

# 모델식의 2차 근사에 의한 정량적인 초음파 단층 촬영 알고리즘

## (A Quantitative Ultrasound Tomography Algorithm Via the Second-Order Approximation of the Model Equation)

金 煥 宇\*, 金 永 吉\*

(Whan Woo Kim and Young Gil Kim)

### 要 約

1차 본 근사식, 1차 라이토프 근사식, 2차 본 근사식으로부터 계산된 산란파를 비교함으로써 2차 본 근사식의 초음파 단층 영상화 알고리즘에의 적용의 타당성을 검토하였다. 2차 본 근사식은 다른 두 근사식보다 어떤 종류의 실험 물체에 대하여서는 훨씬 좋은 결과를 보여주었다. 2차 본 근사식을 이용하여 해상도가 1화소×1화소에 이르는 실험 영상을 사용하여 만족할 만한 재구성 영상을 얻을 수 있었다. 입사각이 제한되어 있을 경우에는 다중 주파수 입사장을 사용하여 물체를 재구성할 수 있음을 보였다.

### Abstract

The validity of the application of the second-order Born equation to the ultrasound tomography algorithm is studied by comparing the scattered fields computed using the first-order Born equation, the first-order Rytov equation, and the second-order Born equation. The second-order Born equation turns out to provide more desirable results than the other two equations for a certain group of test objects. Phantom images with resolutions upto 1 pixel×1 pixel are satisfactorily reconstructed using the second-order Born equation. It is shown that when the view angle is limited, good reconstruction results are also obtained using multi-frequency incident fields.

### I. 서 론

초음파를 이용하여 물체의 단층 영상을 비파괴적으로 얻고자 제안된 회절 단층 영상화법(diffraction tomography)은 비선형인 음파 전파 모델식을 선형화시켜서 사용하였다.<sup>[1]</sup> 모델식에는 산란장(scattered field)을

변수로 하는 헬름홀츠(Helmholtz) 방정식과 산란 위상(scattered phase)를 변수로 하는 리카티(Riccati) 방정식이 있는데 헬름홀츠 방정식의 선형 근사식이 본(Born) 근사식이며 리카티 방정식의 선형 근사식이 라이토프(Rytov) 근사식이다.<sup>[2]</sup> 본 근사식은 입사장(incident field)이 물체를 통과하면서 발생하는 총 위상 변위가 클 때에는 오차가 크기 때문에 굴절율의 변화가 크면서 크기가 작은 물체의 영상화에 알맞고 라이토프 근사식은 이와는 다르게 한 파장당의 위상 변위가 문제가 되기 때문에 굴절율의 변화가 완만하면서 큰 물체에 잘 적용된다는 것이 알려져 있다.<sup>[2]</sup> 그러나 회절 단층 영상화법은 의료용 영상을 얻기에는 부적합하다는 것이 알려진

\*正會員, 忠南大學校 電子工學科  
(Dept. of Elec. Eng., Chungnam Nat'l Univ.)

接受日字: 1992年 5月 6日

(※ 이 논문은 1990년도 학술 진흥 재단 지방대 육성 연구비 지원에 의한 연구 결과임)

이후로 근사를 쓰지 않는 정확한 모델식을 사용하는 역산란법(inverse scattering algorithm)이 연구되었다.<sup>[3]</sup> 그러나 이 역산란법에서 해결하여야 할 문제로써 우선 지나치게 많은 메모리 용량과 계산 시간을 꼽을 수 있다.

본 논문에서는 선형 본 근사식으로부터 구한 근사 산란장으로 사용하여 2차 본 근사식을 만들고 이식을 사용하여 단층 영상을 얻는 알고리즘을 서술하였다. 2차 본 근사식의 장점을 설명하고 이를 이용한 전산 모의 실험 결과를 제시하였다. 입사파와 측정기의 방향이 제한된 경우에 다중 주파수를 사용하여 영상을 얻을 수 있음을 보였다.

II. 이 론

1. 모델식

생체의 연조직과 같은 매질을 초음파가 통과 할 때 성립하는 모델식은 비선형 헬름홀츠 방정식으로서 다음 식으로 주어진다.<sup>[2]</sup>

$$\nabla^2 f_{wp}(r) + k_o^2 f_{wp}(r) = -k_o^2 q(r) f_{wp}(r) \tag{1}$$

(1)식에서  $f_{wp}$ 은 음압장(acoustic pressure field)을 나타내고  $k_o$ 는 입사파의 물에서의 파수이며 침자  $w$ 와  $p$ 는 각각 입사파의 각 주파수(angular frequency)와 방향을 나타낸다.  $q(r)$ 은 산란 포텐셜인데 매질의 밀도를 1, 매질에서의 음압장의 감쇄를 0으로 가정하면  $q(r)$ 은 다음식으로 주어진다.<sup>[2]</sup>

$$q(r) = 1 - \frac{C_o^2}{C^2(r)} \tag{2}$$

(2)식에서  $C_o$ 는 물에서 음파의 속도,  $C(r)$ 은 물체 내에서의 음파의 속도를 나타낸다. (1)식의 음압장  $f_{wp}(r)$ 은 입사장  $f^i_{wp}(r)$ 과 산란장  $f^s_{wp}(r)$ 의 합으로 주어진다.

$$f_{wp}(r) = f^i_{wp}(r) + f^s_{wp}(r) \tag{3}$$

입사장  $f^i_{wp}(r)$ 은 산란을 일으키는 물체가 없을 때 즉  $q(r)=0$ 일 때의 헬름홀츠 방정식의 해이므로 다음 식이 성립한다.

$$\nabla^2 f^i_{wp}(r) + k_o^2 f^i_{wp}(r) = 0 \tag{4}$$

(3)식과 (4)식을 (1)식에 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\nabla^2 f^s_{wp}(r) + k_o^2 f^s_{wp}(r) = -k_o^2 q(r) f_{wp}(r) \tag{5}$$

여기에서 그린 함수(Green's function)를 써서 (5)식을 리프만-슈빙거(Lippmann-Schwinger) 적분식 형태로 바꾸면 다음과 같다.

$$f^s_{wp}(r) = -k_o^2 \int g_w(r-r') q(r') f_{wp}(r') dr' \tag{6}$$

(6)식에서  $g_w(r)$ 은 그린 함수를 나타낸다. (6)식을 컴퓨터로 풀기 위해서는 이산화 과정이 필요하다.

2. 이산화

(6)식을 썩크 기저 함수 모멘트 법(sinc function basis moment method)을 써서 이산화 시키면 다음과 같다.<sup>[3]</sup>

$$f^s_{upm} = \sum_j D^i_{umj} q_j f_{upj} \tag{7}$$

(7)식에서  $p=1, 2, \dots, P, m=1, 2, \dots, M, j=1, 2, \dots, N, w=1, 2, \dots, W$ 이며

$$f^s_{upm} = f^s_{up}(r_m) \tag{8}$$

$$D_{umj} = -k_o^2 \int g_w(r_m-r') T(r'-r_j) dr' \tag{9}$$

$$q_j = q(r_j) \tag{10}$$

$$f_{upj} = f_{up}(r_j) \tag{11}$$

를 각각 나타낸다. (9)식에서  $T(r)$ 은 썩크 기저 함수이다. (7)식을 행렬과 벡터로 표현하기 위하여 다음과 같은 행렬과 벡터를 도입하자.

$$f^s_{up} = [ f^s_{upm} ], \text{ 길이 } M \text{인 벡터} \tag{12}$$

$$D_u = [ D_{umj} ], \text{ } M \times N \text{ 행렬} \tag{13}$$

$$Q = \text{diag} [ q_j ], \text{ } N \times N \text{ 주축 행렬} \tag{14}$$

$$f_{up} = [ f_{upj} ], \text{ 길이 } N \text{인 벡터} \tag{15}$$

(12)-(15)식을 쓰면 (7)식은 다음과 같이 표현된다.

$$f^s_{up} = D_u Q f_{up} \tag{16}$$

(16)식은 근사가 없는 정확한 식이며 이로부터 다음과 같은 근사식들이 얻어진다.

### 3. 1차 본 근사식

(16)식은 산란포텐셜  $Q$ 와 음압장  $f_{wp}$ 가 모두 미지의 변수이기 때문에 비선형식이 된다. 약한 산란을 가정하면 산란장의 크기가 입사장의 크기보다 매우 작다고 할 수 있고 이를 (3)식에 적용하면 음압장  $f_{wp}$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f_{wp} \approx f_{wp}^i \quad (17)$$

(17)식을 (16)식에 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$f_{wp}^s = D_w Q f_{wp}^i \quad (18)$$

(18)식은 선형식이며 이를 1차 본 근사식이라고 부른다.

### 4. 1차 라이트프 근사식

$s_{wp}(r)$ 이 산란위상을 나타낸다고 하면 음압장  $f_{wp}(r)$ 은 다음 식으로 쓸 수 있다.

$$f_{wp}(r) = f_{wp}^i(r) \exp [s_{wp}(r)] \quad (19)$$

(19)식을 (5)식에 대입하면 다음과 같은 리카티 방정식을 얻을 수 있다.

$$f_{wp}^i(r) s_{wp}(r) = -k_0^2 \int g_w(r-r') q(r') [f_{wp}^i(r') + (\nabla s_{wp} \cdot \nabla s_{wp})(r')] dr' \quad (20)$$

라이트프 근사식은  $(\nabla s_{wp} \cdot \nabla s_{wp})(r) = 0$ 으로 놓음으로써 얻어진다.

$$f_{wp}^i(r) s_{wp}(r) = -k_0^2 \int g_w(r-r') q(r') f_{wp}^i(r') dr' \quad (21)$$

(21)식을 앞에서와 같이 이산화시키면 행렬과 벡터를 사용하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$s_{wp} = [F_{wp}^i]^{-1} D_w Q f_{wp} \quad (22)$$

(3), (19), (22)식을 합하여 산란과  $f_{wp}^s$ 는 다음 식으로 얻을 수 있다.

$$f_{wp}^s = f_{wp}^i \exp [ (F_{wp}^i)^{-1} D_w Q f_{wp} ] - f_{wp} \quad (23)$$

### 5. 2차 본 근사식

1차 본 근사식에 의하여 계산된 산란파를  $f_{wp}^{sB}$ 라고 하자. (18)식에 의하여  $f_{wp}^{sB}$ 는 다음과 같다.

$$f_{wp}^{sB} = D_w Q f_{wp}^i \quad (24)$$

1차 본 근사식은 산란과  $f_{wp}^s = 0$ 으로 가정하고  $f_{wp} = f_{wp}^i$ 을 사용하는데 비하여 2차 본 근사식은  $f_{wp}^s = f_{wp}^{sB}$ 를 사용한 식이다. 따라서 2차 본 근사식은 다음 식과 같이 된다.

$$f_{wp}^s = D_w Q (f_{wp}^i + f_{wp}^{sB}) = D_w Q (I + D_w Q) f_{wp}^i \quad (25)$$

(25)식은 측정기로부터 측정된 산란 데이터  $f_{wp}^s$ 와 입사장  $f_{wp}^i$ 를 가지고 미지의 산란 포텐셜  $Q$ 를 구하는 데 있어서 비선형식이지만 미지의 변수 음압장  $f_{wp}$ 를 제거시켰기 때문에 정확한 식 (16)과는 재구성 알고리즘의 계산량에서 많은 차이가 있다.

## III. 재구성 알고리즘

(25)식을 사용하여 측정된 산란과  $f_{wp}^s$ 로부터 산란 포텐셜  $Q$ 를 구하기 위하여 뉴턴-랩슨 법을 사용하는데 잔여치(residual) 벡터  $r_{wp}(q)$ 는 다음 식으로 주어진다.<sup>[3]</sup>

$$r_{wp} = f_{wp}^s - D_w Q (I + D_w Q) f_{wp}^i \quad (26)$$

따라서 자코비안(Jacobian) 행  $\nabla r$ 은 다음과 같다.

$$\nabla r = -D_w (I + D_w Q) F_{wp}^i - D_w Q D_w F_{wp}^i = -D_w (I + D_w Q + Q D_w) F_{wp}^i \quad (27)$$

뉴턴-랩슨 알고리즘에서  $n$ 번째 해의 이동(displacement)  $\delta q^{(n)}$ 은 다음과 같은 선형 방정식을 풀어서 구할 수 있다.

$$\nabla r^{(n)} \delta q^{(n)} = -r^{(n)} \quad (28)$$

(28)식에서  $\nabla r^{(n)}$ 과  $r^{(n)}$ 은 각각  $n$ 번째의 근사해  $Q^{(n)}$ 을 (26)식과 (27)식에 대입하여 구할 수 있다.  $n+1$  번째 근사해 벡터  $q^{(n+1)}$ 은 다음 식에서 구하여진다.

$$q^{(n+1)} = q^{(n)} + \delta q^{(n)} \quad (29)$$

선형 방정식 (28)을 푸는데 있어서 자코비안 행렬 (27)의 크기를 고려하여 행렬을 저장할 필요가 없는 선형 공

액 경사(linear conjugate gradient) 알고리즘<sup>[4]</sup>을 사용하였다. 정확한 식(16)을 사용한 역산란 해법<sup>[3]</sup>과 2차 근사식 방법을 자코비안 행렬의 크기 면에서 비교하여 보면 본 방법은 음압과 벡터  $f_{wp}$ 를 변수로서 사용하지 않기 때문에  $\delta f_{wp}$ 에 대한 식을 풀 필요가 없어지고 자코비안 행렬의 크기를 크게 줄일 수 있다. 따라서 선형 방정식(28)을 푸는데 필요한 계산량이 훨씬 줄어들 뿐만 아니라 (25)식이 (16)식 보다 비선형 정도가 작기 때문에 뉴턴-랩슨 알고리즘의 수렴 속도 또한 많이 개선되리라고 기대할 수 있다.

IV. 시뮬레이션 결과

1. 산란파의 오차 비교

위에서 설명한 세가지 근사식 (18), (23), (25)의 정확한 정도를 비교하기 위한 방법으로 각 근사식으로부터 계산한 산란장의 정확한 식 (16)으로 계산한 산란장에 대한 상대 오차를 구하는 방법을 선택하였다. 본 시뮬레이션에서 사용한 실험 물체(test object)는 균질 원통형 물체를 사용하였고 반경과 산란 포텐셜의 크기를 변화시켜 가면서 산란장을 계산하였다. 입사파의 주파수는 1MHz이고 1 화소의 크기는 1/4 파장이다. 계산된 결과는 표 1에서 3까지에 나타내었다. 표 1-3에서 알 수 있는 것은 우선 모든 경우에 있어서 1차 라이토프 근사식과 2차 본 근사식이 1차 본 근사식보다 우수하다는 것이다. 단위 길이 당 위상 변화가 작은 경우에 다시 말하면 q의 값이 작을 경우에는 1차 라이토프 근사식이 2차 본 근사식보다 우수하고 q의 값이 커질수록 2차 본 근사식이 라이토프 근사식보다 더 좋은 결과를 보여준다. 그러나 표 2-3의 마지막 열에서 보는 것처럼 전체 위상 범위 즉 반경과 q 값의 곱이 너무 커지면 2차 본 근사식은 많은 오차를 발생시킴을 알 수 있다. 균질 원통형 물체를 사용하였으므로 1차 라이토프 근사식의 경우에 같은 q 값에 대하여는 오차가 물체의 크기에 큰 영향을 받지 않는다는 결과는 서론에서 언급한 바를 뒷받침하여 주는 것이다. 2차 본 근사식이 다른 근사식에 비하여 가장 우수한 표 3의 q=0.1, 반경 5 화소인 경우의 계산된 산란장의 모양을 그림 1에 보였다.

2. 재 구성 결과

앞의 산란파의 오차 계산 결과에서 2차 본 근사식은 크기가 작고 q의 값이 큰 물체에 대하여 상대적으로 좋은 결과를 보여 주었으므로 재구성을 위한 실험 물체로서 가느다란 사각 기둥들의 집합으로 선정하였다. 그림 2(a)에 이 실험 물체를 보였다. 그림에서 전체 격자는 32화소

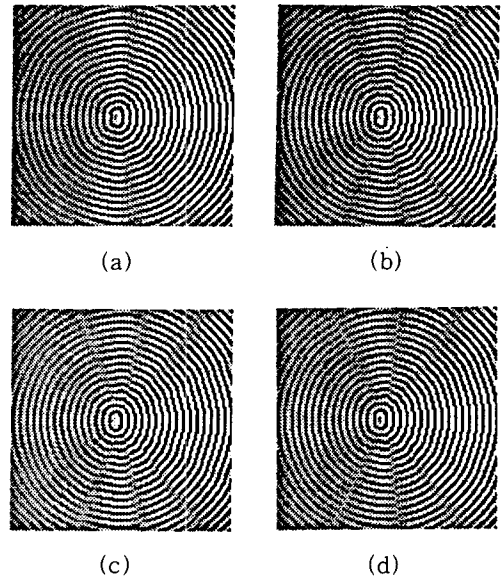


그림 1. 계산된 산란장(q=0.1, 반경 5 화소)

- (a) 정확한 식
- (b) 1차 본 근사식
- (c) 1차 라이토프 근사식
- (d) 2차 본 근사식에 의한 결과

Fig. 1. Computed scattered fields(q=0.1, radius of 5 pixels) : Results using.

- (a) the exact equation,
- (b) the first-order Born equation,
- (c) the first-order Rytov equation,
- (d) the second-order Born equation.

표 1. 계산된 산란파의 오차(%) (q=0.01)

Table 1. Relative errors in computed scattered fields(%) (q=0.01).

반경(화소수)	1차 본 근사	1차 라이토프 근사	2차 본 근사
10	6.9	2.3	0.3
30	19.6	1.8	2.8
50	30.2	1.5	6.7

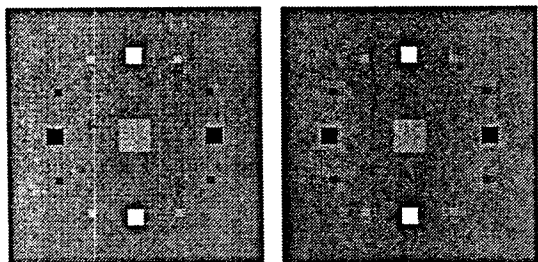
표 2. 계산된 산란파의 오차(%) (q=0.05)

Table 2. Relative errors in computed scattered fields(%) (q=0.05).

반경(화소수)	1차 본 근사	1차 라이토프 근사	2차 본 근사
2	7.7	7.0	0.5
6	21.4	11.5	3.3
10	35.1	11.4	8.7
20	68.9	10.7	33.5

표 3. 계산된 산란파의 오차(%) ( $q=0.1$ )  
 Table 3. Relative errors in computed scattered fields(%) ( $q=0.1$ ).

반경(화소수)	1차 본 근사	1차 라이트프 근사	2차 본 근사
1	8.2	0.8	0.6
3	22.3	18.4	3.7
5	36.3	22.9	9.5
10	71.8	23.6	35.6



(a) (b)  
 그림 2. 재구성 결과  
 (a) 실험 물체  
 (b) 재구성 물체  
 Fig. 2. Reconstruction results.  
 (a) Test object,  
 (b) reconstructed object.

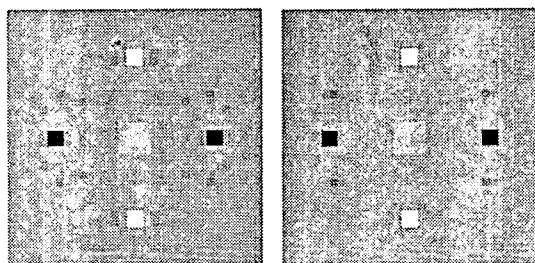
$\times 32$ 화소이고 격자 안의 작은 사각형들의 한 변의 길이는 가장 작은 것에서부터 시작하여 각각 1화소, 2화소, 4화소이다. 여기에서 색깔이 밝은 사각형일수록 큰  $q$  값을 가진다. 사각형 밝기 순으로  $q$  값을 열거하면 가장 어두운 것에서부터 시작하여  $q=-0.1, -0.03, 0.03, 0.1$ 이고 바탕은  $q=0$ 이다.

재구성 영상을 얻기 위하여 먼저 그림 2(a)의 실험 물체에 대하여 측정기에서의 산란장을 계산하고 이 산란장으로부터 2차 본 근사식을 이용한 재구성 알고리즘을 사용하여 물체를 재구성하였는데 그림 2(b)에 보인 것처럼 좋은 결과를 얻을 수 있었다. 입사장은 1MHz 단일 주파수 평면파를 사용하였고 입사장은 360°를 32 등분한 32 방향에서 입사하는 것으로 생각하였다.

3. 다중 주파수를 사용한 결과

인체의 내부 영상이나 지하 탐사용 영상을 얻는 경우에 여러가지 이유에 의해서 입사파 및 측정기의 방향이 제한된 상황을 가상할 수 있다. 입사 방향의 제한 때문에 충분한 산란 데이터를 얻을 수 없을 경우 입사장의 주파

수를 변화시켜서 충분한 산란 데이터를 얻을 수 있고 본 연구의 알고리즘은 이러한 다중 주파수 산란 데이터를 가지고 재구성 영상을 만들 수 있다. 상하좌우 4 방향으로 입사각이 제한된 경우의 재구성 영상을 그림 3에 보였다. 8개의 주파수를 사용하였는데 그림 3(a)의 경우에는 0.1-1.0MHz를 8 등분하여 사용하였다. 그림 3(a)에 보인 것처럼 한 변이 1화소인 가장 작은 사각형의 영상이 상실된 것을 알 수 있는데 이는 주파수가 낮은 경우에는 파장이 너무 길어서 작은 물체는 산란 데이터에 별로 영향을 주지않는 것으로 생각되었다. 따라서 다음에는 0.5-1MHz를 8 등분한 8 주파수를 사용하였는데 그림 3(b)에서 보는 것처럼 1 화소 사각형도 재구성되었고 그림 3(a)보다 더 개선된 영상을 얻을 수 있었다. 입사각이 더욱 제한되어 1 방향만 가능한 경우 다시 말하면 반사(reflection) 데이터만을 얻을 수 있는 상황도 있을 수



(a) (b)  
 그림 3. 재구성 결과 : 사용 주파수  
 (a) 0.1-1MHz  
 (b) 0.5-1MHz  
 Fig. 3. Reconstruction results : Frequencies of  
 (a) 0.1-1MHz,  
 (b) 0.5-1MHz are used.

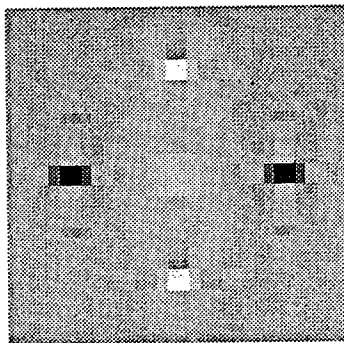


그림 4. 재구성 결과. 입사장의 방향은 아래 방향임  
 Fig. 4. Reconstruction results. The incident field is insonified from the bottom.

있고 본 알고리즘은 이 경우에도 비교적 좋은 영상을 얻을 수 있었다. 그림 4에 재구성 결과를 보였는데 이는 입사각이 아래 쪽한 방향이고 사용 주파수는 0.1-1MHz를 32 등분한 32 주파수를 사용하였다. 동일한 알고리즘을 균질 원통형 물체에 대하여 적용시켜 보았는데 그 결과를 그림 5에 보였다. 그림 5의 원통은 반경 10 화소,  $q=0.04$ 인 물체이다. 입사각 및 사용 주파수는 그림 4의 경우와 동일하다.

각각 사용하여 산란파를 구하고 원래의 정확한 비선형식을 사용한 결과와 비교함으로써 2차 본 근사식의 효용성을 검토하였다. 그 결과 물체의 크기가 작고 음파에 대한 굴절율이 큰 물체에 대해서는 2차 본 근사식이 다른 두식에 비하여 더 좋은 결과를 얻을 수 있음을 알았다. 따라서 2차 본 근사식을 사용한 영상화에 적합한 물체를 선정하여 재구성 알고리즘을 사용한 결과 해상도가 1화소×1화소에 이르는 좋은 영상을 얻을 수 있었다. 또한 입사각의 방향이 제한되어 있을 경우에는 입사각의 주파수를 다중화하여 재 구성 영상을 얻을 수 있었다.

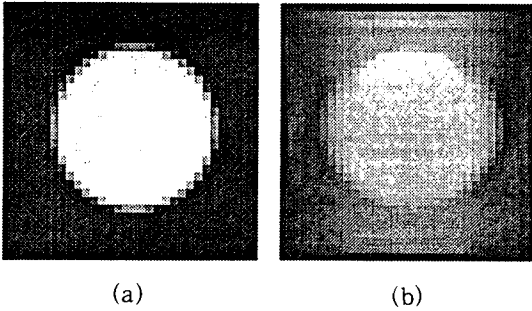


그림 5. 재구성 결과  
(a) 실험 물체  
(b) 재구성 물체

Fig. 5. Reconstruction results.  
(a) Test object,  
(b) reconstructed objects.

V. 결 론

1차 본 근사식, 1차 라이트프 근사식, 2차 본 근사식을

参 考 文 献

[1] R. K. Mueller, M. Kaveh, and G. Wade, "Reconstructive tomography and application to ultrasonics," *Proceedings of IEEE*, vol. 67, no. 4, pp. 567-587, 1979.

[2] M. Slaney, A. C. Kak, and L. E. Larson, "Limitation of imaging with first order diffraction tomography," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-32, no. 8, pp. 860-873, 1984.

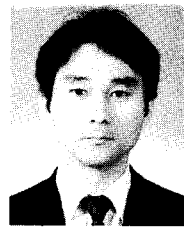
[3] 김환우, "비선형 테크닉을 이용한 초음파 역산란 단층 촬영 방식," *전자공학회논문지*, 제 28권, 제 8호, pp. 600-605, 1991.

[4] M. R. Hestenes, "The conjugate-gradient method for solving linear systems," *Proceedings of Symposia on Applied Mathematics*, vol. VI, Numerical Analysis, pp. 83-102, 1956.

著 者 紹 介



金煥宇 (正會員)  
1954年 9月 20日生. 1977年 2月 서울대 전자공학과(공학사). 1979年 2月 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(석사). 1988年 6月 University of Utah, Electrical Engineering(Ph. D.). 1983年 4月~1989年 3月 충남대학교 전자공학과 조교수. 1989年 4月~현재 충남대학교 전자공학과 부교수. 주관심분야는 초음파 영상, 역산란법, 신호처리 등임.



金永吉 (正會員)  
1960年 2月 7日生. 1984年 2월 충남대학교 전자교육공학과(공학사). 1984年 3月~현재 한국표준과학연구원 비파괴평가연구실 연구원. 주관심분야는 초음파영상, 역산란법, 신호처리 등임.