

MR 방법으로부터 다단 정현파의 주파수 추정

(Frequency Estimation of Multiple Sinusoids From MR Method)

安 泰 天*, 卓 賢 洙**, 李 鍾 範**

(Tae Chon Ahn, Hyun Soo Tak, and Jong Bum Lee)

要 約

본 연구에서는 백색 또는 칼라의 유한 잡음 측정값으로부터 다단 정현파의 주파수 추정도를 개선하기 위하여 MR 방법이 제시된다. 축소 계수 모델을 사용하는 MR 방법이 LP 방법에 선형 시스템의 근사화의 이론을 도입하여 설계된다. 그리고 이 새로운 방법이 분석된다. Monte-Carlo 시뮬레이션을 MR과 LP 방법에서 실행하고 그 결과를 평균, 표준편차 및 상대 바이어스를 비교한다. 그리고 몇몇 보기들에 대해 파워 스펙트럼 밀도, 각 주파수 위치를 그림을 통하여 도시한다. MR 방법은 LP 방법에서 나타나는 과잉 및 예외 극점을 효과적으로 제거하여 주파수 추정도를 개선시킨다. 특히 MR 방법은 적은 잡음 측정값, 낮은 SNR 및 칼라 잡음에서 고무적인 결과를 나타낸다. 끝으로 이 새로운 방법은 신호의 특성 추정을 요구하는 통신 및 의용 생체 시스템에 이용될 뿐 아니라 실험적 자료로부터 동특성 시스템을 모델링하는 시스템 동정에도 응용될 것이다.

Abstract

MR(Model Reduction) is presented in order to estimate the frequency of multiple sinusoids from the finite noisy data with the white or colored noises. MR, using the reduced rank models, is designed, applying the approximation of linear system to LP(Linear Prediction). The MR method is analyzed. Monte-carlo simulations are conducted for MR and Lp. The results are compared with in terms of mean, root-mean square and relative bias. MR eliminates effectively the extreme and exceptional poles appearing in LP and improves the accuracy of LP. Especially, MR gives promising results in short noisy measurements, low SNR's and coloured noises. Power spectral density and angular frequency position are showed by figures, for examples. Finally, the new method is utilized to the communication and biomedical systems estimating the characteristics of the signal and the system identification modelling the dynamic systems from experimental data.

*正會員, 圓光大學校 制御計測工學科
(Dept. of Cont. Inst. Eng., Wonkwang Univ.)

**正會員, 圓光大學校 電氣工學科
(Dept. of Electrical Eng., Wonkwang Univ.)
接受日字: 1991年 8月 24日

(※이 연구는 '90년도 한국 과학 재단 연구비 지원에 의한 결과임. 과제번호: 901-0810-008-1)

I. 서 론

유한한 잡음 측정값으로부터 스펙트럼을 추정하는 것은 매우 흥미있고 실질적인 문제이다. 이것은 많은 분야에서 연구되고 사용되어 왔다.^{[1][2]} 급속한 산업의 발전과 함께 정확한 스펙트럼 추정의 필요성이 증가되고, 더 나아가 이분야에 대한 많은 연구가 요구

되고 있다. 특히 유한한 잡음 측정값으로부터 다단 정현파의 주파수 추정, 즉 넓은 의미에서 소역폭 스펙트럼 추정은 많은 관심을 끌고 있다.^{[1]-[5]}

스펙트럼 추정의 특별한 경우로 주파수 추정은 지난 20년 동안 많은 주목을 받아 진전을 보였고, 지금도 다단 정현파의 주파수 추정도를 증진시키기 위한 연구가 진행되어 많은 진척을 보이고 있다.^{[6]-[12][14]}

다단 정현파의 주파수를 추정하는 선형 예측 방법인 LP(Linear Prediction)^[11]는 알맞는 필터의 차수와 SNR에서는 양호한 주파수 추정을 할 수 있다. 그러나 SNR이 비교적 작은 상태에서 필터의 차수가 높거나 낮으면 과잉(extraneous)과 예외극점(exceptional poles)이 발생하거나 추정도가 악화되어 가짜 또는 불량한 주파수를 추정하게 되고, 더 나아가 추정값을 쓸 수 없을 정도로 추정도가 떨어지게 하는 경향이 있다.

본 논문에서는 LP방법의 문제점을 해결하기 위해, 축소 계수 모델을 이용하는 수정된 선형 예측 방법이 연구된다. 즉, LP 방법에 선형 시스템의 근사화 이론^[7]을 도입하고, 과잉과 예외극점을 제거하여 필터의 차수가 높고 비교적 SNR이 작은 상태에서 최상의 주파수 추정률 갖는 필터 차수의 LP 방법보다 우수한 주파수 추정도를 갖는 MR(Model Reduction) 방법을 제안한다.

이 새로운 추정방법으로 백색 및 칼라잡음에서 Monte-carlo 시뮬레이션하여 통계처리된 평균, 평균 제곱근 및 상대 바이어스(bias)를 기존 방법과 비교하여 파워스펙트럼 밀도(Power Spectral Density)와 단위 원에 각 주파수 위치를 그림을 통하여 나타낸다.

이상의 새로운 추정 방법은 기존의 주파수 추정 방법론은 물론 통신이나 의용 생체 시스템과 같은 신호의 특성을 추정하는 설비의 연구와 실험적인 측정값으로부터 동특성 시스템을 모델링하는 시스템 동정의 연구에 확고한 일익을 담당할 것으로 전망된다.

II. 다단 정현파의 주파수 추정 시스템

다음과 같은 일정한 간격으로 샘플링된 정현파 신호를 고려한다.

$$X(t) = \sum_{i=1}^m a_i \sin(\omega_i t + \phi_i) \quad (1)$$

여기서 $a_i \in \mathbb{R}$, $\omega_i \in (0, \pi)$ 이고 $i \neq j$ 에 대해서 $\omega_i \neq \omega_j$ 이다. 또한 ϕ_i 의 초기 위상은 $[0, 2\pi)$ 내에 분포된 것으로 가정한다.

식 (1)에서 샘플링 간격은 1초와 같다고 가정하고,

ω_1 는 표준화된 각 주파수로 간주한다.

$y(t)$ 는 $x(t)$ 의 잡음 측정값을 나타낸다.

$$y(t) = x(t) + e(t) \quad t=1,2,\dots, N \quad (2)$$

여기서 $e(t)$ 는 평균이 0이고, 분산이 λ^2 인 독립적이며, 균등 분포의 랜덤(random) 잡음의 수열로 가정한다. 또한 $x(t)$ 와 $e(s)$ 는 어떤 t 와 s 에 대해서도 상호 관련되어 있지 않은 것으로 간주한다.

식(1)에 있는 매개 변수 a_i, ω_i 및 ϕ_i 는 $t=1,2,\dots, N$ 에 대한 유한 측정값 $y(t)$ 의 집합으로부터 추정한다. 일단 ω_1 의 값을 알면 a_i 와 ϕ_i 를 추정하는 것은 쉬운 문제이다. 본 논문에서는 ω_1 을 추정하는 문제에 집중할 것이다.

잘 알려진 것처럼 $x(t)$ 는 식(3)의 AR 프로세스를 만족한다.^[11]

$$A(q^{-1}) \times (t) = 0 \quad (3)$$

여기서 q^{-1} 은 단위 지연 연산자 즉, $q^{-1} \times (t) = x(t-1)$ 을 나타내고 $A(q^{-1})$ 은 식(4)에 주어진 필터 차수 $2m$ 의 다항식이다.

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{2m} q^{-2m} \\ &= \prod_{i=1}^m (1 - 2 \cos \omega_i q^{-1} + q^{-2}) \end{aligned} \quad (4)$$

$A(z)$ 가 $i=1,2,\dots,m$ 에 대해서 $\exp(\pm j\omega_i)$ 에서 공액 복소 단위 근을 갖을 때, $|a_i|$ 는 식(5)와 같이 대칭적이어야 한다.

$$a_{2m-i} = a_i \quad i=0,1,\dots, m(a_0 = 1) \quad (5)$$

$y(t)$ 가 다음의 ARMA 프로세스를 만족한다는 것은 식(2)와 식(3)으로부터 유도된다.^[11]

$$A(q^{-1})y(t) = A(q^{-1})e(t) \quad (6)$$

식(6)은 두가지 관점에서 퇴화된(degenerated) AR-MA 모델이다.^[11] 첫째로 모든 극점과 영점은 단위 원 위에 존재한다. 둘째로 모든 극점은 영점과 일치한다. 이상의 두 특징은 스펙트럼 추정에서 중요한 역할을 할 것이다.

다음으로 모델의 필터 차수를 높이기 위해 임의의 0이 아닌 다항식 즉, 단순 증가 다항식 $B(q^{-1})$ 을 식(3)의 양변에 곱하면 같은 결과를 나타내는 식(7)을 얻을 수 있다.

$$B(q^{-1})A(q^{-1})x(t) = 0 \quad (7)$$

여기서 식(7)의 계수 행렬을 식(8)로 정의하면

$$C(q^{-1}) = B(q^{-1})A(q^{-1}) \quad (8)$$

식(8)을 식(6)에 대입하면 식(9)가 된다.

$$C(q^{-1})\dot{\mathbf{x}} \quad \mathbf{x}(t)=0 \quad (9)$$

여기서

$$C(q^{-1})=1+c_1q^{-1}+\dots+c_lq^{-l} \quad (10)$$

$$B(q^{-1})=1+b_1q^{-1}+\dots+b_{l-2m}q^{-l+2m} \quad (11)$$

식(12)은 식(6)의 퇴화된 고차모델이다.

$$C(q^{-1})\mathbf{y}(t)=C(q^{-1})\mathbf{e}(t) \quad (12)$$

식(12)은 모델의 필터 차수를 선택하는데 있어 더 많은 재량을 주고 있으나, 많은 매개 변수를 사용하는 희생을 감수해야 한다. 본 논문의 나머지 부분에서 가능하다면 식(12)를 사용할 것이다. 왜냐하면 식(12)은 식(6)을 포함할 뿐 아니라 대부분의 경우에 $C(q^{-1})$ 의 필터 차수를 알맞게 선택하면 보다 정확한 매개변수 추정을 얻을 수 있기 때문이다.

본 논문의 요지인 다단 정현파의 주파수 추정은 3장에서 제안할 축소 계수 모델을 이용한 수정된 선형 예측 방법인 MR에 의거 일반적으로 다음 두단계 절차로부터 얻어진다.

(1) 계수행렬 $\{c_i\}$ 을 추정한다.

(2) $C(z)$ 의 근중 가장 큰 $2m$ 개의 각 위치 $\rho_i \cdot \exp(\pm j\omega_i)$ ($i=1, 2, \dots, m$) 또는 스펙트럼 $1/\|\hat{C}(\exp(j\omega))\|^2$ 의 피크중 가장 큰 $2m$ 개의 위치로부터 주파수 추정 $\{\omega_i\}$ 를 계산한다.

III. MODEL REDUCTION 방법

정현파의 주파수 추정을 위하여 퇴화된 고차 AR-MA 프로세스를 이용한 LP방법은 이미 연구되었다. (11)-(16)(13) 본 장에서는 이 방법의 문제점인 정현 주파수의 추정도를 개선하기 위해, 축소 계수 모델을 이용하여 수정된 선형 예측 방법인 MR을 분석적으로 전개할 것이다.

LP 방법을 개선하여 MR 알고리즘을 개발하는 데 필요한 선형 시스템의 근사화 이론^[7]을 도입한다.

LP 방법은 고차 AR 모델로써 원시 모델에서 중요한 정보만을 포함하는 저차 모델로 줄일 수 있다. 이 저차 모델은 MR 방법에 의해서 성취될 수 있을 것이다. MR 방법은 시스템 설계에서 시스템 모델이나 고차 조절기를 단순화하는 선형 시스템의 근사화 이론에 근거를 두고 있다. 본 논문에서는 이 이론을 이용하여 최소 계수의 ARMA 모델을 얻는데 관심이 있다.

고차 AR 모델을 균형 모델 축소(balanced model reduction)을 통하여 MR을 실행하기 위한 상태 공간

형태로 표시하면 식(13)과 식(14)와 같다.

$$\mathbf{X}(t+1)=\mathbf{F}\mathbf{X}(t)+\mathbf{G}_n(t) \quad (13)$$

$$\mathbf{Y}(t)=\mathbf{H}\mathbf{X}(t)+\mathbf{D}_n(t) \quad (14)$$

여기서 $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{L \times L}$, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{L \times 1}$, $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{1 \times L}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ 이다.

MR 방법의 특징은 점근적으로 안정한 식(13)과 식(14)의 시스템에 대한 점근성과 관측성의 측정 평가량을 도입하는 것이다. 식(13)과 식(14)의 시스템에서 가장 접근할 수 있고 관측할 수 있는 부분을 축소 계수 시스템으로 이용된다. 축소 계수 시스템을 얻기 위해 점근성과 관측성의 평가지수인 그래미안⁽⁶⁾⁻⁽⁸⁾을 사용한다.

우선, 점근적으로 안정한 시스템 (\mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} , \mathbf{D})의 점근성 그래미안 \mathbf{P} (reachability Gramian)을 정의하면 식(15)와 같다.

$$\mathbf{P}=\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{F}^t \mathbf{G} \mathbf{G}^T (\mathbf{F}^T)^t \quad (15)$$

\mathbf{P} 는 Lyapunov 방정식 (16)을 만족하는 것으로 알려져 있다.

$$\mathbf{F} \mathbf{P} \mathbf{F}^T - \mathbf{P} + \mathbf{G} \mathbf{G}^T = 0 \quad (16)$$

점근성 그래미안 \mathbf{P} 의 기하학적 이해를 위해 집합 식(17)을 만족하는 문제를 고려하자.

$$S_r = \{ \mathbf{X}(t_1); \mathbf{X}(0)=0, \sum_{t=0}^{t_1-1} \mathbf{n}^T(t) \mathbf{n}(t) = 1 \} \quad (17)$$

여기서 S_r 은 1인 입력에너지에 의해서 $\mathbf{X}(0)=\mathbf{0}$ 로부터 도달될 수 있는 모든 상태의 집합이다. 이것에 대한 해는 식(18)의 최소 에너지 문제에서 주어진다.^[12]

$$\min_n J(n) = \sum_{t=0}^{t_1-1} \mathbf{n}^T(t) \mathbf{n}(t), \mathbf{X}(0)=\mathbf{0}, \mathbf{X}(t_1)=\mathbf{X}_1 \quad (18)$$

식(8)을 계산하기 위해 순환식을 이용하여 $\mathbf{X}(t_1)$ 을 정리하면 식(19)와 같다.

$$\mathbf{X}(t_1) = \sum_{i=1}^{t_1} \mathbf{F}^{t_1-i} \mathbf{G} \mathbf{n}(i-1) = \mathbf{L} \mathbf{N} \quad (19)$$

여기서

$$\mathbf{L} = (\mathbf{F}^{t_1-1} \mathbf{G} \quad \mathbf{F}^{t_1-2} \mathbf{G} \dots \mathbf{G}) \quad (20)$$

$$\mathbf{N} = (\mathbf{n}(0) \quad \mathbf{n}(1) \dots \mathbf{n}(t_1-1)) \quad (21)$$

최소 에너지 입력은 식(19)의 의사 역(pseudo inverse)^[12]인 식(22)을 이용하여 식(23)과 같이 얻어진다.

$$\mathbf{N}^* = \mathbf{L}^T (\mathbf{L} \mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{X}_1 \quad (22)$$

$$J(\mathbf{n}^*) = \mathbf{X}_1^T (\mathbf{L} \mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{X}_1 \quad (23)$$

여기서 $\mathbf{L} \mathbf{L}^T = \sum_{i=0}^{t_1-1} \mathbf{F}^i \mathbf{G} \mathbf{G}^T (\mathbf{F}^T)^i$ (24)

이 문제를 해결하기 위해서는 t_1 을 무한대로 놓으면, 식(25)를 얻을 수 있다.

$$J(n^*) = X^T P^{-1} X \quad (25)$$

최소 에너지 문제가 해결되었기 때문에, 1인 입력 에너지에 의해 원점으로 도달될 수 있는 모든 상태 $X(t)$ 는 식(26)을 만족해야만 한다.

$$X^T(t) P^{-1} X(t) \leq 1 \quad (26)$$

기하학적 해석의 관점에서 보면 즉, P 의 고유값 분해^[10]는 식(27)로 쓸 수 있고,

$$P = V \Sigma^n V^T, \quad \Sigma^n = \text{diag}(\sigma_1^n), \quad V \text{block col}(v_i) \quad (27)$$

식(17)의 집합 S_r 은 $\sqrt{\sigma_1^n} v_i$ 로 표현된 반축(semi-axes) 타원이 된다. 그리고 $x_1 = v_i$ 라 하면, $J(n^*) = 1/\sigma_1^n$ 이다. 따라서 작은 σ_1^n 을 가지고 어떤 방향에서도 단위 계단이 되도록 하는데 많은 에너지가 소모된다. 결국 이 상태들은 거의 비접근적이다.

다음, 점근적으로 안정한 시스템 (F, G, H, D)의 관측성 그레미안 (Q (observability Gramian))을 정의하면 식(28)과 같다.

$$Q = \sum_{t=0}^{\infty} (F^t)^T H^T H F^t \quad (28)$$

여기서 Q 는 Lyapunov 방정식(29)를 만족한다.

$$F^T Q F - Q + H^T H = 0 \quad (29)$$

관측성 그레미안 Q 의 기하학적 이해를 위해 집합 식(30)을 만족하는 문제를 고려하자.

$$S_0 = \{ X(0); \sum_{t=0}^{\infty} Y^T(t) Y(t) = 1, n(t) = 0 \} \quad (30)$$

여기서 모든 $X(0)$ 상태는 입력이 0일 때 출력 에너지 1을 주는 것이다. 또한

$$Y(t) = H F^t X(0) \quad (31)$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} Y^T(t) Y(t) = X(0)^T \sum_{t=0}^{\infty} (F^t)^T H^T H F^t X(0) = X(0)^T Q X(0) \quad (32)$$

기하학적 해석의 관점에서 보면 즉, Q 의 고유값 분해^[10]는 식(33)로 쓸 수 있고,

$$Q = U \Sigma^Y U^T, \quad \Sigma^Y = \text{diag}(\sigma_i^Y), \quad U = \text{block col}(U_i) \quad (33)$$

식(30)의 집합 S_0 은 $1/\sigma_i^Y U_i$ 로 표현된 반축 타원이 된다. 그리고 초기상태 $X(0) = U_1$ 는 식(34)의 출력 에너지로 나타난다.

$$\sum_{t=0}^{\infty} Y^T(t) Y(t) = \sigma_i^Y \quad (34)$$

따라서 작은 σ_i^Y 를 갖는 초기 상태 $X(0) = U_1$ 는 출력에 대해 작은 기여를 하므로 거의 비관측적이다.

위의 내용을 요약하면 P 와 Q 의 고유값은 그레미안 고유벡터 방향이 얼마나 가깝근이고 가관측이나에 따라 스칼라 양으로 나타난다. 유사 변환 τ (Similarity Transformations, $X = \tau X$)을 도입하여 그레미안을 변형한다.^{[15]-[16]} 즉 가접근과 가관측 그레미안 P 와 Q 를 $S^T S$ 와 $R^T R$ 로 Cholesky 인수분해하고, SR^T 를 SVD(Singular Value Decomposition)하여 식(35)로 놓는다.

$$SR^T = U \Sigma V^T \quad (35)$$

유사변환 행렬을 식(36)로 선택하고 식(13)과 식(14)을 균형 모델 축소로 변형한다.

$$\tau = \Sigma^{-1/2} U^T R \quad (36)$$

P 와 Q 에 유사변환을 실행하면 식(37)이 된다.

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \tau P \tau^T = \Sigma^{-1/2} U^T R R R^T U \Sigma^{-1/2} = \Sigma \\ \bar{Q} &= \tau^T Q \tau = \Sigma^{-1/2} U^T R^{-T} R^T R^{-1} U \Sigma^{1/2} = \Sigma \end{aligned} \quad (37)$$

식(37)에 대한 물리적 의미를 τ 의 P 와 Q 에 끼치는 영향의 관점에서 분석한다. $\bar{P}\bar{Q}$ 는 PQ 의 유사변환으로 $\bar{P}\bar{Q} = \tau P Q \tau^{-1}$ 이다. 더 나아가 PQ 의 고유값은 상태의 유사변환에 의해 불변이라는 것이다. 즉 PQ 의 고유값은 식(37)의 고유값과 같게된다. 이와같은 성질을 이용하여 식(13) 시스템의 특이값은 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma_i = \sqrt{\text{eig}(\bar{P}\bar{Q})} = \sqrt{\text{eig}(PQ)}, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \quad (38)$$

여기서 $\text{eig}(\cdot)$ 는 행렬의 고유값을 의미한다.

시스템의 축소 모델의 계수는 특이값의 크기를 설명하므로써 선택될 수 있다. 식(38)의 첫번째 몇개의 특이값들은 나머지 보다 훨씬 큰 신호값으로 되어 있다. 신호로된 특이값은 고차 모델에 가장 접근할 수 있다고 관측할 수 있는 부분에 해당된다. 수정된 선형 예측 방법인 MR은 식(38)을 사용한다.

MR 방법은 일반적으로 다음 두단계 절차를 거쳐서 2장의 방법으로 다단 정현파의 주파수 추정이 이루어진다.

- (1) 시스템을 적절한 균형 모델 축소로 변환한다.
- (2) 축소 모델의 계수 $2m$ (식(1)에서 정의)보다 큰 경우의 특이값 $\sigma_i (i > 2m)$ 을 무시한다.

이상에서 선형 시스템의 근사화를 이용하여 설계된 MR 알고리즘은 주파수 추정의 정확도를 증가시킬 것으로 생각된다.

IV. 컴퓨터 시뮬레이션 및 결과고찰

3장에서 개발된 MR 방법과 기존의 LP 방법중 전향 LP(forward LP:FLP) 방법을 이용하여 잡음 측정값으로부터 다단 정현파 주파수를 추정하기 위해 Montecarlo 시뮬레이션을 실행한다. 주어진 보기들에서 신호는 두개의 정현파로 구성된다고 가정한다. 설계 매개 변수인 필터차수 L을 변화시키며 식(39)~(42)까지 정의된 양을 계산하여 MR 및 LP 방법의 다단 정현파에 대한 주파수 추정도를 백색 및 칼라 잡음에서 비교 평가한다. 그리고 LP 방법에서 과잉극점 또는 예외극점으로 인한 가짜 주파수를 제거할 때 근사적으로 주파수 추정도가 가장 좋은 필터 차수에 대한 결과를 도표로 나타낸다.

$$\bar{\omega}_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \hat{\omega}_i^j \quad (\hat{\omega}_i \text{의 평균값}) \quad (39)$$

$$rms(\hat{\omega}_i) = \sqrt{mse(\hat{\omega}_i)} \quad (\hat{\omega}_i \text{의 평균제곱근}) \quad (40)$$

$$\delta(\hat{\omega}_i) = \frac{|\bar{\omega}_i - \omega_i|}{\omega_i} \quad (\hat{\omega}_i \text{의 바이어스}) \quad (41)$$

여기서

$$mse(\hat{\omega}_i) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (\hat{\omega}_i^j - \omega_i)^2 \quad (\hat{\omega}_i \text{의 평균제곱오차}) \quad (42)$$

M : 잡음 종류수

보기 1) 적은 잡음 측정값 넓게 이격된 주파수인 경우의 주파수 추정

$$y(t) = \sqrt{2} \sin(0.7226t) + \sqrt{2} \sin(1.0367t) + e(t) \quad (43)$$

여기서 e(t)는 평균이 0이고 분산 $\lambda^2=0.1$ 을 가진 백색 그레이미안 프로세스이고 진폭 $\alpha_i = \sqrt{2}$ (i=1,2)이다.

데이터의 길이가 N=64이고 SNR은 10dB, (SNR_i = 10log10($\alpha_i^2/2\lambda^2$))인 조건에서 50가지 다른 잡음을 선택하여 다단 정현파의 주파수 추정을 한다.

최상 필터 차수에 대한 시뮬레이션 결과는 표1와 같고, 이에 대한 파워 스펙트럼 밀도는 그림 1과 같다. 또한 50가지 다른 잡음값에서 다단 정현파의 주파수 추정값에 대한 각 위치는 그림 2와 같다.

그림 1에서 PSD가 피크 값을 갖는 곳은 신호모델의 각 주파수 $\omega_1=0.23\pi$ 와 $\omega_2=0.33\pi$ 의 추정지점을 나타낸다. 또한 그림 2에서는 각주파수의 위치를 단위원에 표시한 것으로 exp($\pm j\omega_i$), i=1,2에서 $\omega_1=0.23\pi$ 와 $\omega_2=0.26\pi$ 의 공액복소 단위 근의 1상한 추

표 1. 주파수 추정 성능

Table 1. Frequency estimation performane.

method	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	rms($\hat{\omega}_1$)	rms($\hat{\omega}_2$)	$\delta(\hat{\omega}_1)$	$\delta(\hat{\omega}_2)$	L
LP	0.7279	1.0467	0.0438	0.0653	0.00735	0.00964	16
MR	0.7216	1.0374	0.0031	0.0028	0.00130	0.00062	16

정 지점을 나타낸다.

보기 2) 적은 잡음 측정값 좁게 이격된 주파수인 경우의 주파수 추정

$$y(t) = \sqrt{2} \sin(0.7226t) + \sqrt{2} \sin(0.8168t) + e(t) \quad (44)$$

여기서 e(t)는 평균값이 0이고 분산 $\lambda^2=0.01$ (20dB)인 백색 가우시안 잡음이다. 잡음 측정값의 수는 N=64이고, 50가지 다른 잡음에 대하여 다단 정현파의 주파수 추정을 계산한다. 시뮬레이션 결과는 표 2과 같고, 이에 대한 파워 스펙트럼 밀도와 각 위치는 그림 1, 2와 비슷하다.

표 2. 주파수 추정 성능

Table 2. Frequency estimation performance.

method	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	rms($\hat{\omega}_1$)	rms($\hat{\omega}_2$)	$\delta(\hat{\omega}_1)$	$\delta(\hat{\omega}_2)$	L
LP	0.7140	0.8409	0.0695	0.1179	0.01181	0.02947	16
MR	0.7217	0.8174	0.0031	0.0031	0.00126	0.00358	16

보기 1)과 2)를 시뮬레이션한 결과를 분석해 보면 다음과 같다.

(1) LP 방법에서 L이 작을 때 예외극점이 나타나지 않으나 다단 정현파 추정도는 매우 나쁜 상태이다. MR 방법을 사용으로도 이를 극복 할 수 없다.

(2) LP 방법에서 L을 증가시킬 때 과잉극점과 예외극점이 나타나므로 다단 정현파의 주파수 추정값이 나빠지는 경향이 있다. MR 방법의 사용으로 이를 극복할 수 있다.

(3) LP 방법에 기초를 둔 MR방법은 최상의 필터 차수의 LP방법보다 우수한 주파수 추정값을 나타내었다. 이는 MR 추정값이 LP 스펙트럼을 피이크에 도달하게 하는 주파수 점에서 간단하게 선택되기 때문이다.

(4) MR 방법을 LP 방법중 FBLP에 적용할 경우 필터 차수 증가와 더불어 주파수 추정도도 개선된다.

보기 3) 적은 잡음 측정값과 좁게 이격된 주파수에서, 칼라 잡음에 대한 견실성

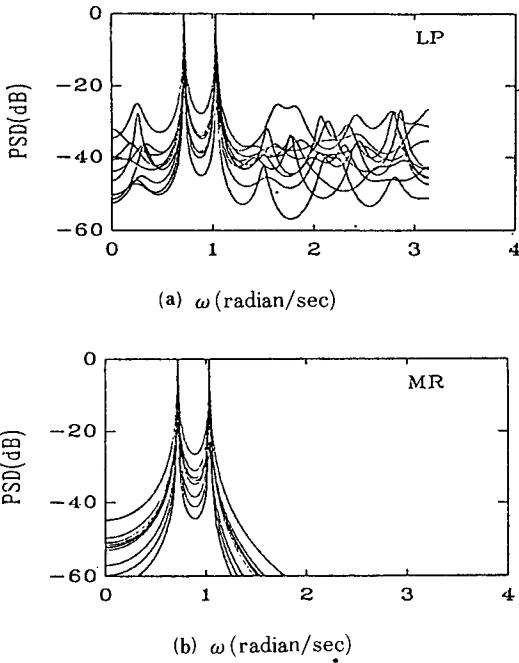


그림 1. 보기 1)에 대한 정상화된 파워 스펙트럼 밀도

Fig. 1. Normalized power spectral densities for example 1.

The angular frequency ω is in radian/sec.

$$e(t) = \varepsilon(t) - 0.823 \varepsilon(t-1) + 1.151 \varepsilon(t-2) - 0.365 \varepsilon(t-3) \quad (45)$$

여기서 $e(t)$ 가 3차 MA(moving average) 프로세스라는 것을 제외하고는 식(43)과 같다. 또한 $\varepsilon(t)$ 는 평균값이 0이고 $\lambda^2=0.0251$ 인 백색 가우시안 잡음이다. $e(t)$ 의 SNR은 11dB이다. 시뮬레이션 결과는 표 3과 같고, 이에 대한 대표적인 몇가지 경우의 파워 스펙트럼 밀도는 그림 3과 같다. 또한 50가지 다른 잡음에서 다단 정현파의 주파수 추정값에 대한 각 위치는 그림 4와 같다.

그림 3에서 PSD가 피크 값을 갖는 곳은 신호모델의 각 주파수 $\omega_1=0.23\pi$ 와 $\omega_2=0.33\pi$ 의 추정지점을 나타낸다. 또한 그림 4에서는 각주파수의 위치를

표 3. 주파수 추정 성능
Table 3. Frequency estimation performance.

method	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	rms($\hat{\omega}_1$)	rms($\hat{\omega}_2$)	$\delta(\hat{\omega}_1)$	$\delta(\hat{\omega}_2)$	L
LP	0.7167	1.367	0.0968	0.0628	0.00817	0.00000	16
MR	0.7225	1.0367	0.00110	0.0006	0.00004	0.00002	16

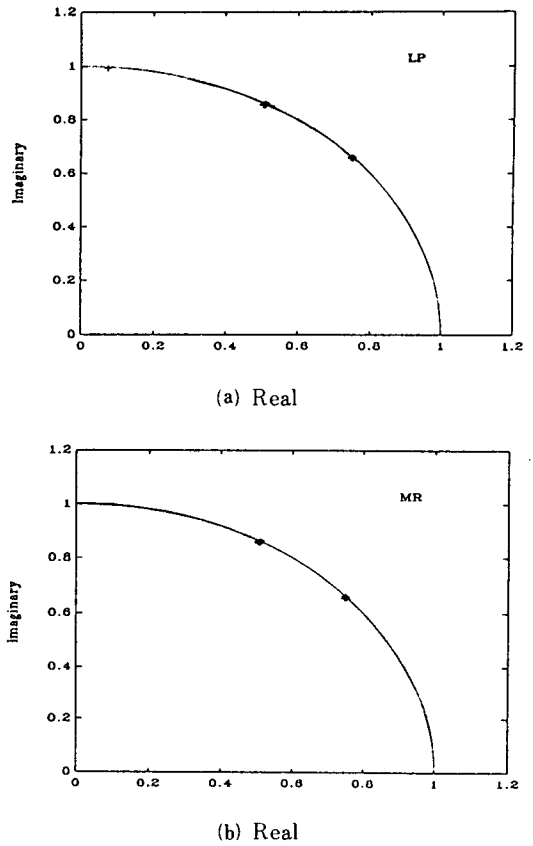


그림 2. 보기 1)에 대한 각 주파수 위치.

Fig. 2. Angular frequency positions for example 1.

단위원에 표시한 것으로 $\exp(\pm j\omega_i)$, $i=1,2$ 에서 $\omega_1=0.23\pi$ 와 $\omega_2=0.26\pi$ 의 공액 복소 단위 근의 1상한 추정지점을 나타낸다.

보기 4) 적은 잡음 측정값과 넓게 이격된 주파수에서 칼라 잡음에 대한 견실성 식(45)과 같은 3차 MA 잡음을 가진 식(44)의 프로세스로서, $e(t)$ 의 SNR은 22dB이다. 보기 2)의 표 2에서 주어진 최상의 필터 차수를 사용하여 50가지 다른 잡음에 대해 다단 정현파의 주파수 추정을 계산한다. 시뮬레이션 결과는 표 4와 같고, 이에 대한 파워 스펙트럼 밀도와 각 위치는 그림 3, 4와 비슷하다.

표 4. 주파수 추정 성능
Table 4. Frequency estimation performance.

method	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	rms($\hat{\omega}_1$)	rms($\hat{\omega}_2$)	$\delta(\hat{\omega}_1)$	$\delta(\hat{\omega}_2)$	L
LP	0.7206	0.8277	0.0301	0.0772	0.00272	0.01333	16
MR	0.7226	0.8168	0.0010	0.0008	0.00002	0.00006	16

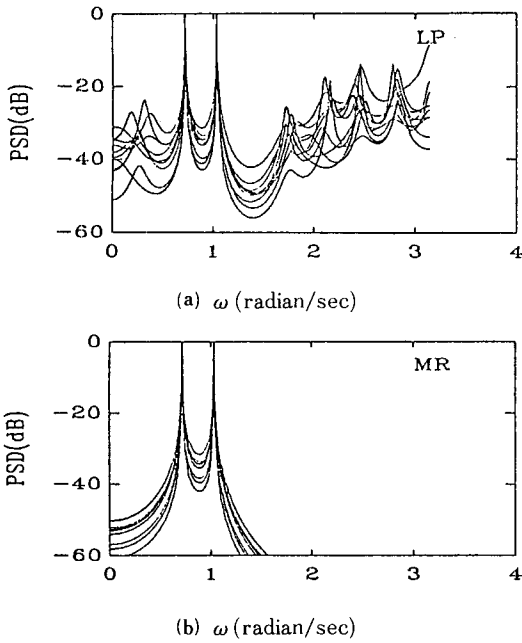


그림 3. 보기 3)에 대한 정상화된 파워 스펙트럼 밀도

Fig. 3. Normalized power spectral densities for example 3.
The angular frequency ω is in radian/sec.

보기 3)~4)에 대해 결과를 분석해 보면 다음과 같다.

(1) LP 방법은 예외극점이 없는 최상의 필터 차수 이상에서 과잉 및 예외극점의 증가를 나타내고 있다.

(2) MR 방법은 이들 극점을 효율적으로 억제하여 낮은 SNR에서도 매우 정확한 주파수 추정도를 보이고 있다.

(3) MR 방법은 칼라 잡음에서도 다단 정현파의 주파수 추정에 견실성을 나타내고 있다.

(4) MR 방법을 LP 방법중 FBLP에 적용할 경우 필터 차수 증가와 더불어 주파수 추정도도 개선된다.

한편, 많은 잡음 측정값을 사용할 경우, 보기 1)~4)의 주파수 추정 성능을 시뮬레이션을 통하여 분석해 보면 다음과 같다.

(1) 데이터 측정값이 크므로 추정값은 점근적 추정값($N \rightarrow \infty$)에 수렴함을 알 수 있다.

(2) LP 방법에서도 예외극점이 나타나지 않는다.

(3) MR 방법은 많은 잡음 측정값과 낮은 SNR의 잡음에서도 LP 방법보다도 다단 정현파의 주파수 추정에 대체로 양호한 특성을 보인다.

(4) SNR이 작더라도 LP 및 MR 방법은 공분산 행

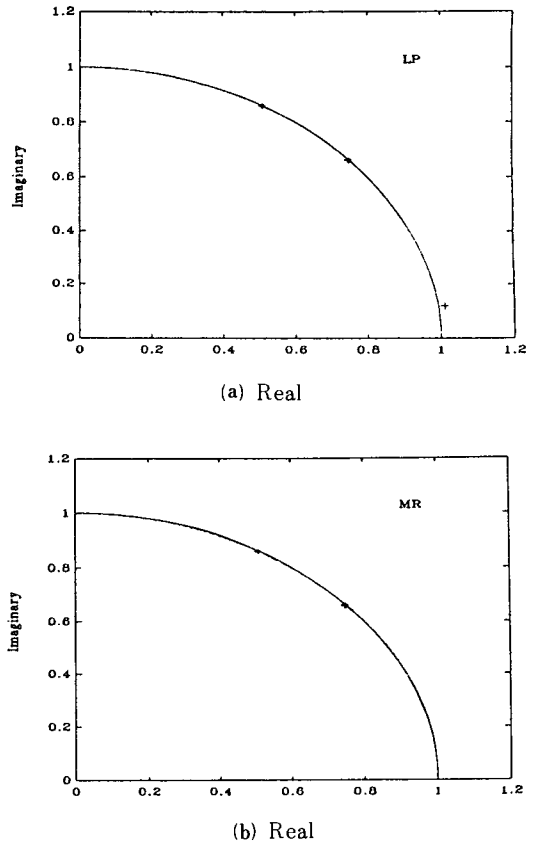


그림 4. 보기 3)에 대한 각 주파수 위치
Fig. 4. Angular frequency positions for example 3.

렬에 기초를 둔 방법보다 주파수 추정도에 있어서 우수하다.

끝으로 초기 위상이 다단 정현파의 주파수 추정에 미치는 영향을 고찰해 본다. 초기 위상값($\psi=0, 1/4\pi, 1/2\pi, 3/4\pi, \pi, 5/4\pi, 3/2\pi, 7/4\pi$)에 대해 보기 1)~4)의 필터 차수를 사용하여 다단 정현파의 주파수를 추정한다. 시뮬레이션 결과를 분석해 보면 MR 및 LP 방법으로부터 다단 정현파의 주파수 추정은 잡음 측정값의 수가 많은 적든 초기 위상에 영향을 거의 받지 않는다는 것이다. 이 방법들은 공분산 함수를 포함하지 않기 때문이다.

V. 결 론

본 연구에서는 백색 및 칼라 잡음 측정값으로부터 다단 정현파의 주파수를 추정하기 위해 축소 치수 모델을 이용하여 수정된 선형 예측 방법인 MR 방법을 제시하고 분석 연구하였다. 여러가지 보기들을 사용하여 MR 방법으로 Monte-carlo 시뮬레이션

을 실행하고, 평균값, 평균 제곱근 및 상대 바이어스를 LP 방법과 비교하였다.

이상의 연구와 시뮬레이션에서 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) MR 방법은 잡음 측정값이 유한하고 비교적 SNR이 낮은 경우에 LP 방법의 과잉 및 예외 극점을 효과적으로 제거하여 다단 정현파에 대한 양호한 주파수 추정도를 나타내었다.

(2) MR 방법은 큰 잡음 측정값과 낮은 SNR의 잡음에서도 LP 방법보다 다단 정현파의 주파수 추정에 대체로 양호한 특성을 보였다.

(3) MR 방법 LP보다 초기 위상의 영향을 덜 받아 다단 정현파의 주파수 추정에 일반적으로 민감하지 않았다.

(4) MR 방법은 특히 적은 잡음 측정값 및 낮은 SNR의 갈라 잡음에서도 다단 정현파의 주파수 추정에 견실성을 보여주었다.

(5) MR 방법은 Tufts와 Kumaresan의 방법¹⁾과 거의 같은 다단 정현파의 주파수 추정도를 나타내었다.

끝으로 이 연구는 기존의 주파수 추정 방법은 물론 신호의 특성을 추정하는 정보 통신이나 의용 생체 설비와 시스템을 모델링하는 시스템 동정 등에 이용될 수 있을 것이다.

參 考 文 獻

- [1] S. M. Kay and S.L. Marple, "Spectrum analysis-a modern perspective," *Proc. IEEE*, vol. 69, pp. 1380-1419, 1981.
- [2] S. Haykin (ed), "Nonlinear Methods of Spectral Analysis," Springer Verlag, Berlin, 1979.
- [3] *Proc. IEEE* special issue on spectral estimation, vol. 70, no. 9, 1982.
- [4] T. Soderstrom and P. Stoica, "System Identification," Prentice-Hall International, Henel Hempstead, UK, 1988.
- [5] Steven M. Kay, "Modern Spectral Estimation: Theory & Application," Prentice-Hall International, UK, 1988.
- [6] F.N. Ti, T.C. Ahn and T. Soderstrom, "Estimation of frequencies of multiple

sinusoids from short noisy measurements-a comparison," UPTEC. 8831 R., Dept. of Control and Systems, Univ. of Uppsala, Sweden, 1988.

- [7] B. Wahlberg, "On the identification and approximat on of linear system," Ph.D. dissertation, Linkoping University, Linkoping, Sweden, 1987.
- [8] T. C. Ahn, C.S. Ryu and H.S. Tak, "Frequency estimation of multiple sinusoids reduced rank model," 대한전자공학회 하계 학술대회 논문집 pp. 585-588, 1991.
- [9] D.W. Tufts and R. Kumaresan, "Estimation of frequencies of multiple sinusoids making linear prediction perform like maximum likelihood," *Proc. IEEE*, vol. 70, pp. 975-989, 1982.
- [10] G.H. Golub and C.F. Van Loan, "Matrix Computation," North Oxford academic, Oxford, UK, 1983.
- [11] P. Stoica, B. Friedlander and T. Soderstrom, "Asymptotic bias of the high-order autoregressive estimates of sinusoidal frequencies, Circuits Systems and Signal Processing," vol. 6, no. 3, 1987.
- [12] T. Kailath, "Linear Systems," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [13] J.A. Cadzow, "Spectral estimation: an over-determined rational model equation approach," *Proc. IEEE*, vol. 70, pp. 907-937, 1982.
- [14] T. C. Ahn, "Estimation of frequencies of multiple sinusoids from data based covariance matrix," *Journal of KIEE*, vol. 2, pp. 33-42, 1988.
- [15] K. Glover, "All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariabl systems and their L^∞ -error bound," *Int. J. Control*, vol. 39, no. 6, pp. 1115-1193, 1984.
- [16] A.J. Laub, M.T. Heath, C.C. Paige and R.C. Ward, "Computation of system balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-32, no. 2, pp. 115-122, 1987.

著 者 紹 介



安 泰 天(正會員)

1955年 10月 11日生. 1987年 2月 연세대학교 전기공학과 졸업. 1980年 2月 연세대학교 대학원 전기공학과 공학석사. 1980年 3月~1981年 2月 한국전력공사 원자력 요원. 1981年 3月~1986年 2月 연세대학교 대학원 전기공학과 공학박사. 1987년 9월~1988년 8월 Uppsala 대학교 제어 및 시스템공학과 Post.Doc. 1981年 3月~현재 원광대학교 공과대학 제어계측공학과 부교수. 주관심분야는 디지털 신호처리, 퍼지 및 신경회로망 응용제어, 최적 및 적응제어 등임.



李 鍾 範(正會員)

1955年 7月 12日生. 1981年 2月 한양대학교 전기공학과 졸업. 1983年 2月 한양대학교 대학원 전기공학과 공학석사. 1986年 2月 한양대학교 대학원 전기공학과 공학박사. 1987年 2月~1988年 6月 한국전기연구소 전력계통연구실 선임연구원 1988年 6月~1990年 7月 한국전기연구소 지중전송연구실 실장. 1990年 9月~현재 원광대학교 공과대학 전기공학과 조교수. 주관심분야는 전력계통 운영 및 제어, Expert System 및 신경회로망 응용제어 등임.



卓 賢 洙(正會員)

1963年 11月 25日生. 1986年 2月 원광대학교 전기공학과 졸업. 1991年 2月 원광대학교 대학원 전기공학과 공학석사. 1991年~현재 원광대학교 공업개발연구소 연구원. 주관심분야는 최적 및 적응제어, 디지털 신호처리, 퍼지 및 신경회로망 응용제어 등임.