$$\lambda(a) = \int_0^{\infty} \dot{\phi} f(a, \dot{\phi}) d\dot{\phi} \tag{4}$$

여기서 $f(a, \dot{\phi})$ 은 $\phi = a$ 일 때의 결합 확률 밀도 함수이고, upcrossing 사이의 평균 시간 $\mu(a)$ 는 $\lambda(a)$ 의 역수이다.

$$\mu(a) = \frac{1}{\lambda(a)} \tag{5}$$

이 방법은 비백색잡음 기진력을 등가의 밀도(J)를 가진 백색 잡음 기진력으로 근사화할 수 있다는 가정에 기초를 두고 있다. 따라서 적당한 J를 얻기 위해 먼저 등가 선형화법을 적용하여 주어진 비선형 운동방정식을 선형화해야 한다.

3. 등가선형화법

먼저 전통적인 방법으로 계를 선형화 한다. 이때 계산의 편리를 위해 운동방정식을 다음과 같이 바꾸어 둔다.

$$\ddot{\phi} + g(\phi, \dot{\phi}) = n(t) \tag{6}$$

원래의 비선형 운동방정식을 다음과 같은 등가의 선형 방정식으로 선형화하기 위해 식(6)에 등가 선형화 기법을 적용한다.

$$\ddot{\phi} + C_{eq} \dot{\phi} + K_{eq} \phi = n(t) \tag{7}$$

등가 선형화된 계의 방정식 (7)은 선형화 오차를 최소화 하는 선형 계수들을 구함으로써 결정된다.

$$\varepsilon = C_{eq} \dot{\phi} + K_{eq} \phi - g(\phi, \dot{\phi}) \tag{8}$$

최적 선형 계수들은 다음과 같다.

$$C_{eq} = \frac{E\{\dot{\phi}^2\}E\{\phi g(\phi, \dot{\phi})\} - E\{\phi \dot{\phi}\}E\{\dot{\phi} g(\phi, \dot{\phi})\}}{E\{\dot{\phi}^2\}E\{\phi^2\} - E^2\{\phi \dot{\phi}\}} \quad (9)$$

$$K_{eq} = \frac{2E\{\dot{\phi}^2\}E\{\phi g(\phi, \dot{\phi})\} - 2E\{\phi \dot{\phi}\}E\{\dot{\phi} g(\phi, \dot{\phi})\}}{2E\{\dot{\phi}^2\}E\{\phi^2\} - 2E^2\{\phi \dot{\phi}\}} \quad (10)$$

여기서 $E\{\}$ 는 기대치(expectation)를 나타낸다. 식(9)와 식(10)에 있는 기대치들은 횡요각과 횡요 각속도에 대한 확률 밀도 함수를 필요로 하므로 유용하지 않다. 따라서 본 연구에서는 초기값은 추측치를 대입하는 반복법을 사용하였다. 선형화된 계에 대한 각각의 평균 up-crossing 시간 즉, 스펙트럼이 $S(w)$ 인 비백색 잡음 기진 모멘트의 $\mu_{S(w)}(a)$ 와 밀도 J 를 가지는 백색 잡음 기진 모멘트의 $\mu_J(a)$ 는 각각의 기진 모멘트가 Gaussian 과정이라는 가정하에 다음과 같이 쉽게 구해진다.

$$\mu_{S(w)}(a) = 2\pi \frac{\sigma_{S1}}{\sigma_{S2}} \exp\left\{-\frac{a^2}{2\sigma_{S1}^2}\right\} \quad (11)$$

$$\mu_J(a) = 2\pi \frac{\sigma_{J1}}{\sigma_{J2}} \exp\left\{-\frac{a^2}{2\sigma_{J1}^2}\right\} \quad (12)$$

여기서,

$$\sigma_{S1}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S(\omega) d\omega$$

$$\sigma_{S2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |H(\omega)|^2 S(\omega) d\omega$$

$$\sigma_{J1}^2 = J \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega$$

$$\sigma_{J2}^2 = J \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |H(\omega)|^2 d\omega$$

여기서 $H(\omega)$ 는 등가 선형화된 계의 주파수 응답 함수이다.

$$H(\omega) = \frac{1}{[(K_{eq} - \omega^2) + iC_{eq}\omega]} \quad (13)$$

J 의 값은 아래의 오차 적분(error integral)을 최소화하도록 결정한다.

$$\int_0^{a_{max}} [\mu_{S(w)}(a) - \mu_J(a)]^2 da \quad (14)$$

여기서 a_{max} 는 적당히 큰 threshold이다. 이렇게 결정된 J 는 원래의 비백색 잡음 기진력과 같은 통계적인 성질을 주는 백색 잡음 기진력의 밀도가 된다. 만약 여기서 원

래의 비선형 감쇄 함수를 다시 복원한다면 식(1)은 다음과 같이 된다.

$$\ddot{\phi} + D(\dot{\phi}) + K_{eq}\phi = \sqrt{J}Z(t) \quad (15)$$

여기서 $Z(t)$ 는 백색 잡음 기진 모멘트를 나타낸다. 만약 식(15)의 결합 확률 밀도 함수를 구할 수 있다면 식(9)와 식(10)에 사용된 기대치들도 구할 수 있다. 그러므로 전체 과정은 결합 확률 밀도 함수가 수렴할 때까지 반복 계산을 수행하게 된다. 전 과정에 대한 흐름도를 Fig.1에 나타내었다.

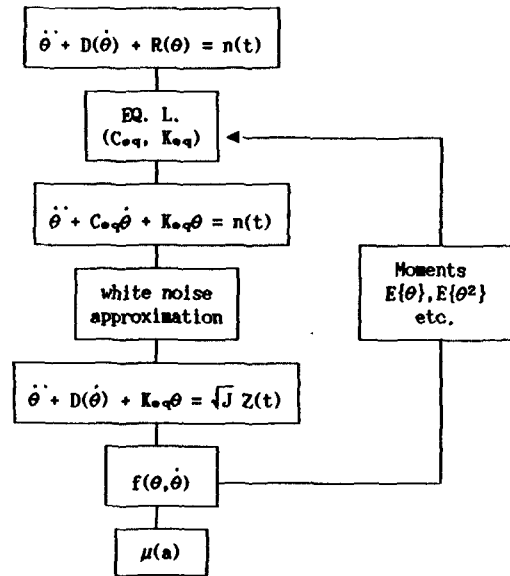


Fig.1 Structure of the prediction method

4. 등가 비선형화법

본 연구에서는 식(15)의 결합 확률 밀도 함수를 얻기 위해 Zhu[7]가 제시한 등가 비선형화법(equivalent nonlinear method)을 사용하였다. 여기서는 단지 개략적인 설명과 결과식만을 보였다. 좀 더 깊은 내용에 관심있는 독자는 문헌 [7]을 참조하기 바란다. 등가 비선형화법의 기본적인 개념은 원래의 비선형 지배방정식을 엄밀해가 존재하는 등가의 비선형 지배 방정식으로 근사화할 수 있다는 것이다. Zhu가 발표한 등가 비선형화법은 비백색 잡음 기진력을 받고 있는 준 보존계에 적용된다. 주어진 비선형계에 대하여 두 계의 평균 에너지가 같은 흐름 계수(drift coefficient)와 확산계수(diffusion coefficient)

를 가지도록 등가의 에너지 종속계(equivalent energy dependent system)를 결정한다. 만약 주어진 계의 복원력 함수가 변위(횡요각)에 대한 멱함수(power function of the displacement)의 형태를 가진다면 등가 비선형계의 응답은 해석적으로 구할 수 있다. Zhu의 방법을 식(15)에 적용하면,

$$f(\phi, \dot{\phi}) = A \exp\left(-\frac{3C_3}{4J}[\dot{\phi}^2 + K_{eq}\phi^2 + \frac{4C_1}{3C_3}]^2\right) \quad (16)$$

여기서 A는 정규화 상수(normalizing constant)이다.

5. 수치 계산의 결과

본 연구에서 사용한 백색 잡음 기진 모멘트는 비교를 위해 Dunne이 제시한 이상적인 테스트 스펙트럼(test spectrum)을 사용하였다.

$$S(\omega) = \begin{cases} \frac{PJ}{1+(P-1)|\omega-\omega_0|} & \omega < \omega_c \\ 0 & \omega > \omega_c \end{cases} \quad (17)$$

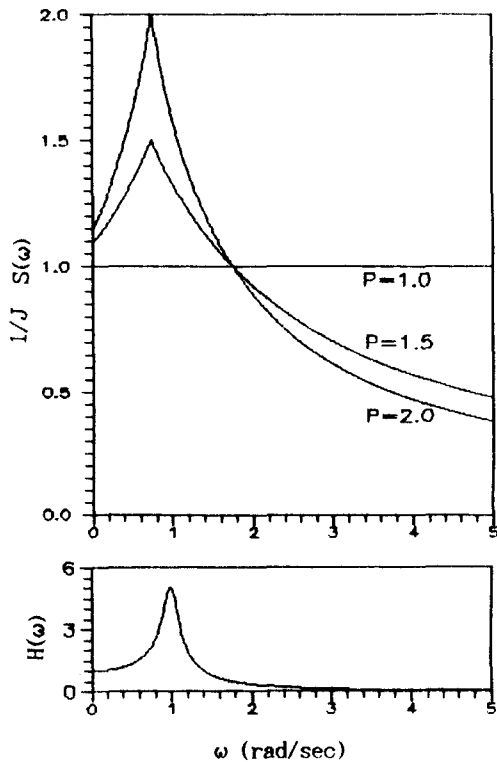


Fig.2 Test spectrum and Frequency Response function

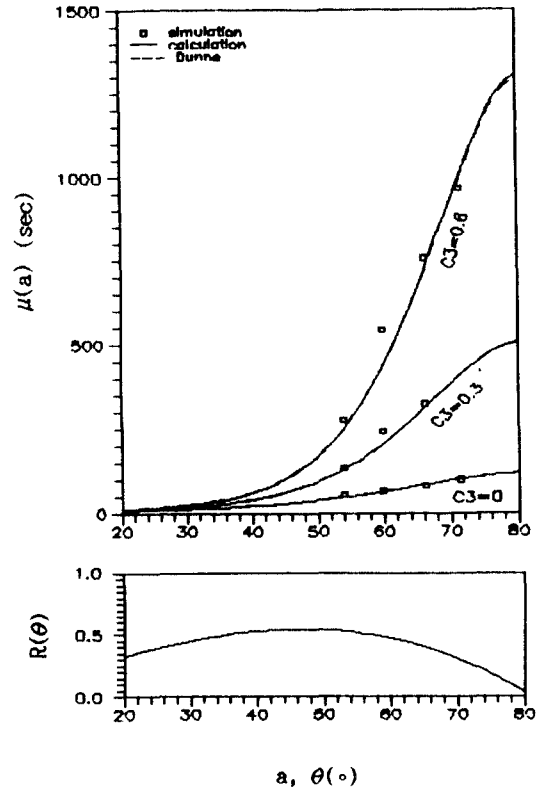


Fig.3 Mean upcrossing time VS. Threshold and Restoring function
(J = 0.07, C1 = 0.2, k3 = -0.5)

여기서 J, ω_0 와 P는 각각 크기, 위치 그리고 형상 파라미터를 나타내며, P = 1일 경우는 백색 잡음 기진력을 나타낸다. Fig.2에 테스트 스펙트럼과 그 밑에 등가 선형계에 대한 주파수 응답 함수를 보였다.

Fig.3은 threshold에 대한 평균 Upcrossing 시간을 나타낸 것으로서 백색 잡음의 밀도가 J = 0.07, 비선형 복원력 계수가 $K_3 = -0.5$, 선형 감쇄 계수가 $C_1 = 0.2$ 이며 비선형 감쇄 계수 C_3 가 각각 세가지의 다른 값을 가질 경우에 대한 계산 결과이다. 작은 사각형은 비교를 위해 Dunne이 계산한 시뮬레이션 결과를 나타낸 것이고, 점선은 Dunne이 제시한 방법으로 계산한 결과이며 실선은 본 연구에서 제시한 방법이다. Dunne의 것은 등가 선형화된 방정식중 복원력 항에 원래의 비선형 복원력 함수를 다시 대입하여 얻어진 결과이다. 예상한 대로 감쇄가 클수록 평균 upcrossing 시간이 길어졌다. 복원력에 대한 계의 비선형 영역을 보이기 위해 횡요각에 따른 복원력 함수를 아래 부분에 그렸다.

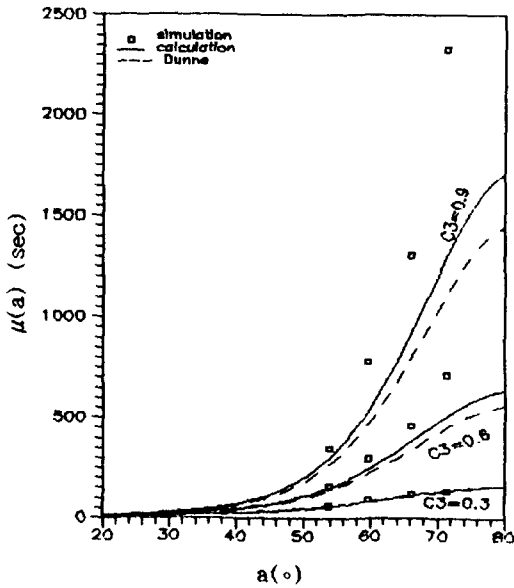


Fig.4 Mean upcrossing time VS. Threshold
($J = 0.05, C_1 = 0.02, k_3 = -0.5$)

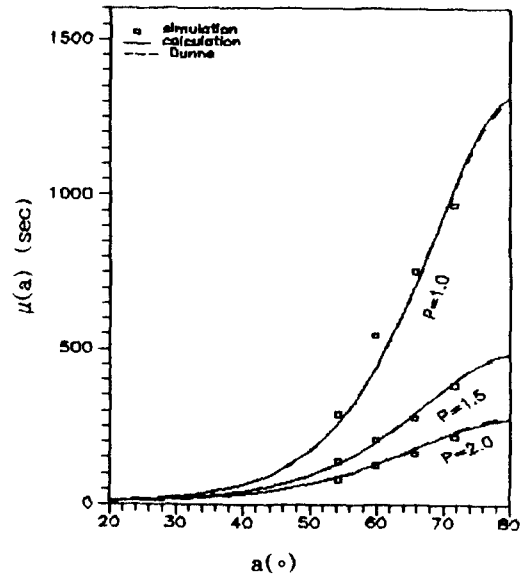


Fig.6 Mean upcrossing time VS. Threshold
($J = 0.07, C_1 = 0.2, C_3 = 0.6, k_3 = -0.5$)

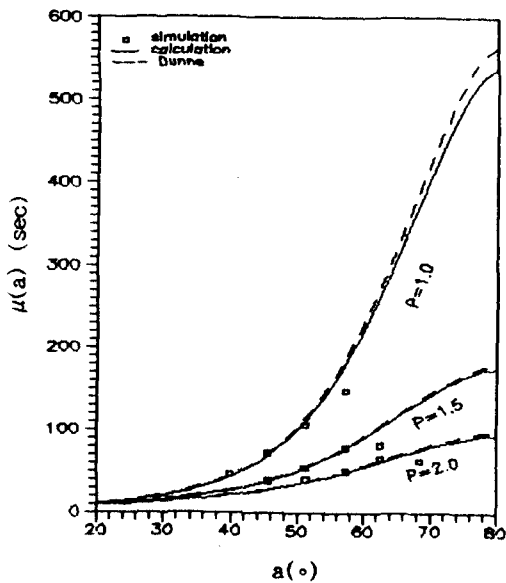


Fig.5 Mean upcrossing time VS. Threshold
($J = 0.09, C_1 = 0.4, C_3 = 0, k_3 = -0.5$)

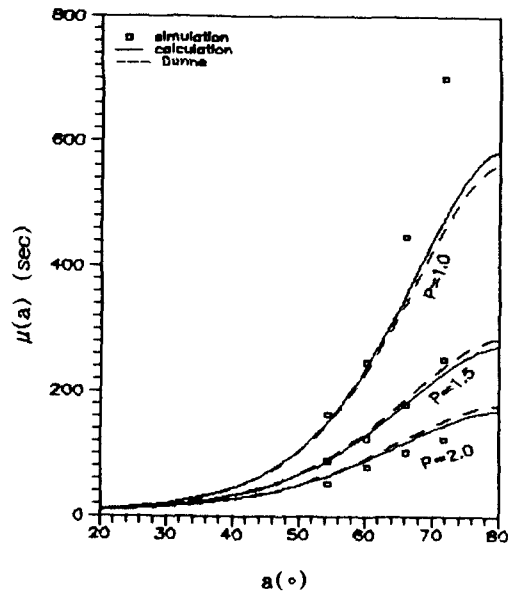


Fig.7 Mean upcrossing time VS. Threshold
($J = 0.05, C_1 = 0.02, C_3 = 0.6, k_3 = -0.5$)

Fig.4는 Fig.3과 유사한 경우로서 $J = 0.05$ 이고 $C_1 = 0.02$ 일 때의 계산 결과이다. 감쇄의 비선형성이 매우 강할 때로서 기대한 바와 같이 Dunne의 방법에 비해 본 연구에서 제시한 방법이 시뮬레이션의 결과에 더 잘 일치한다.

다음은 선형 감쇄의 경우로서 Fig.5에 그 결과를 보였다. 감쇄가 선형이므로 본 연구에서 제시한 방법이나 Dunne의 방법이 모두 시뮬레이션과 잘 일치한다.

Fig.6과 Fig.7은 모두 비백색 잡음 기진력에 대한 계산 결과이다. 각각 $J = 0.07, C_1 = 0.2, C_3 = 0.6$, 그리고 $J =$

0.09, $C_1 = 0.02$, $C_3 = 0.6$ 인 경우로서 역시 감쇄의 비선형성이 강할 때 본 연구의 방법이 Dunne의 방법보다 더 좋은 결과를 주고 있다.

6. 결 론

본 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 주어진 비백색 잡음 기진력은 적당한 밀도를 가진 백색 잡음 기진력으로 등가 근사화 할 수 있다.
- 2) 계의 감쇄가 비선형성이 강할 때는 본 연구에서 제시한 방법 즉, 원래의 비선형 감쇄를 다시 복원하는 방법이 좀 더 나은 결과를 얻는다.

참 고 문 헌

- [1] Kaplan, P., "Lecture Notes on Nonlinear Theory of Ship Roll Motion in a Random Seaway", *Proceedings 11th International Towing Tank Conference*, Tokyo, Japan, pp 393-396, 1966
- [2] Flower, J.O., "A Perturbational Approach to Non-Linear Rolling in a Stochastic Sea", *International Shipbuilding Progress*, Vol.23, pp 209-212, 1976
- [3] Hasselman K., "On Nonlinear Ship Motions in Irregular Seas", *Journal of Ship Research*, Vol.10, No.1, pp64-68, 1966.
- [4] Vassilopoulos, L., "The Application of Statistical Theory of Nonlinear Systems to Ship Motion Performance in Random Seas", *International Shipbuilding Progress*, Vol.14, No.150, pp 54-65, 1976
- [5] Dunne, J.F., "Ship Roll Response and Capsize Prediction in Random Beam Seas", Ph.D. thesis, Univ. of Bristol, UK, 1982.
- [6] Soong, T.T., "Random Differential Equations in Science and Engineering", *Academic Press*, 1973.
- [7] Zhu, W.Q. and J.-S. Yu, "The Equivalent Non-linear System Method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.129, No.3, pp 385-395, 1989