

## 적응 쌍선형 격자필터(I) - 쌍선형 격자구조

## (Adaptive Bilinear Lattice Filter(I)-Bilinear Lattice Structure)

白 興 基\*

(Heung Ki Baik)

## 要 約

쌍선형 모델은 많은 비선형 시스템을 모델링하는 데 사용되고 있는 Volterra 모델에 비해 보다 적은 수의 계수로서 근사화할 수가 있어 많은 수의 계수를 필요로 하는 비선형 적응 필터링 분야에 효과적으로 이용할 수 있다. 한편 격자필터는 입력 데이터에 대해 그람-슈미트 직교화 하며 직접형 필터에 비해 좋은 수치적 특성을 보인다. 본 논문에서는 비선형 필터링 문제를 등가의 다채널 선형 필터링 문제로 변환하여 쌍선형필터의 격자구조를 유도하였으며 격자 파라미터로 부터 직접형 파라미터로의 변환식을 제시하였다. 또한 본 논문에서 제안한 방법이 출력제한 구조를 갖는 일반적인 비선형필터에 쉽게 확장될 수 있음을 보였다.

## Abstract

This paper presents lattice structure of bilinear filter and the conversion equations from lattice parameters to direct-form parameters. Bilinear models are attractive for adaptive filtering applications because they can approximate a large class of nonlinear systems adequately, and usually with considerable parsimony in the number of coefficients required. The lattice filter formulation transforms the nonlinear filtering problem into an equivalent multichannel linear filtering problem and then uses multichannel lattice filtering algorithms to solve the nonlinear filtering problem. The lattice filters perform a Gram-Schmidt orthogonalization of the input data and have very good easily extended to more general nonlinear output feedback structures.

## I. 서 론

선형필터와 선형시스템 모델은 많은 응용분야에 사용되고 있고 이의 실현도 쉽지만 이를 적용할 수 없는 응용분야도 적지 않다. 가장 간단한 경우가 또

화 비선형성을 가진 경우이다. 또 다른 경우는 주파수 성분이 겹쳐지지 않을 때이다. 비선형 구조를 이용한 시스템 해석은 채널등화<sup>[1]</sup> 반향제거<sup>[2],[3]</sup> 잡음제거<sup>[4],[5]</sup> 반도체 소자 모델링<sup>[6]</sup> 의용전자 현상의 모델링<sup>[7]</sup> 등 여러 분야에 널리 이용되고 있다.

비선형필터링 분야에 비교적 잘 이용되고 있는 일반적인 시스템 모델은 Volterra 시스템 모델이다.<sup>[8],[9]</sup> 이 모델은 이산 인과(causal) 비선형 시스템의 출력신호  $y(n)$  과 입력신호  $x(n)$  을 다음과 같이 입력신호에 대한 Volterra 급수로 나타낸다.

\*正會員, 全北大學校 電子工學科  
(Dept of Elec. Eng., Chonbuk Nat'l Univ.)  
接受日字: 1991年 10月 2日

$$\begin{aligned}
 y(n) = & h_0 + \sum_{m_1=0}^{\infty} h_1(m_1) x(n-m_1) \\
 & + \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} h_2(m_1, m_2) x(n-m_1) x(n-m_2) + \dots \\
 & + \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \sum_{m_p=0}^{\infty} h_p(m_1, m_2, \dots, m_p) x(n-m_1) \\
 & \quad x(n-m_2) \dots x(n-m_p) \\
 & + \dots \tag{1a}
 \end{aligned}$$

여기서  $h_p(\dots)$ 는 비선형 시스템의  $p$ 차 Volterra 커널(kernel)이다.<sup>[8],[9]</sup> 전달된 Volterra 급수에 바탕을 둔 적응 비선형 필터가 개발되어 있으나,<sup>[2],[4],[10]-(14)</sup>이 필터의 가장 큰 문제는 비선형 시스템을 모델링하는데 많은 계수를 필요로 하며 이에 따라 많은 계산량을 필요로 한다는 점이다. 이와 같은 문제를 해결하기 위하여 본 논문에서는 또 다른 접근 방법으로 비선형 제환을 포함하는 모델을 이용한다. 이 때 입력과 출력사이의 관계는 다음과 같은 순환 비선형 차분방정식 형태를 갖는다.<sup>[15]</sup>

$$y(n) = \sum_{i=1}^M P_i[x(n), \dots, x(n-N+1), y(n-1), \dots, y(n-N+1)] \tag{1b}$$

여기서  $P_i[\dots]$ 는 괄호내의 변수에 대한  $i$ 차 다항식이다. IIR 필터가 FIR 필터에 비해 많은 선형 시스템을 간단하게 모델링하는 것 처럼, 많은 비선형 시스템이 상대적으로 적은 수의 파라미터를 필요로 하는 비선형 제환 모델로 모델링될 수 있으며 이를 이용한 적응필터는 적은 수의 계산량으로 실현시킬 수 있다. 이와 같은 비선형 제환 모델중에서 가장 간단한 모델이 쌍선형 시스템 모델이다. 이 모델의 입력과 출력사이의 관계는 다음과 같은 비선형 차분방정식으로 주어진다.

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x(n-i) + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} b_{ij} x(n-i) y(n-j) + \sum_{j=1}^{N-1} c_j y(n-j) \tag{1c}$$

식(1a)로 주어지는 Volterra 시스템 모델과 비교하여 보면 쌍선형 시스템 모델이 아주 간단하게 표시됨을 명확히 알 수 있다. 쌍선형 시스템의 또 다른 장점은 일반적인 조건하에서 임의의 정밀도를 갖는 어떤 Volterra 시스템도 이를 이용하여 근사화할 수 있다는 점이다.<sup>[16]</sup> 이와 같은 장점으로 인해 쌍선형 시스템은 제어 시스템, 인구 통계 모델, 의용전자 시스템, 경제분야 등 많은 분야에 이용되고 있다. 연속 쌍선형 시스템 모델과 그에 관한 응용은 참고문헌[17],[18]에서 발견할 수 있다. 한편 격자구조는 수렴속도가 빠르고 수치적으로 안정한 알고리즘을

만들 수 있는 장점이 있다. 참고문헌 [19]에서 격자 구조에 대해 논의하고 있으나 이 방법은 비선형 시스템의 경우 아주 특별한 경우에만 유용하다. 그러나 본 논문에서 유도한 적응 격자필터는 일반적인 쌍선형 시스템 모델에 적용할 수 있고 나아가 일반적인 비선형 출력 제환 구조에 쉽게 확장할 수 있다. 본 논문은 적응 격자 쌍선형필터에 관한 논문으로서 2개의 논문으로 구성되어 있다. 본 논문은 이 중에서 첫 번째 논문으로서 쌍선형 필터의 격자구조에 관해 다루고 있다. II장에서 식(1c)으로 주어지는 쌍선형필터의 격자구조를 유도하였으며, 이 격자필터의 파라미터로부터 직접형 쌍선형필터의 파라미터로의 변환식을 III장에서 유도하였다. 마지막으로 IV장에 결론을 나타냈다.

### II. 쌍선형 필터의 격자구조

원하는 응답신호  $y(n)$ 을 입력신호  $x(n)$ 에 대해 쌍선형 시스템의 응답으로 적응시켜 추정하는 문제에 대해 생각하여 보자. 시간  $n$ 일 때의 적응필터의 파라미터에 의한  $y(k)$ 의 추정치를  $\hat{y}_n(k)$ 라 하면  $\hat{y}_n(k)$ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 \hat{y}_n(k) = & \sum_{i=0}^{N-1} a_i(n) x(k-i) + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} b_{ij}(n) x(k-i) \\
 & y(k-j) + \sum_{j=1}^{N-1} c_j(n) y(k-j) \tag{2a}
 \end{aligned}$$

여기서  $a_i(n), b_{ij}(n), c_j(n)$ 는 시간  $n$ 에서의 적응 쌍선형필터의 계수이다. 입력신호 벡터  $U_n(n)$  (벡터크기  $N^2+N-1$ )과 계수벡터  $W_n(n)$ 을 다음과 같이 각각 정의하자.

$$\begin{aligned}
 U_n(n) = & [x(n), \dots, x(n-N+1), x(n)y(n-1), \dots, \\
 & x(n-N+1)y(n-N+1), y(n-1), \dots, \\
 & y(n-N+1)]^T \tag{2b} \\
 W_n(n) = & [a_0(n), \dots, a_{N-1}(n), b_{0,1}(n), \dots, b_{N-1,N-1}(n), \\
 & c_1, \dots, c_{N-1}(n)]^T \tag{2c}
 \end{aligned}$$

여기서  $(\cdot)^T$ 는 전치행렬을 나타낸다. 식(2a)은 다음과 같이 벡터형태로 간단히 나타낼 수 있다.

$$\hat{y}_n(k) = W_n^T(n) U_n(k) \tag{2d}$$

쌍선형필터의 격자구조를 유도하기 위하여 본 논문에서 추구한 방법은 비선형 필터 문제를 등가의 다채널 선형필터링 문제로 변환시키는 것이다. 이 방법은 참고문헌 [14]에서 사용한 적응 격자 Volterra 필터 문제와 유사하다. 입력벡터  $U_n(n)$ 을 다음과 같이  $2N$ 개의 보다 작은 벡터집합으로 나누자.

$$\begin{aligned}
CH1 &: [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)] \\
CH2 &: [y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N+1)] \\
CH3 &: [x(n-1)y(n-1), x(n-2)y(n-2), \dots, x(n-N+1) \\
&\quad y(n-N+1)] \\
CH4 &: [x(n)y(n-1), x(n-1)y(n-2), \dots, x(n-N+2) \\
&\quad y(n-N+1)] \\
CH5 &: [x(n-2)y(n-1), x(n-3)y(n-2), \dots, x(n-N+1) \\
&\quad y(n-N+2)] \\
CH6 &: [x(n)y(n-2), x(n-1)y(n-3), \dots, x(n-N+3) \\
&\quad y(n-N+1)] \\
\dots & \\
CH\ 2N-1 &: [x(n-N+1)y(n-1)] \\
CH\ 2N &: [x(n)y(n-N+1)] \quad (2e)
\end{aligned}$$

이제 위의 벡터들은 각각 다른 입력채널의 연속적인 신호샘플로 이루어 진다고 볼 수 있으며 따라서 쌍선형필터링 문제는 2N개의 채널을 갖는 등가의 다채널 선형필터링 문제로 변환시킬 수 있다. 그러나 여기서 변환되는 다채널 필터는 각각의 채널이 서로 다른 수의 계수를 갖는다는 점에서 기존의 다채널 적응 선형필터와 다르다. 즉 채널1은 N개의 계수를 갖고채널 2, 3, 4는 N-1개의 계수를 갖는다. 한편 채널 2k-1, 2k는 N-k+1개의 계수를 갖는다(단k≥3).

기호를 간단히 하기 위하여  $x_i(n); i=0, 1, \dots, N-1$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned}
x_0(n) &= [x(n)] \\
x_1(n) &= [y(n-1), x(n-1)y(n-1), x(n)y(n-1)]^T \\
x_2(n) &= [x(n-2)y(n-1)x(n)y(n-2)]^T \\
&\dots \\
x_{N-1}(n) &= [x(n-N+1)y(n-1), x(n)y(n-N+1)]^T \quad (2f)
\end{aligned}$$

위의 표현은 각 부집합에 속하는 모든 채널이 같은 수의 지연 (delay)을 가지므로 유용하다. 특히  $x_i(n)$ 의 채널은 N-1-i의 지연을 갖는다. 입력벡터를 다음과 같은 채널로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
X_N(n) &= [x_0^T(n), \dots, x_0^T(n-N+1), x_1^T(n), \dots, \\
&\quad x_1^T(n-N+2), \dots, x_{N-1}^T(n)]^T \quad (2g)
\end{aligned}$$

입력벡터  $X_N(n)$ 의 모든 요소는  $U_N(n)$ 의 요소와 같다. 다만 요소의 배열이 서로 다르게 되어 있다. 두 벡터사이의 관계는 다음과 같다.

$$X_N(n) = L_N U_N(n) \quad (2h)$$

여기서  $L_N(n)$ 은 요소의 순서와 관계있는 치환행렬이다. 시간n일 때 적응필터의 계수 벡터  $C_N(n)$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned}
C_N(n) &= [c_{0,0}^T(n), \dots, c_{0,N-1}^T(n), c_{1,0}^T(n), \dots, c_{1,N-2}^T(n), \\
&\quad \dots, c_{N-1,0}^T(n)]^T \quad (2i)
\end{aligned}$$

그러면 출력신호  $\hat{y}_n(n)$ 은 다음과 같이 된다.

$$\hat{y}_n(n) = C_N^T(n) X_N(n) \quad (2j)$$

계수벡터  $C_N(n)$ 과  $W_N(n)$  사이의 관계식은 다음과 같이 된다.

$$C_N(n) = L_N W_N(n) \quad (2k)$$

쌍선형필터의 격자구조를 유도하기 위하여서는 먼저 입력 데이터에 대해 그람-슈미트 직교화 과정(Gram-Schmidt orthogonalization procedure)을 수행해야 한다. 그람-슈미트 직교화 과정을 수행하는 방법은 많이 있으나 본 논문에서 사용한 방법은 참고 문헌 [20]의 방법과 유사하다. 격자구조의 유도는 입력벡터  $X_N(n)$ 의 두가지 분할과 밀접한 관계가 있다. 첫번째로  $X_N(n)$ 의 요소를 다음과 같이 N개의 역방향 입력벡터로 분할하자.

$$\begin{aligned}
x_0^b(n) &= [x_0^T(n)]^T \\
x_1^b(n) &= [x_0^T(n-1), x_1^T(n)]^T \\
x_2^b(n) &= [x_0^T(n-2), x_1^T(n-1), x_2^T(n)]^T \\
&\dots \\
x_{N-1}^b(n) &= [x_0^T(n-N+1), x_1^T(n-N+2), \dots, \\
&\quad x_{N-1}^T(n)]^T \quad (2l)
\end{aligned}$$

$x_0^b(n), x_1^b(n), \dots, x_{m-1}^b(n)$ 을 이용하여  $x_m^b(n)$ 을 추정할 때의 최적 추정오차 벡터를  $b_m(n)$ 이라 하자. (정의에 의해  $b_0(n) = x_0^b(n)$ 임) 역방향 예측오차  $b_m(n); m=0, 1, \dots, N-1$ 이  $x_i^b(n); i=0, 1, \dots, m-1$ 의 직교 분해(orthogonal decomposition)를 이룬다는 것은 잘 알려져 있다. 일단 이런 분해가 얻어지면  $y(n)$ 을 역방향 예측오차벡터의 선형결합으로 추정할 수 있다.

일반적인 격자필터와 마찬가지로 역방향 예측오차 벡터를 효과적으로 계산하기 위하여서는 순방향 예측오차벡터에 관한 지식을 알아야 한다. 순방향 예측의 개념을 이해하기 위하여 입력 데이터의 또 다른 분할을 생각하여 보자. m차 순방향 예측오차를 정의하기 위해 식 (2l)의 처음 m+1개의 역방향 입력벡터들의 요소 ( $X_m(n)$ 의 요소와 같음)를 다음과 같이 분할하자.

$$\begin{aligned}
x_{m,0}^f(n) &= [x_0^T(n-m)]^T \\
x_{m,1}^f(n) &= [x_0^T(n-m+1), x_1^T(n-m+1)]^T \\
X_{m,2}^f(n) &= [x_0^T(n-m+2), x_1^T(n-m+2), \\
&\quad x_2^T(n-m+2)]^T \\
&\dots \\
x_{m,m}^f(n) &= [x_0^T(n), x_1^T(n), \dots, x_m^T(n)]^T \quad (2m)
\end{aligned}$$

$m$ 차 순방향 예측오차벡터  $f_m(n)$ 은  $x_{m,m}^f(n)$ 이  $x_{m,0}^f(n)$ ,  $x_{m,1}^f(n), \dots, x_{m,m-1}^f(n)$ 의 모든 요소의 선형결합으로 추정될 때의 예측오차로 정의된다(통상의 방법대로  $f_0(n)$ 은  $x_{0,0}^f(n)$ 과 같다).

격자필터에서 순방향과 역방향 예측오차의 차수 갱신식(order update equation)을 유도하여 보자. 정의에 의해  $m$ 차 순방향 및 역방향 입력벡터는 각각 다음과 같이 분할된다.

$$x_{m,m}^f(n) = \begin{bmatrix} x_{m-1,m-1}^f(n) \\ x_m(n) \end{bmatrix} \quad (2n)$$

$$x_m^b(n) = \begin{bmatrix} x_{m-1}^b(n-1) \\ x_m(n) \end{bmatrix} \quad (2o)$$

식 (2n) 와 (2o)에서의 분할방법과 비슷하게 다음과 같이 놓자.

$$f_m(n) = \begin{bmatrix} \bar{f}_m(n) \\ f_m^{(m)}(n) \end{bmatrix} \quad (2p)$$

$$b_m(n) = \begin{bmatrix} \bar{b}_m(n) \\ b_m^{(m)}(n) \end{bmatrix} \quad (2q)$$

여기서  $\bar{f}_m(n)$ 과  $\bar{b}_m(n)$ 은 각각  $x_{m-1,m-1}^f(n)$ 과  $x_{m-1}^b(n-1)$ 를 추정할 때의 예측오차벡터이다.  $b_i(n-1); i=0, 1, \dots, m-1$ 이  $x_i^b(n-1); i=0, 1, \dots, m-1$  (입력벡터  $X_m(m-1)$ 과 등가임)에 대한 직교분해를 이룬다. 더구나  $f_{m-1}(n)$ 은  $X_{m-1}(n-1)$ 의 요소의 직교분해인  $b_i(n-1); i=0, 1, \dots, m-2$  ( $X_{m-1}(n-1)$ 의 요소의 직교분해임)를 이용하여  $x_{m-1,m-1}^f(n)$ 을 추정할 때의 최적 순방향 예측오차이다. 이것은  $X_m(n)$ 을 이용한  $x_{m-1,m-1}^f(n)$ 의 순방향 예측이  $b_{m-1}(n-1)$ 에 포함되어 있는 정보를 이용함으로써 쉽게 이루어질 수 있다는 것을 의미한다. 따라서  $m$ 차 순방향 예측오차는 다음과 같이 순환적으로 구해진다.

$$f_m(n) = f_{m-1}(n) - K_m^{fT}(n) b_{m-1}(n-1) \quad (2r)$$

여기서  $K_m^f(n)$ 는  $b_{m-1}(n-1)$ 을 이용하여  $x_{m-1,m-1}^f(n)$ 을 추정할 때의 최적계수행렬이다(여기서 말하는 최적이란 말은 최소자승면에서의 최적을 의미한다).

$\hat{x}_{m-1,m-1}^f(n)$ 을  $b_i(n-1); i=0, 1, \dots, m-2$ 을 사용한  $x_{m-1,m-1}^f(n)$ 의 최적예측이라 하자. 그러면 다음 식이 성립한다.

$$x_{m-1,m-1}^f(n) = \hat{x}_{m-1,m-1}^f(n) + f_{m-1}(n) \quad (2s)$$

$b_m(n-1)$ 은  $\hat{x}_{m-1,m-1}^f(n)$ 에 수직이고  $K_m^f(n)$ 은  $b_{m-1}(n-1)$ 을 사용하여  $f_{m-1}(n)$ 을 추정한 최적계수 행렬이므로 다음 식이 성립한다.

$$K_m^f(n) = R_{m-1}^{-b}(n-1) \triangle_m(n) \quad (2t)$$

여기서  $R_{m-1}^{-b}(n)$ 은  $b_{m-1}(n)$ 의 최소자승 자기상관행렬이고,  $\triangle_m(n)$ 은  $f_{m-1}(n)$ 과  $b_{m-1}(n-1)$ 의 최소자승 교차상관행렬이다. 위에 언급한 유도과정과 마찬가지로 다음 식을 얻을 수 있다.

$$b_m(n) = b_{m-1}(n-1) - K_m^{bT}(n) f_{m-1}(n) \quad (2u)$$

여기서  $K_m^b(n)$ 는 예측기 계수행렬이다. 종래의 격자필터에서와 마찬가지로 계수행렬  $K_m^f(n)$ 와  $K_m^b(n)$ 를 반사계수행렬이라 부르기로 한다. 예측오차 벡터  $f_m^{(m)}(n)$ 과  $b_m^{(m)}(n)$ 에 관한 차수 순환식을 유도하는 것은 그다지 어렵지 않다.

$$f_m^{(m)}(n) = f_{m-1}^{(m)}(n) - K_m^{f(m)T}(n) b_{m-1}(n-1) \quad (2v)$$

$$b_m^{(m)}(n) = f_{m-1}^{(m)}(n) - K_m^{b(m)T}(n) f_{m-1}(n) \quad (2w)$$

여기서  $f_k^{(m)}(n); k=0, 1, \dots, m-1$ 는 벡터  $x_{k,0}^f(n), \dots, x_{k,k-1}^f(n)$ 을 이용하여  $x_m(n)$ 을 추정할 때의 보조(auxiliary) 예측오차 벡터이고,  $K_m^{f(m)}(n)$ 와  $K_m^{b(m)}(n)$ 는  $m$ 차 단에서의 보조 반사계수 행렬이다.  $f_k^{(m)}(n)$ 는 다음과 같이 순환적으로 구해진다.

$$f_k^{(m)}(n) = f_{k-1}^{(m)}(n) - K_k^{f(m)T}(n) b_{k-1}(n-1); \quad k=1, 2, \dots, m-1 \quad (2x)$$

여기서  $f_0^{(m)}(n) = x_m(n)$ 이다.

점합과정(joint process) 추정오차  $e_n(n)$ 은 입력벡터  $X_N(n)$ 을 사용하여  $y(n)$ 을 추정할 때의 오차로서 다음과 같다.

$$e_n(n) = y(n) - C_N^T(n) X_N(n) \quad (2y)$$

앞에 설명한 바와 같이 역방향 오차벡터  $b_0(n), \dots, b_{N-1}(n)$ 이 입력벡터  $X_N(n)$ 의 요소에 의해 생성되는 공간과 같은 공간을 생성하고,  $b_m(n)$ 이  $b_0(n), \dots, b_{m-1}(n)$ 에 의해 생성되는 공간에 수직이므로 점합과정 추정오차는 다음과 같이 순환적으로 구해될 수 있다.

$$e_m(n) = y(n) - \sum_{i=1}^m k_i^{yT}(n) b_{i-1}(n) = e_{m-1}(n) - k_m^{yT}(n) b_{m-1}(n) \quad (2z)$$

여기서  $k_m^y(n)$ 은 계수벡터이고  $e_0(n) = y(n)$ 이다.

개발된 격자구조가 그림1에 이에 대한 완전한 격자식이 표1에 나타나 있다.

### III. 격자로부터 직접형의 변환

격자 파라미터로부터 직접형(direct-form) 파라미터로의 변환은 쉽게 얻을 수 있다. 본 논문에서 제

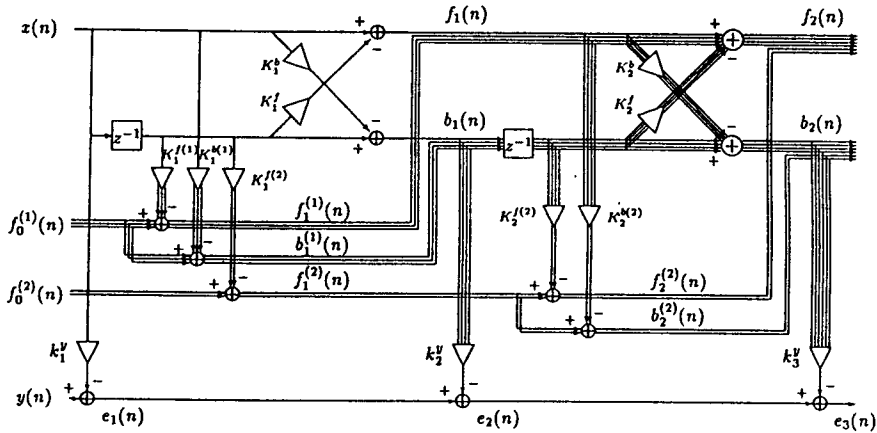


그림 1. N=3일 때의 쌍선형 격자구조의 블럭도  
 Fig. 1. Block diagram of the bilinear lattice structure for N=3.

표 1. 쌍선형 격자필터  
 Table 1. Bilinear lattice filter.

**Initialization**

$$f_0(n) = b_0(n) = x(n) \quad (T-1a)$$

$$f_0^{(p)}(n) = \begin{bmatrix} [y(n-1), x(n-1)y(n-1), x(n)y(n-1)]^T, p=1 \\ [x(n-p)y(n-1), x(n)y(n-p)]^T, p=2, 3, \dots, N-1 \end{bmatrix} \quad (T-1b)$$

$$e_0(n) = y(n) \quad (T-1c)$$

**Iteration Procedure**

DO (T-d) - (T-1g), for  $m=1, 2, \dots, N-1$

$$f_m(n) = \begin{bmatrix} f_{m-1}(n) - K_m^{sT}(n) b_{m-1}(n-1) \\ f_{m-1}^{(m)}(n) - K_m^{s(m)T}(n) b_{m-1}(n-1) \end{bmatrix} \quad (T-1d)$$

$$b_m(n) = \begin{bmatrix} b_{m-1}(n-1) - K_m^{bT}(n) f_{m-1}(n) \\ f_{m-1}^{(m)}(n) - K_m^{b(m)T}(n) f_{m-1}(n) \end{bmatrix} \quad (T-1e)$$

DO (T-1f), for  $p=m+1, m+2, \dots, N-1$

$$f_m^{(p)}(n) = f_{m-1}^{(p)}(n) - K_m^{s(p)T}(n) b_{m-1}(n-1) \quad (T-1f)$$

$$e_m(n) = e_{m-1}(n) - k_m^{yT}(n) b_{m-1}(n) \quad (T-1g)$$

$$e_N(n) = e_{N-1}(n) - k_N^{yT}(n) b_{N-1}(n) \quad (T-1h)$$

시한 방법은 2채널의 경우에 대해 참고문헌 [20] 에서 제시한 방법보다 훨씬 간단하다. 변환식의 유도 에 앞서 쌍선형필터의 직접형에 관계된 몇가지 계수 에 대해 정의하여 보자. 먼저 다음과 같이 치환행렬  $T_m$ 과  $S_m$ 을 정의하여 보자.

$$T_m X_m(n) = \begin{bmatrix} x_{m-1:m-1}^s(n) \\ X_{m-1}(n-1) \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$S_m X_m(n) = \begin{bmatrix} X_{m-1}(n) \\ x_{m-1}^b(n) \end{bmatrix} \quad (3b)$$

여기서  $T_m$ 과  $S_m$ 은 직교행렬로서  $T_m^{-1} = T_m^T, S_m^{-1} = S_m^T$ 이다.

$A_m(n)$ 과  $B_m(n)$ 을 각각 앞에서 정의한  $m$ 차 순방향 예측기와 역방향 예측기의 계수 행렬이라 하자. 순방향 예측오차와 역방향 예측오차는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_m(n) = x_{m:m}^s(n) - A_m^T(n) X_m(n-1) = [I, -A_m^T(n)] T_{m+1} X_{m+1}(n) \quad (3c)$$

$$b_m(n) = x_{m:m}^b(n) - B_m^T(n) X_x(n) = [-B_m^T(n), I] S_{m+1} X_{m+1}(n) \quad (3d)$$

계수벡터  $A_m(n)$ 과  $B_m(n)$ 은 각각 다음과 같이 분할 할 수 있다.

$$A_m(n) = [A_m(n), A_m^{(m)}(n)] \quad (3e)$$

$$B_m(n) = [B_m(n), B_m^{(m)}(n)] \quad (3f)$$

따라서 예측오차는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_m(n) = x_{m-1:m-1}^s(n) - A_m^T(n) X_m(n-1) \quad (3g)$$

$$f_m^{(m)}(n) = x_m(n) - A_m^{(m)T}(n) X_m(n-1) \quad (3h)$$

$$b_m(n) = x_{m-1}^b(n-1) - B_m^T(n) X_m(n) \quad (3i)$$

$$b_m^{(m)}(n) = X_m(n) - B_m^{(m)T}(n) X_m(n) \quad (3j)$$

직접형의 보조 예측기의 계수벡터  $A_m^{(p)}(n)$ 과 접합 과정 예측기의 계수벡터  $C_m(n)$ 역시 비슷하게 정의 할 수 있고 이를 이용하여 예측오차를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_m^{(p)}(n) = x_p(n) - A_m^{(p)T}(n) X_m(n-1); \quad p = m+1, m+2, \dots, N-1 \quad (3k)$$

$$e_m(n) = d(n) - C_m^T(n) X_m(n) \quad (3l)$$

이제  $m$ 단의 직접형 계수행렬과  $m-1$ 단의 직접형 계수행렬,  $m$ 단의 반사계수행렬 사이의 관계를 유도하여 보자. 식 (3c) 과 식 (3d) 를 식 (2r) 에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} f_m(n) &= f_{m-1}(n) - K_m^{\sigma T}(n) b_{m-1}(n-1) \\ &= x_{m-1:m-1}^{\sigma}(n) - A_{m-1}^T(n) X_{m-1}(n-1) \\ &\quad - K_m^{\sigma T}(n) [-B_{m-1}^T(n-1), I] S_m X_m(n-1) \\ &= x_{m-1:m-1}^{\sigma}(z) - [A_{m-1}^T(n), 0] \begin{bmatrix} X_{m-1}(n-1) \\ x_{m-1}^b(n-1) \end{bmatrix} \\ &\quad - K_m^{\sigma T}(n) [-B_{m-1}^T(n-1), I] S_m X_m(n-1) \\ &= x_{m-1:m-1}^{\sigma}(n) - [A_{m-1}^T(n), 0] + K_m^{\sigma T}(n) \\ &\quad [-B_{m-1}^T(n-1), I] \mid S_m X_m(n-1) \quad (3m) \end{aligned}$$

여기서 0은 모든 요소가 0인 행렬이다.

위의 식과 식 (3g) 을 비교하여 보면 다음과 같은  $A_m(n)$  에 관한 순환식을 얻을 수 있다.

$$A_m(n) = S_m^T \left\{ \begin{bmatrix} A_{m-1}(n) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_{m-1}(n-1) \\ I \end{bmatrix} K_m^{\sigma}(n) \right\} \quad (3n)$$

비슷하게 식 (3k) 과 식 (3d) 를 식 (T-1f) 에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} A_m^{(p)}(n) &= S_m^T \left\{ \begin{bmatrix} A_{m-1}^{(p)}(n) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_{m-1}(n) \\ I \end{bmatrix} K_m^{\sigma^{(p)}}(n) \right\}; \\ p &= m, m+1, \dots, N-1 \quad (3o) \end{aligned}$$

$B_m(n)$  과  $C_m(n)$  의 갱신식 역시 비슷하게 얻을 수 있다.

$$B_m(n) = T_m^T \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ B_{m-1}(n-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ -A_{m-1}(n) \end{bmatrix} K_m^b(n) \right\} \quad (3p)$$

$$B_m^{(m)}(n) = T_m^T \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ A_{m-1}^{(m)}(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ -A_{m-1}(n) \end{bmatrix} K_m^{b(m)}(n) \right\} \quad (3q)$$

$$C_m(n) = S_m^T \left\{ \begin{bmatrix} C_{m-1}(n) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_{m-1}(n) \\ I \end{bmatrix} K_m^{\nu}(n) \right\} \quad (3r)$$

격자형태와 직접형의 첫번째 단의 구조는 정확히 같으므로 식 (3m) - (3r) 의 순환식은 다음과 같이 초기화 된다.

$$A_1(n) = K_1^{\sigma}(n) \quad (3s)$$

$$B_1(n) = K_1^b(n) \quad (3t)$$

$$A_1^{(p)}(n) = K_1^{\sigma^{(p)}}(n); p = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3u)$$

$$B_1^{(1)}(n) = K_1^{b(1)}(n) \quad (3v)$$

$$C_1(n) = k_1^{\nu}(n)$$

완전한 순환식이 표2에 나타나 있다. 역으로 직접형 파라미터로부터 격자형 파라미터로의 변환과정

을 생각하여 보자. 일반적인 점합과정 예측기와 마찬가지로 반사계수와 보조반사계수는 직접형 계수와 관계가 없고 입력 데이터로부터 직접 구해지며, regression 계수만이 직접형 계수와 관계가 있음을 표 2를 통해 알 수 있다. 이제 반사계수 행렬  $K_m^{\sigma}(n)$ ,  $K_m^b(n)$ , 보조반사계수 행렬  $K_m^{\sigma^{(p)}}(n)$  은 입력데이터로부터 구할 수 있기 때문에 이 파라미터와 직접형 계수벡터  $C_N(n)$  이 주어질 때 regression 계수벡터  $k_m^{\nu}(n); m=1, \dots, N-1$  을 구하는 방법을 유도하여 보자. 식 (3r) 로 부터  $k_m^{\nu}(n)$  은 벡터  $S_m C_m(n)$  의 마지막  $2m$  개의 요소로 이루어진 벡터임을 알 수 있다(단  $k_1^{\nu}(n)$  은 1개의 요소로 이루어짐). 먼저 다음과 같은  $(m^2+m-1) \times (2m)$  행렬  $M_m$  과  $(m^2+m-1) \times (m^2-m-1)$  행렬  $N_m$  을 정의하여 보자.

$$M_m = [ \underline{0}, I_{2m} ] \quad (3w)$$

$$N_m = [ I_{m^2-m-1}, 0 ] \quad (3x)$$

위에서 정의한 행렬을 이용하여 직접형 계수벡터를 다음과 같이 분할할 수 있다.

표 2. 격자로 부터 직접형으로의 변환

Table 2. Conversion from lattice to direct from.

Initialization

$$A_1(n) = [ K_1^{\sigma}(n), K_1^{(m)}(n) ] \quad (T-2a)$$

$$B_1(n) = [ K_1^b(n), K_1^{b(m)}(n) ] \quad (T-2b)$$

$$A_1^{(p)}(n) = K_1^{\sigma^{(p)}}(n); p = 2, 3, \dots, N-1 \quad (T-2c)$$

$$C_1(n) = k_1^{\nu}(n) \quad (T-2d)$$

Iteration Procedure

DO (T-2e) - (T-2h), for  $m=2, 3, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} A_m(n) &= S_m^T \left[ \begin{bmatrix} A_{m-1}(n) - B_{m-1}(n-1) K_m^{\sigma}(n), \\ K_m^{\sigma}(n) \\ A_{m-1}^{(m)}(n) - B_{m-1}^{(m)}(n-1) K_m^{\sigma^{(m)}}(n) \end{bmatrix} \right] \quad (T-2e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_m(n) &= T_m^T \left[ \begin{bmatrix} K_m^b(n) \\ B_{m-1}(n-1) - A_{m-1}(n), K_m^b(n), \\ K_m^{b(m)}(n) \\ A_{m-1}^{(m)}(n) - A_{m-1}(n) K_m^{b(m)}(n) \end{bmatrix} \right] \quad (T-2f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{DO (T-2g), for } p &= m+1, m+2, \dots, N-1 \\ A_m^{(p)}(n) &= S_m^T \left[ \begin{bmatrix} A_{m-1}^{(p)}(n) - B_{m-1}(n-1) K_m^{\sigma^{(p)}}(n) \\ K_m^{\sigma^{(p)}}(n) \end{bmatrix} \right] \quad (T-2g) \end{aligned}$$

$$C_m(n) = S_m^T \left[ \begin{bmatrix} C_{m-1}(n) - B_{m-1}(n) k_m^{\nu}(n) \\ k_m^{\nu}(n) \end{bmatrix} \right] \quad (T-2h)$$

$$C_N(n) = S_N^T \left[ \begin{bmatrix} C_{N-1}(n) - B_{N-1}(n) k_N^{\nu}(n) \\ k_N^{\nu}(n) \end{bmatrix} \right] \quad (T-2i)$$

$$K_m^y(n) = M_m S_m C_m(n) \quad (3y)$$

$$C_{m-1}(n) - B_{m-1}(n) k_m^y(n) = N_m S_m C_m(n) \quad (3z)$$

식 (3y)와 식 (3z)으로 부터 regression 계수벡터의 갱신식이 다음과 같이 구해진다.

$$C_{m-1}(n) = [N_m + B_{m-1}(n) M_m] S_m C_m(n) \quad (3z-z)$$

따라서  $C_N(n)$ 이 주어지면 식 (3z-z)을 이용하여  $C_m(n); m=1, \dots, N-1$ 을 구할 수 있고 식 (3y)에 의해 regression 계수벡터  $k_m^y(n); m=1, \dots, N$ 을 구할 수 있다.

#### IV. 결 론

Volterra 필터는 비선형 시스템을 정확하게 근사화할 수가 있어 비선형 시스템의 모델링에 널리 사용되고 있으나 많은 계수를 필요로 하고 이에 따라 많은 계산량을 필요로 한다. 이에 비해 제한을 갖는 비선형 필터로서 가장 간단한 모델인 쌍선형 필터는 보다 적은 수의 계수를 사용하여 비선형 시스템을 모델링할 수 있는 장점이 있다.

쌍선형 필터링 문제를 등가의 다채널 선형 필터링 문제로 변환시켜 입력신호를 그람-슈미트 직교화하고 좋은 수치적 특성을 갖는 쌍선형 필터의 격자구조를 유도하고 이 격자 파라미터로부터 직접형 파라미터를 얻을 수 있는 변환식을 본 논문에서 유도하였다. 본 논문에서 유도한 격자구조는 일반적인 쌍선형 시스템 모델에 적용할 수 있고 나아가 일반적인 다채널 필터와 비선형 출력제한 구조에 쉽게 확장할 수 있다.

본 논문에서 다루지 않은 것중 가장 중요한 것은 쌍선형 시스템의 안정성이다. 일반적으로 입력 신호의 특성과 무관한 쌍선형 시스템의 안정조건을 유도하는 것은 불가능하다. 쌍선형 시스템의 입력과 출력사이의 관계를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x(n-i) \sum_{j=1}^{N-1} [c_j + \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i)] y(n-j) \quad (4)$$

위의 식을 보면 쌍선형 시스템의 안정조건이 입력 신호의 특성과 관계있음을 쉽게 짐작할 수 있다. 쌍선형 시스템의 (평균자승) 안정조건과 입력 신호의 특성과의 관계를 몇개의 논문에서 다루고 있으나<sup>[21]-[23]</sup> 이러한 방법은 안정성을 조사하는데 있어 많은 계산량을 필요로 한다. 좀더 효율적인 안정성 조사 방법을 현재 연구중에 있다.

#### 참 고 문 헌

- [1] S. Benedetto, E. Biglieri, and V. Castellini, *Digital Transmission Theory*, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1987.
- [2] J.R. Casar-Corredera, M. Garcia-Otera, and A. Figueiras-Videl, "Data echo nonlinear cancellation," *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing* (Tampa, Florida), pp. 32.4.1-4, Mar. 1985.
- [3] G.L. Sicuranza, A. Bucconi, and P. Mitri, "Adaptive echo cancellation with nonlinear digital filters," *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing* (San Diego, California), pp. 3.10.1-4, Mar. 1984.
- [4] M.J. Coker and D.M. Simkins, "A nonlinear adaptive noise canceller," *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, pp. 470-473, 1980.
- [5] J.C. Stapleton and S.C. Bass, "Adaptive noise cancellation for a class of nonlinear dynamic reference channels," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. CAS-32, no. 2, pp. 143-150, Feb. 1985.
- [6] S. Narayanan, "Application of Volterra series to intermodulation distortion of transistor feedback amplifiers," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-17, pp. 518-527, Nov. 1970.
- [7] P.J. Marmarelis and V.Z. Marmarelis, *Analysis of Physiological Systems*, New York: Plenum, 1978.
- [8] W.J. Rugh, *Nonlinear System Theory: The Volterra/ Wiener Approach*, Baltimore: The John Hopkins Univ. Press, 1981.
- [9] M. Schetzen, *The Volterra Wiener Theory of the Nonlinear Systems*, New York: Wiley and Sons, 1980.
- [10] T. Koh and E.J. Power, "Second-order Volterra filtering and its application to nonlinear system identification," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-33, no. 6, pp. 1445-1455, Dec. 1985.
- [11] C.F.N. Cowan and P.M. Grant, "Nonlinear system modeling-concept and application," *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing* (San Diego, California), pp.45.6.1-4, Mar. 1984.
- [12] V.J. Mathews and J. Lee, "A fast least-squares second-order Volterra filter," *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing* (New York), 1988.

- [13] G.L. Sicuranza and G. Ramponi, "Adaptive nonlinear digital filters using distributed arithmetics," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-34, no. 3, June 1986.
- [14] M.A. Syed and V.J. Mathews, "Lattice and QR decomposition-based algorithms for recursive least squares adaptive nonlinear filters," *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems (New Orleans, Louisiana)*, May 1990.
- [15] S.A. Billings, "Identification of nonlinear systems-A survey," *IEE Proceedings*, vol. 127, Part D, no. 6, pp. 272-285, Nov. 1980.
- [16] Roger W. Brockett, "Volterra series and geometric control theory," *Automatica*, vol. 12, pp. 167-176, 1976.
- [17] R.R. Mohler and W.J. Kolodziej, "An overview of bilinear system theory and applications," *IEEE Trans. Syst. Man, Cybern.*, vol. SMC-10, pp. 683-688, Oct. 1980.
- [18] C. Bruni, G. Di Pillo, and G. Koch, "Bilinear systems: an appealing class of 'nearly linear systems' in theory and applications," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-19, pp. 334-348, 1974.
- [19] S.R. Parker and F.A. Perry, "A discrete ARMA model for nonlinear system identification," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. CAS-28, no. 3, Mar. 1981.
- [20] F. Ling and J.G. Proakis, "A generalized multichannel least squares lattice algorithm based on sequential processing stages," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-32, no. 2, pp. 381-389, Apr. 1984.
- [21] C.S. Kubrusly and O.L.V. Costa, "Mean square stability conditions for discrete stochastic bilinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-30, no. 11, pp. 1082-1087, Nov. 1985.
- [22] C.S. Kubrusly, "On discrete stochastic bilinear systems stability," *J. Math. Anal. Appl.*, 113, pp. 36-58, 1986.
- [23] J. Liu, "On the existence of a general multiple bilinear time series," *J. Time Series Anal.*, vol. 10, no. 4, pp. 341-355, 1989.

---

 著 者 紹 介
 

---



白興基(正會員)

1955年 1月 5日生. 1977年 2月 서울대학교 전자공학과 졸업. 공학사 취득. 1979年 8月 서울대학교 대학원 전자공학과 졸업. 공학석사 취득. 1987年 2月 서울대학교 대학원 전자공학과 졸업 공학박사 취득. 1981年 3月~현재 전북대학교 공과대학 전자공학과 부교수. 1990年 1月~1991年 1月 Utah 대학 전기공학과 Post Doc. 주관심분야는 디지털 신호처리, 적응 신호처리, 비선형 신호처리 분야 등임.