

# 모델정합과 보간 알고리즘을 이용한 혼합된 감도함수의 $H^\infty$ 최적화

## ( $H^\infty$ Optimization of Mixed Sensitivity Function using Model-Matching and Interpolation Algorithm)

尹 漢 五\*, 朴 烘 培\*\*

(Han O Yun and Hong Bae Park)

### 要 約

선형 다변수시스템에서 혼합된 감도함수 행렬의  $H^\infty$ -norm을 최소화하는 건설한 최적제어기 설계를 위한 알고리즘을 제안하였다. 즉, 보간이론을 이용하기 위하여 모델정합에서의 2블럭문제를 1블럭문제로 간략화하여 주어진 임의의 최소화값  $\gamma$ 에 대해, 혼합된 감도함수 행렬의  $H^\infty$ -norm이  $\gamma$ 보다 작게되며 섭동을 가진 시스템을 안정화시키고  $H^\infty$  최적화를 꾀한 제어기를 설계하였다.

### Abstract

In this paper, we solve the problem of designing a robust optimal controller which minimizes the  $H^\infty$ -norm of the mixed sensitivity function matrix for linear multivariable systems. For a given minimized value,  $\gamma > 0$ , an algorithm of finding all stabilizing controllers, such that the  $H^\infty$ -norm of the mixed sensitivity function matrix is less than  $\gamma$ , is developed. The proposed algorithm, which is based on the model-matching and the interpolation theory, can be used for the  $H^\infty$ -optimization problem.

### I. 서 론

폐루프 시스템의 건설한 안정성 문제에 관한 연구가 최근에 상당한 관심을 받고 있다. 특히, 불확실성을 가지는 시스템의 건설성에 대한  $H^\infty$ -최적화 이론의 연구가 활발히 진행중이다. 케환시스템의  $H^\infty$  문제는 1981년 Zames<sup>[1]</sup>에 의해 처음으로 제시되었고,

1984년 Chang과 Pearson<sup>[2]</sup>에 의해  $H^\infty$  문제를 풀기 위한 Nevanlinna-Pick 행렬 보간법이 개발되었다. 1984년에는 Glover<sup>[3]</sup>에 의해서 주파수 영역에서의 해석과는 달리 상태공간에서의 새로운 해석방법, 즉 Hankel-norm 근사화를 이용한 방법이 제안되었다. 또 Doyle<sup>[4]</sup>에 의해서 선형분수변환(linear fractional transformation)이 유도되어 제어시스템의 해석과 합성에 용이하도록 일반적인 케환시스템 구조를 모델정합(model matching) 문제의 형태로 전환하였다.

비구조적 섭동(unstructured perturbations)과 출력단의 외란(disturbance)이 시스템에 미치는 영향은 서로 보상관계(tradeoff)에 있으므로 동시 최적화 문제는 불가능하다. 그러나 일반적으로 외란은 저주파 영역에 많이 분포하고, 섭동은 고주파 영역에 존재하므로, 서로 다른 주파수 범위내에서의 동시 최적화 문제는 가능해진다.

\*正會員, 龜尾專門大學 電子科

(Dept. of Elec. Kumi Junior College)

\*\*正會員, 慶北大學校 電子工學科

(Dept. of Elec. Eng., Kyungpook Nat'l Univ.)

接受日字: 1991年 11月 29日

(※ 본 논문은 1990년도 문교부지원 한국학술진흥재단의 지방대육성 학술연구 조성비에 의하여 연구되었음.)

본 논문에서는 선형 다변수 케환시스템의 감도함수 행렬과 전달함수 행렬로 이루어진 혼합된 감도함수의  $H^\infty$ -최적화를 꾀하였다.  $H^\infty$ -최적화 문제를 풀기 위해 혼합된 감도함수를 모델정합문제로 귀결시킨 후 Nevanlinna-Pick 행렬 보간법을 이용하여,  $H^\infty$ -norm을 최소화하고 시스템을 안정화시키는 건설한 최적제어기 설계방법을 제안하였다.

2절에서는 알고리즘의 전개에 필요한 수학적 배경 및 용어에 대해 살펴보고, 3절에서는 혼합된 감도함수의 동시 최적화 문제를 다루기 위한 일반적인 건설 세어이론과 이를 모델정합문제로 변환하여 제어기의 해를 구하기 위한 알고리즘을 제시하였으며, 4절에서는 예제를 통해서 제안된 알고리즘의 타당성을 알아보았으며, 마지막으로 결론을 내렸다.

## II. 수학적 배경 및 용어

본 연구에 필요한 몇가지 수학적 배경 및 용어에 대해 살펴보기로 하자.

### 1. Hardy space

여기서 다루는 Hardy space는 실유리 함수(real rational function) 및 실유리 행렬(real rational matrix)에 국한하기로 한다.

함수  $G(s)$ 가 CRHP(closed right half plane)에서 해석적이고, 유한한  $H^\infty$ -norm을 가지면 Hardy space  $H^\infty$ 라 하며,  $H^\infty$ -norm,  $\|G(s)\|_\infty$ 은

$$\|G(s)\|_\infty = \sup \sigma[G(j\omega)] < \infty \quad (1)$$

와 같이 정의된다.

### 2. 소인수 분해(coprime factorization) 및 doubly Bezout identity

전달함수 행렬  $P(s)$ 가 stabilizable하고 detectable 할 때 우 소인수분해 (r. c. f. : right coprime factorization) 및 좌 소인수분해 (l. c. f. : left coprime factorization)는  $P = N_r D_r^{-1} = D_l^{-1} N_l$ 와 같이 쓸 수 있으며, 여기서  $N_r, D_r, N_l, D_l$ 은 Hardy space  $H^\infty$ 에 속하는 행렬로서, doubly Bezout identity, 즉

$$\begin{bmatrix} D_l & -N_l \\ -U_l & V_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r & N_r \\ U_r & D_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} \quad (2)$$

를 만족하는  $U_r, V_r, U_l, V_l \in H^\infty$ 이 항상 존재한다. 동가모델의 일반화된 플랜트  $G(s)$ 가 식(3)과 같이 주어질 때,

$$G: \left[ A, [B_1, B_2], \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \right] \quad (3)$$

상태제환 이득행렬  $F$ 와 관측기 이득행렬  $H$ 는 식(4)의 행렬  $A_F$ 와  $A_H$ 가 안정하도록, 즉 모든 고유값이 좌반부에 있도록

$$A_F = A + B_2 F \quad (4)$$

$$A_H = A + H C_2 \quad (5)$$

와 같이 선택할 수 있다. 이와같이 얻어진 행렬  $F$ 와  $H$ 로부터

$$C_F = C_2 + D_{22} F \quad (6)$$

$$B_H = B_2 + H D_{22} \quad (7)$$

를 얻을 수 있다. 여기서  $G_{22}$ 가 진분수 행렬이라고 가정하면  $D_{22} = 0$ 이 되고, 위에서 얻어진 값들을 이용하여 주어진 함수  $G_{22}$ 를 좌, 우소인수분해하면

$$N_r = [A_F, B_2, C_2, O] \quad (8)$$

$$D_r = [A_F, B_2, F, I] \quad (9)$$

$$N_l = [A_H, B_2, C_2, O] \quad (10)$$

$$D_l = [A_H, H, C_2, I] \quad (11)$$

와 같으며, doubly Bezout identity의 해는

$$V_r = [A_F, -H, C_2, I] \quad (12)$$

$$U_r = [A_F, -H, F, O] \quad (13)$$

$$V_l = [A_H, -B_2, F, I] \quad (14)$$

$$U_l = [A_H, -H, F, O] \quad (15)$$

와 같이 얻어진다.

### 3. Inner, Outer 행렬

$G(s), G_i(s), G_o(s)$ 가 Hardy space  $H^\infty$ 에 속하며, 행렬  $G_i(s)$ 가  $G_i^*(j\omega)G_i(j\omega) = I$ 를 만족할 때 inner 행렬, 행렬  $G_o(s)$ 의 역행렬의 각 요소들이 ORHP에서 해석적이면 outer 행렬이라 하며, 행렬  $G(s)$ 는 inner 행렬과 outer 행렬의 곱, 즉  $G(s) = G_i(s) \cdot G_o(s)$ 와 같이 나타낼 수 있다.

### 4. CIF(complementary inner factor)

행렬  $G(s) = [A, B, C, D] \in H_{n \times m}^\infty$ , ( $n \geq m$ )가 minimal이고  $\text{rank}(D) = m, D^T D = I$ 이라고 가정하면,  $G^* \eta = 0$ 이 되는 CIF  $\eta$ 는.

$$\eta = [(DB^T - D_\perp D_\perp^T C X) (sI - F + C^T D_\perp D_\perp^T C X)^{-1} C^T D_\perp + D_\perp] \quad (16)$$

으로 표현된다. 여기서  $F = -A^T + C^T D B^T$ 이고

$$F^T X + X F - X C^T D_\perp D_\perp^T C X + B B^T = 0 \quad (17)$$

의 해  $X = X^T \geq 0$ 이며,  $[D \ D_\perp]$ 는 직교행렬이다.

5. Spectral factor

정방행렬  $G(s)$ 의 spectral 분해는

$$G(s) = G_o^*(s) \cdot G_o(s) \tag{18}$$

으로 표현할 수 있고,  $G^*(\bullet)$ 는  $G(\bullet)$ 의 복소공액전치를 나타낸다. 행렬  $G(s)$ 의 안정한 부분  $[G]_+$ 의 minimal 구현이  $[A_1, B_1, C_1, D]$ 이고, 행렬  $D$ 가 positive definite 일 때, 행렬  $G(s)$ 의 spectral factor  $G_o$ 는

$$G_o = [A_1, B_1, D^{-1/2}(C_1 + B_1^T X), D^{1/2}] \tag{19}$$

의 구현을 가지며, 여기서  $X$ 는

$$F^T X + X F - X H X + R = 0 \tag{20}$$

의 해이고,  $F = A_1 - B_1 D^{-1} C_1$ ,  $H = B_1 D^{-1} B_1^T$ ,  $R = -C_1^T D^{-1} C_1$ 이다.

III. 혼합된 감도함수의 최적화

이 장에서는 외란제거 (disturbance rejection)와 견실성 (robustness)의 극대화를 위해 혼합된 감도함수의 동시 최적화 문제와 Nevanlinna-Pick 보간 알고리즘을 이용하여 견실한 최적제어기 설계과정을 보이 고자 한다.

1. 혼합된 감도함수의 모델정합

그림 1과 같은 공칭플랜트  $P$ 와 제어기  $K$ 로 이루어진 케환시스템을 생각하자.

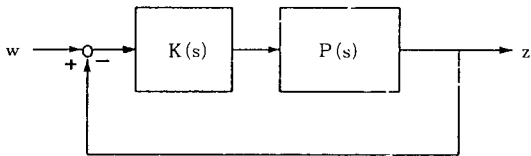


그림 1. 케환시스템  
Fig. 1. Feedback system.

저주파의 주파수영역을 가지는 외란이 시스템에 인가될 때 이러한 외란제거를 위한 문제는

$$\text{minimize } \| \text{감도함수} : S = (I + PK)^{-1} \|_{\infty} \tag{21}$$

와 같다. 시스템 출력에 존재하는 비구조적 섭동의 영향에도 안정성을 유지하기 위해서는 전달함수  $(H = I - S = PK(I + PK)^{-1})$ 의  $H^{\infty}$ -norm을 최소화하여야 한다. 감도함수  $S$ 와 전달함수  $H$ 를 동시에 최적화하는 것을 혼합된 감도함수의 동시 최적화문제라 하고 이를 풀기 위해 그림 1의 시스템을 일반적인 등가모델로 나타내면 그림 2와 같다.

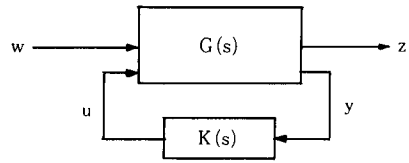


그림 2. 등가모델  
Fig. 2. Standard block diagram.

그림 2에서  $w$ 는 외란, 센서잡음, 명령신호등으로 이루어진 외부입력,  $u$ 는 제어신호,  $z$ 는 제어될 출력,  $y$ 는 측정된 출력,  $G$ 는 설계목적에 따라 결정되는 하중합수, 교란등을 포함하는 일반화된 플랜트를 나타낸다.

일반화된 플랜트  $G$ 를

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \tag{22}$$

와 같이 분할하면,  $w$ 로 부터  $z$ 까지의 전달함수는

$$z = [G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1} G_{21}] w \tag{23}$$

와 같이 구해지며 이를 간단히

$$z = F_1(G, K) w \tag{24}$$

로 표현할 수 있으며 이것을  $G$ 와  $K$ 의 선형분수변환 (LFT: linear fractional transformation)이라 한다. 이제 혼합된 감도함수를 LFT로 나타내면

$$F_1(G, K) = \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 (I + PK)^{-1} \\ W_2 PK(I + PK)^{-1} \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$G_{11} = \begin{bmatrix} W_1 \\ 0 \end{bmatrix}, G_{12} = \begin{bmatrix} -W_1 P \\ W_2 P \end{bmatrix}, G_{21} = I, G_{22} = -P \tag{26}$$

와 같이 주어지고, 이로부터

$$\text{min } \| F_1(G, K) \|_{\infty} \tag{27}$$

를 만족하는 견실한 최적제어기를 설계하는 문제를  $H^{\infty}$ -최적화라 한다.

[정리 1]

케환시스템을 안정화시키는 모든 proper 제어기의 집합은

$$K = (U_r + D_r Q) (V_r + N_r Q)^{-1} = K_o + V_1^{-1} Q (I + V_r^{-1} N_r Q)^{-1} V_r^{-1} \tag{28}$$

로 주어지며,  $K_o = U_r V_r^{-1}$ 이다. 식(28)을 이미 알고 있는 변수들의 항  $J$ 와 모르는 변수  $Q$ 의 LFT 형태로 나타내면

$$K = F_1(J, Q) \tag{29}$$

와 같다.

따라서 G와 K로 이루어진 전체시스템의 페루프 전달행렬을 이미 알고 있는 변수들의 집합인 T(F<sub>1</sub>(G, J))와 모르는 변수 Q의 LFT 형태로 구할 수 있다.

[보조정리 1]

시스템의 내부적 안정(internally stable)을 이루는 제어기 K를 찾기 위해 w로부터 z까지의 페루프 전달행렬을

$$T_{11} + T_{12}QT_{21}; Q \in H^\infty \tag{30}$$

와 같이 쓸 수 있으며 T<sub>11</sub> = G<sub>11</sub> + G<sub>12</sub>U<sub>r</sub>D<sub>1</sub>G<sub>21</sub>, T<sub>12</sub> = G<sub>12</sub>D<sub>r</sub>, T<sub>21</sub> = D<sub>1</sub>G<sub>21</sub>이며 ||T<sub>11</sub> + T<sub>12</sub>QT<sub>21</sub>||<sub>∞</sub>을 최소화 하는 함수 Q를 찾는 것을 모델정합문제라 한다.

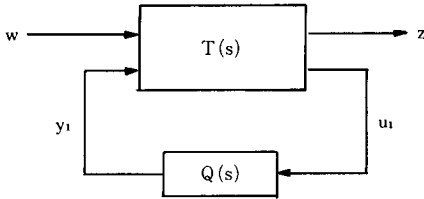


그림 3. 모델정합 등가 블럭선도  
Fig. 3. Model-matching equivalent block diagram.

모델정합 등가선도가 그림 3 에 주어져 있다. 모델정합문제를 풀기 위한 각각의 T<sub>i</sub>에 대한 상태공간의 구현화는 전달함수행렬 G의 구현화와 (4), (5)의 A<sub>F</sub>와 A<sub>H</sub>를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$T_{11} := \left[ \begin{pmatrix} A_F & -B_2F \\ 0 & A_H \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 \\ B_1 + HD_{21} \end{pmatrix}, [C_1 + D_{12}F \quad -D_{12}F], D_{11} \right] \tag{31}$$

$$T_{12} := [A_F, B_2, C_1 + D_{12}F, D_{12}] \tag{32}$$

$$T_{21} := [A_H, B_1 + HD_{21}, C_2, D_{21}] \tag{33}$$

이제 모델정합문제로부터 보간법을 이용하여 혼합감도함수를 최적화하는 문제의 해를 찾는 알고리즘에 대해 알아보기로 하자.

[보조정리 2]

$$i) \left\| \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq \gamma \text{ iff } \|F(\gamma^2 I - G^*G)^{-1/2}\|_\infty \leq 1 \tag{34}$$

$$ii) \|F G\|_\infty \leq \gamma \text{ iff } \|(\gamma^2 I - GG^*)^{-1/2} F\|_\infty \leq 1 \tag{35}$$

보조정리 2와 분해(factorization) 기법을 이용하여, H<sup>∞</sup> 문제를 ||R - X||<sub>∞</sub>의 형태, 즉

$$\min \|T_{11} + T_{12}QT_{21}\|_\infty \leq \gamma \tag{36}$$

로 바꿀 수 있으며 여기서 T<sub>11</sub>, T<sub>12</sub>, T<sub>21</sub> ∈ H<sup>∞</sup>이다. T<sub>12</sub>\*T<sub>12</sub> = I이면 T<sub>12</sub>를 inner, T<sub>21</sub>T<sub>21</sub>\* = I이면 T<sub>21</sub>를 coinner라 한다. 따라서, [T<sub>12</sub> T<sub>12⊥</sub>]와 [T<sub>21</sub> T<sub>21⊥</sub>]<sup>T</sup>가 정방행렬이고 inner가 되도록 하는 T<sub>12⊥</sub>와 T<sub>21⊥</sub>를 찾을 수 있다. 여기서 T<sub>12</sub>와 T<sub>21</sub>를 complementary inner factors(CIF)라고 한다. 정방이고 inner인 행렬을 곱해도 H<sup>∞</sup>-norm은 변하지 않으므로 식(36)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\|F_1(G, K)\|_\infty = \|T_{11} + T_{12}QT_{21}\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} T_{12} & T_{12\perp} \end{bmatrix}^* [T_{11} + T_{12}QT_{21}] \begin{bmatrix} T_{21} \\ T_{21\perp} \end{bmatrix}^* \right\|_\infty \tag{38}$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} T_{12}^* T_{11} T_{21}^* + Q & T_{12}^* T_{11} T_{21\perp}^* \\ T_{12\perp}^* T_{11} T_{21}^* & T_{12\perp}^* T_{11} T_{21\perp}^* \end{bmatrix} \right\|_\infty \tag{39}$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} R_{11} + Q & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \right\|_\infty \tag{40}$$

T<sub>12</sub>와 T<sub>21</sub>가 정방행렬이면, T<sub>12⊥</sub>와 T<sub>21⊥</sub>은 존재하지 않으므로 식(40)은

$$\|R_{11} + Q\|_\infty \tag{41}$$

와 같이 표현된다. T<sub>21</sub>이 정방행렬 혹은 행이 열보다 많은 경우에 T<sub>21⊥</sub>이 존재하지 않으므로 식(40)은

$$\left\| \begin{bmatrix} R_{11} + Q \\ R_{21} \end{bmatrix} \right\|_\infty \tag{42}$$

와 같고 되고 T<sub>12</sub>가 정방행렬이고 열이 행보다 많은 경우에 T<sub>12⊥</sub>이 존재하지 않으므로 식(40)은

$$\| [R_{11} + Q \quad R_{12}] \|_\infty \tag{43}$$

로 된다. 여기서 식(41)을 1-block 문제라 하고, 식(42)와 (43)은 2-block 문제라고 한다. 감도함수와 전달함수의 H<sup>∞</sup>-norm을 동시에 최소화하는 문제는 G와 K로 이루어진 선형분수변환식에 의하여 T<sub>21</sub>이 정방행렬이 되므로 식(42)의 형태가 된다. 이 2-block 문제를 보조정리 2를 이용하여 ||R - X||<sub>∞</sub>의 1-block 문제로 바꿀 수 있다.

[정리 2]

$$\|R_{21}\|_\infty \leq \gamma \text{ 라고 가정하면, 감도함수와 전달함수의}$$

$H^\infty$ -norm을 동시에 최소화하는 식(42)의 2-block 문제는

$$\left\| \begin{bmatrix} R_{11} + Q \\ R_{21} \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq \gamma \quad (44)$$

와 같이 쓸 수 있으며 식(44)를 만족할 필요 충분조건은

$$\begin{aligned} \|(R_{11} + Q)G_o\|_\infty &= \\ \|R_{11}G_o + QG_o\|_\infty &= \|R - X\|_\infty \leq 1 \end{aligned} \quad (45)$$

이며, 여기서  $G_o = (\gamma^2 I - R_{21}^* R_{21})^{-1/2}$ 이다.

2. Nevanlinna-Pick 보간 알고리즘

이제  $\|R - X\|_\infty$ 의 형태로 부터 제어기의 자유변수  $Q$ 가 포함된  $X$ 를 찾는 문제를 Nevanlinna-Pick 보간법을 이용해서 구해보기로 하자. 먼저 식(45)로 부터  $\Phi(s)$ 를

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= R_{11}G_o + QG_o \\ &= U^{-1}G + QG_o \end{aligned} \quad (46)$$

와 같이 정의하면  $U$ 는 inner 행렬이 된다. 식(46)의 양변에

$$\phi = \det[U] \quad (43)$$

를 곱하면

$$\phi\Phi(s) = \phi U^{-1}G + \phi QG_o \quad (48)$$

으로 변환되고

$$\hat{\Phi}(s) = \phi\Phi \quad (49)$$

$$\hat{H}(s) = \phi U^{-1}G \quad (50)$$

$$\hat{F}(s) = \phi QG_o \quad (51)$$

를 각각 정의하면, 식(48)은

$$\hat{\Phi}(s) = \hat{F}(s) + \hat{H}(s) \quad (52)$$

으로 나타낼 수 있다. 여기서  $\hat{F}(s) \in (H^\infty)^{p \times q}$ 이고,  $\hat{H}(s) \in (H^\infty)^{p \times q}$ 이다.  $\|\hat{\Phi}\|_\infty$ 를 최소화시키는  $\hat{F}(s) \in (H^\infty)^{p \times q}$ 를 구하는 문제는 Nevanlinna-Pick 보간법을 이용하면 그 해를 찾을 수 있다.

[보조정리 3]

$\hat{H}(s) \in (H^\infty)^{p \times q}$ 이고,  $\phi$ 의 모든 영점  $s_i, i=1, \dots, n$ 이 중첩되지 않는 서로 다른 복소근이면,  $\hat{F}(s) \in (H^\infty)^{p \times q}$  될 필요충분조건은 식(52)로 부터

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(s) &\in (H^\infty)^{p \times q}, \\ \hat{\Phi}(s_i) &= H(s_i), i=1, \dots, n \end{aligned} \quad (53)$$

와 같다.

이제 2-block 문제는 일반화된 보간문제, 즉  $\|\hat{\Phi}\|_\infty$  이 최소화되면서 식(53)을 만족시키는  $\hat{\Phi}$ 를 찾는 문제로 수렴된다.

[정리 3]

$s_1, \dots, s_n$ 이 중첩되지 않는 서로 다른 복소근이고,  $\beta_1, \dots, \beta_n$ 은 복소행렬이다. 모든  $i$ 에 대해서  $|s_i| < 1$  이고,  $\|\beta_i\|_\infty < 1$ 일 때,  $P$ 를

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \quad (54)$$

와 같이 정의하자. 여기서  $P_{ij} = (1 - \bar{s}_i s_j)^{-1} (I - \beta_i^* \beta_j)$ 이다. 이때  $\|\hat{\Phi}\|_\infty < 1$ 이고, 모든  $i$ 에 대해서  $\hat{\Phi}(s_i) = \beta_i$ 가 되는  $\hat{\Phi}(s) \in (H^\infty)^{p \times q}$ 가 존재할 필요충분조건은 행렬  $P$ 가 positive definite이면 된다. 특히  $\|\hat{\Phi}\|_\infty \leq 1$ 이고,  $\hat{\Phi}(s_i) = \beta_i$ 를 만족하는  $\hat{\Phi}(s) \in (H^\infty)^{p \times q}$ 가 존재할 필요충분조건은 행렬  $P$ 가 nonnegative definite 이면 된다.

Nevanlinna-Pick 보간법

$\|\hat{\Phi}\|_\infty = \mu$ 가 되는 최적인  $\hat{\Phi}(s) \in (H^\infty)^{p \times q}$ 를 구하는 알고리즘을 논하기 위해서 쌍선형 (bilinear) 변환  $z = (1-s)/(1+s)$ 를 이용하여 식(53)으로 부터

$$\Psi(z) = \frac{1}{\mu} \hat{\Phi}(s) \Big|_{s=(1-z)/(1+z)} \quad (55)$$

$$\beta_i = \frac{1}{\mu} \hat{H}(s_i) \quad (56)$$

을 정의하면, 다음 조건

$$\begin{aligned} z_i \in C \quad |z_i| < 1, \quad \forall i \\ \beta_i \in C \quad \|\beta_i\| \leq 1, \quad \forall i \end{aligned} \quad (57)$$

들이 주어지고, 결과적으로 Nevanlinna-Pick 보간 알고리즘을 이용하면  $\|\Psi(z)\|_\infty \leq 1$ 이고  $\Psi(z_i) = \beta_i$ 를 만족시키는 행렬  $\Psi(z)$ 를 찾을 수 있으며 여기서  $C$ 는 복소수 영역이다. 이제 최적제어기를 설계하는데 Nevanlinna-Pick 보간법을 적용하기 위하여 다음과 같은 식들을 정의하고자 한다.

[정의 1]

$E$ 는  $\sigma(E) < 1$ 인 상수행렬일 때

$$\begin{aligned} L(E) &= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (I - EE^*)^{-1/2} & -(I - EE^*)^{-1/2} E \\ -(I - EE^*)^{-1/2} E^* & (I - E^* E)^{-1/2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (58)$$

를 정의한다 여기서 M<sup>1/2</sup>은 M의 Hermitian 제곱근을 뜻한다.

[정의 2]

||X||<sub>∞</sub> ≤ 1일 때 행렬

$$T_{L(E)}(X) = (AX+B)(CX+D)^{-1} \quad (59)$$

을 정의한다. 또한 ||T<sub>L(E)</sub>(X)||<sub>∞</sub> ≤ 1 (< 1)이면 ||X||<sub>∞</sub> ≤ 1 (< 1)이고, ||X||<sub>∞</sub> ≤ (< 1)이면 ||T<sub>L(E)</sub>(X)||<sub>∞</sub> ≤ 1 (< 1)임을 알 수 있다.

지금까지의 이론을 이용하여 Nevanlinna-Pick 보간 알고리즘의 변환식을 알아보기 위해 다음의 함수를 정의하자.

[정의 3]

$$y(\zeta, z) = \begin{cases} \frac{\zeta-z}{1-\zeta z} \cdot \frac{|\zeta|}{\zeta}, & \zeta \neq 0 \\ -z, & \zeta = 0 \end{cases} \quad (60)$$

$$T_{L(E),y(\zeta,z)}[X] = y(\zeta, z)^{-1}(AX+B)(CX+D)^{-1} \quad (61)$$

$$T^{-1}_{L(E),y(\zeta,z)}[Y] = [y(\zeta, z)YC-A]^{-1} [B-y(\zeta, z)YD] \quad (62)$$

식(61)은 Nevanlinna-Pick 보간 알고리즘의 전향변환(forward mapping) 식이며, 식(62)는 후향변환(backward mapping) 식이다.

따라서 전·후향변환식에서 구한  $\Psi(z)$ 로 부터  $\Phi(s)$ 를 구한 후 제어기 K(s)를 구하면 이 제어기는 섭동을 가진 시스템을 안정화시키며 혼합된 감도 함수를 최소화시키는 견실한 최적제어기이다.

#### IV. 예 제

이 장에서는 혼합된 감도함수를 최적화시키고 Nevanlinna-Pick 보간 알고리즘을 이용하여 주어진 시스템을 안정화시키는 제어기 설계과정을 보인다.

공칭 플랜트 P와 하중행렬 W<sub>1</sub>, W<sub>2</sub>가

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}, \quad W_1 = \frac{0.2s+1}{s+2} I^{2 \times 2},$$

$$W_2 = \frac{s+1}{100} I^{2 \times 2} \quad (63)$$

와 같이 주어진 시스템에서, 감도함수와 전달함수의 H<sup>∞</sup>-norm을 동시에 최소화하는 일반화된 플랜트 G는

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 & W_1 P \\ 0 & W_2 P \\ I & -P \end{bmatrix} \quad (64)$$

와 같이 얻어진다. 식(4)-(5)의 A<sub>F</sub>와 A<sub>H</sub>가 안정하게 되도록 F와 H를

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2.5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0.5 \\ -4.5 & 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

와 같이 선택하여 T<sub>11</sub>를 각각 구하면,

$$T_{11} = \begin{bmatrix} \frac{0.2(s-1)(s+5)(s+6)}{(s+1.5)(s+2)(s+3.5)} & 0 \\ 0 & \frac{0.2(s+5)}{(s+2)} \\ \frac{0.125(s+1)}{(s+1.5)(s+3.5)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$T_{12} = \begin{bmatrix} \frac{-0.2(s+5)}{(s+1.5)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{-0.02(s+5)}{(s+2)(s+4)} \\ \frac{0.01(s+1)}{(s+1.5)} & 0 \\ 0 & \frac{0.01(s+1)}{(s+4)} \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$T_{21} = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s+3.5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (68)$$

이다. 식(36)에서 T<sub>12</sub>와 T<sub>21</sub>이 각각 inner와 coinner가 되도록 정리하면

$$\|T_{11} + T_{12}QT_{21}\|_{\infty} = \|T_{11} + T_{12}T_{120}QT_{210}T_{211}\|_{\infty} = \|T_{11} + T_2Q'T_3\|_{\infty} \quad (69)$$

이 되고 T<sub>2</sub> = T<sub>121</sub>, T<sub>3</sub> = T<sub>211</sub> 및 Q' = T<sub>120</sub>QT<sub>210</sub>이다. 그리고 식(16)에서 구해진 CIF를 이용하여 식(39)의 R<sub>11</sub> = T<sub>2</sub>\* T<sub>11</sub>T<sub>3</sub>\*, R<sub>21</sub> = T<sub>21</sub>\* T<sub>1</sub>T<sub>3</sub>\* 은

$$R_{11} = \begin{bmatrix} \frac{4.1125(s+1)(s-4.843)(s+5.02)(s+5.92)}{(s+11.5)(s+2)(s+3.5)(s-5.073)(s-19.962)} \\ 0 \\ \frac{4(s-5)(s+5)}{(s+2)(s-5.1406)(s-19.457)} \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$R_{21} = \begin{bmatrix} R_{21}(1, 1) & R_{21}(1, 2) \\ R_{21}(2, 1) & R_{21}(2, 2) \end{bmatrix} \quad (71)$$

이고, 여기서

$$R_{21}(1, 1) = \frac{0.141(s-0.1975)(s+1)(s+5)(s+5.59)(s^2-5.9s+17.6)}{(s-1)(s+1.5)(s+2)(s+3.5)(s-5.073)(s-19.76)} \quad (72)$$

$$R_{21}(1, 2) = \frac{-0.141(s+1)(s+5)}{(s-5.14)(s-19.457)} \quad (73)$$

$$R_{21}(2, 1) = \frac{0.141(s-0.1975)(s+1)(s^2-5.9s+17.6)(s+5)(s+5.59)}{(s-1)(s+1.5)(s+2)(s+3.5)(s-5.073)(s-19.76)} \quad (74)$$

$$R_{21}(2, 2) = \frac{-0.141(s+1)(s+5)}{(s-5.14)(s-19.457)} \quad (75)$$

이다. 따라서 식(41)을 만족할 필요충분조건은

$$\|[(R_{11} + Q')G_o]\|_{\infty} = \| [R - X] \|_{\infty} \leq 1 \quad (76)$$

이며, 여기서  $G_o = (\gamma^2 I - R^* R_{21})^{-1/2}$ ,  $R = R_{11} G_o$  및  $X = -Q' G_o$ 이다. 설계 요구에 만족하는  $\gamma = 0.5954$ 라면,

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$R_{11} = \frac{7.3391(s+1)(s-4.8435)(s+5.0269)(s+5.9261)(s+19.762)}{[(s+1.71910)^2 + 0.07629^2](s+3.5503)(s-5.0727)(s-19.762)(s+20.9475)} \quad (78)$$

$$R_{22} = \frac{7.1383(s+5)(s-5)(s+5.1406)(s+19.457)}{(s+2)(s+5.1393)(s-5.1406)(s-19.457)(s+19.5807)} \quad (79)$$

이 되고 1-block의 형태로 바뀐  $\|R - X\|_{\infty}$ 의 Hankel-norm은 0.2135이다. 따라서  $\|R - X\|_{\infty}$ 의 norm이 0.2135로 되도록 하는 X를 찾는 문제는 X에 포함되어 있는 Q를 찾는 문제와 같다. 이를 보간법으로 구하면 식(43)의 inner 행렬 U는

$$U = \begin{bmatrix} \frac{(s-5.0727)(s-19.762)}{(s+5.0727)(s+19.762)} & 0 \\ 0 & \frac{(s-5.1426)(s-19.457)}{(s+5.1406)(s+19.457)} \end{bmatrix} \quad (80)$$

이다. 그리고  $\phi = \det[U]$ 를 구하면

$$\phi = \frac{(s-5.0727)(s-19.762)(s-5.1426)(s-19.457)}{(s+5.0727)(s+19.762)(s+5.1406)(s+19.457)} \quad (81)$$

이 되므로, 또한  $\|\hat{\Phi}\|_{\infty}$ 의 값  $\mu = 0.2135$ 이므로 H는

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \hat{H}_{11} & 0 \\ 0 & \hat{H}_{22} \end{bmatrix} \quad (82)$$

$$\hat{H}_{11} = \frac{7.3391(s+1)(s-4.8435)(s+5.0269)(s+5.9261)(s+5.1406)(s-19.457)}{[(s+1.71910)^2 + 0.07629^2](s+3.5503)(s+0.727)(s+19.457)(s+5.1406)(s+20.9475)} \quad (83)$$

$$\hat{H}_{22} = \frac{7.1383(s+5)(s-5)(s-5.0727)(s-19.762)}{(s+2)(s+5.1393)(s+5.0727)(s+19.587)(s+19.762)} \quad (84)$$

이다. 결과적으로 보간점과 보간값은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$s_1 = 5.0727, \beta_1 = \begin{bmatrix} 1.973098e-4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (85)$$

$$s_2 = 19.762, \beta_2 = \begin{bmatrix} 2.846677e-3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (86)$$

$$s_3 = 5.1406, \beta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1.0252e-4 \end{bmatrix} \quad (87)$$

$$s_4 = 19.457, \beta_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2.61641e-3 \end{bmatrix} \quad (88)$$

이제 식 (61)-(62)의 전향변환식과 후향변환식을 전개하면 해  $\hat{\Phi}$ 는

$$\hat{\Phi} = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{11} & 0 \\ 0 & \hat{\Phi}_{22} \end{bmatrix} \quad (89)$$

$$\hat{\Phi}_{11} = \frac{0.2134909(s-5.51406)(s-16.457)(s-4.583965)}{(s-19.457)(s+5.1406)(s+4.583961)} \quad (90)$$

$$\hat{\Phi}_{22} = \frac{0.9572635(s-5.0727)(s-19.762)(s-4.865422)}{(s+5.0727)(s+19.762)(s+4.889033)} \quad (91)$$

와 같이 얻어지고, 식(69)의 Q는

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (92)$$

$$Q_{11} = \frac{12(s+8.66)(s+4.21)(s+0.952)}{(s+4.58)(s+19.8)(s+1)} \quad (93)$$

$$Q_{22} = \frac{12(s+2)(s+4)(s+5.06)(s+8.66)(s+4.21)(s+19.8)(s+0.952)}{(s+19.5)(s^2+3.44s+2.96)(s+3.55)(s+20.9)(s+5.14)(s+4.58)} \quad (94)$$

이다. 마지막으로 식(28)을 이용하여 견실한 최적제어기 K를 구하면

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12(s+7.46)(s+3.52)(s+1.49)(s+1.3)}{(s+12.4)(s+3.54)(s+1.94)(s+1.52)} & 0 \\ 0 & \frac{12(s+3)(s+8.66)(s+4.21)(s+0.952)}{(s^2-0.0508s+1.41)(s+13.9)(s+4.28)} \end{bmatrix} \quad (95)$$

이다.

### V. 결 론

본 논문에서는 혼합된 감도함수의  $H^\infty$ -norm을 최소화하는 문제를 모델정합 문제로 변환하여 설계조건인  $\gamma$ 보다  $H^\infty$ -norm을 작게 함으로써 시스템을 안정시키는 견실한 최적제어기를 설계하였다.

주어진 최소값  $\gamma=0.595$ 에 대해 혼합된 감도함수의 LFT를 모델정합 형태로 바꾼 후 Nevanlinna-Pick 보간 알고리즘을 이용하여 제어기의 자유매개변수 Q를 찾았다. 여기서 혼합된 감도함수와 같은 2-block 형태는 기존의 보간 알고리즘으로는 해를 구할 수 없었으나 2-block 형태를 1-block 형태로 변환하여 보간 알고리즘을 적용함으로써 설계목적에 타당한  $H^\infty$ -norm을 최소화하고 시스템을 안정화시키는 제어기를 구성할 수 있었다.

### 參 考 文 獻

[1] B.C. Chang and J.B. Pearson Jr., "Optimal disturbance reduction in linear multivariable systems," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. 29, no. 10, pp. 880-888, Oct. 1984.

[2] J.C. Doyle, "Synthesis of robust controllers and filters," *Proc. 22nd CDC.*, San. Antonio, TX, pp. 109-114, 1983.

[3] J.C. Doyle and G. Stein, "Multivariable feedback design: concepts for a classical modern synthesis," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. 26, no. 1, pp. 4-16, Feb. 1981.

[4] B.A. Francis, *A Course in  $H^\infty$  Control Theory*, in Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 88, New York: Springer-Verlag, 1987.

[5] Y.K. Foo and I. Postlethwaite, "An  $H^\infty$ -minimax approach to the design of robust control systems," *Systems & Contr. Letters* 5, pp. 81-88, Nov. 1984.

[6] K. Glover, "All optimal Hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their  $L^\infty$  error bounds," *Int. J. Contr.*, vol. 39, pp. 1115-1193, June 1984.

[7] J.M. Maciejowski, *Multivariable Feedback Design*, Addison Wesley, 1989.

[8] D.A. Milich, M. Athans, L. Valavani, and G. Stein, "A method for designing robust multivariable feedback system," *Proc. 27th CDC*, Austin, TX, pp. 2150-2156, Dec. 1988.

[9] C. Nett, C.A. Jacobsen, and M.J. Balas, "A connection between state-space and doubly coprime fractional representations," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. 29, no. 9, pp. 831-832, Sept. 1984.

[10] S.D. O'Young and B.A. Francis, "Optimal performance and robust stabilization," *Automatica*, vol. 22, no. 2, pp. 171-183, June 1986.

[11] M.S. Verma, "Design of  $H^\infty$ -optimal feedback systems," *Proc. 26th CDC*, Los Angeles, CA, pp. 84-89, Dec. 1987.

[12] M. Vidyasagar, *Control System Synthesis: A Factorization Approach*, The MIT Press, 1985.

[13] M. Vidyasagar and H. Kimura, "Robust controllers for uncertain linear multivariable systems," *Automatica*, vol. 22, no. 1, pp. 85-94, Jan. 1986.

[14] G. Zames, "Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. 26, no. 2, pp. 301-320, Feb. 1981.

[15] 李甲來, 尹漢五, 朴洪培, 金秀重, "Simultaneous stabilization with multiple domains of stability and  $H^2$  optimization," *KITE J. of Electronics Engineering*, vol. 2, no. 1, pp. 62-68, June 1991.



---

 著 者 紹 介
 

---



尹 漢 五(正會員)

1961年 2月 25日生. 1981年 2月  
 경북대학교 전자공학과 졸업.  
 1983年 8月~1985年 9月 삼성  
 전자(주) 시스템개발부 근무.  
 1987年 8月 경북대학교 대학원  
 전자공학과 석사학위 취득. 1987  
 年 9月~1990年 2月 경북대학교 전자공학과 조교.  
 1991年 2月 경북대학교 전자공학과 박사과정 수료.  
 현재 구미전문대학 전자과 전임강사. 주관심분야는  
 견실제어, 최적제어, 비선형제어 등임.



朴 烘 培(正會員)

1951年 3月 6日生. 1977年 2月  
 경북대학교 전자공학과 졸업.  
 1979年 8月 경북대학교 대학원  
 전자공학과 석사학위 취득. 1988  
 年 7月 미국 뉴멕시코대학교 공  
 학박사학위 취득. 1976年 12月~  
 1977年 7月 대한전선(주) 근무. 1979年 9月~1982  
 年 12月 경북공업전문대학 조교수. 현재 경북대학교  
 전자공학과 조교수. 주관심분야는 견실제어, 최적제  
 어, 유도항법제어 등임.