

◎ 論 文

# 配管系の 振動解析을 위한 周波數從屬 要素行列

梁 保 錫\* · 安 永 供\*\* · 崔 沅 鎬\*\*\*

(1992년 7월 10일 접수)

## Frequency-Dependent Element Matrices for Vibration Analysis of Piping Systems

B. S. Yang · Y. K. Ahn · W. H. Choi

**Key Words :** Vibration Analysis(振動解析), Frequency-Dependent Element Matrices(周波數從屬 要素行列), Pipe Element(管要素), Transfer Matrix(傳達行列), Dynamic Stiffness Matrix(動剛性行列)

### Abstract

This paper presents an approach for the derivation of frequency-dependent element matrices for vibration analysis of piping systems containing a moving medium. The dynamic stiffness matrix is deduced from transfer matrix, and, in turn, the frequency-dependent element matrices are derived. Numerical examples show that this method gives more accurate results than those obtained using the conventional static shape function based element matrices.

### 1. 序 論

流動流體를考慮한 配管系の 振動解析에는 傳達行列法<sup>1)</sup>이나 靜的形狀函數(static shape function)를 利用한 有限要素法(FEM)<sup>2)</sup>이 널리 使用되고 있다. 傳達行列法은 配管系를 여러개의 要素로 分離하고 質量은 各 要素의 兩端에 表示한다. 이러한 近似로 인해 實際 固有振動數에 誤差를 發生시키게 되고 計算精度를 增加시키기 위해 使用되는 要

素數를 增加 시켜야만 한다. 또한 數值的 不安定이 行列의 곱계산의 結果로 發生할 수 있음이 오래전 부터 알려져 왔다.<sup>3)</sup> 한편 有限要素法은 分布 配管 要素로 부터 誘導된 要素質量 및 剛性行列을 基礎로 境界條件과 適合性을 利用하여 系全體의 質量 및 剛性行列을 構成하고 있다. 이 方法은 從來의 傳達行列法에 비해 計算精度가 增加되나, 複雜한 配管系の 경우 막대한 計算記憶容量을 必要로 하는 點과 靜的形狀函數를 利用하여 要素行列을 誘導함으로 發生하는 誤差가 있다. 著者는 이 誤差를

\* 정회원, 부산수산대학교 공과대학 기계공학과

\*\* 부산수산대학교 기계공학과 대학원

\*\*\* 효성중공업(주) 기술연구소

減少시키는 方法으로 振動數를 利用하여 振動數從屬의 有限要素行列을 誘導하고 回轉軸系에 適用하여 計算精度를 크게 向上시킬 수 있음을 보고 하였다.<sup>4,5)</sup>

本 論文에서는 보의 變位函數를 利用하여 誘導한 傳達行列로 부터 動剛性行列을 구하고 振動數에 關係 級數展開함으로써 周波數從屬 質量行列과 剛性行列을 誘導하고, 嚴密解 및 從來의 傳達行列과 有限要素모델의 結果와 比較 · 檢討하여 그 有用性을 確認하였다.

### 2. 配管要素의 傳達行列

流動流體를 考慮한 均一보의 굽힘振動에 대한 運動方程式은 아래와 같다.<sup>6)</sup>

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\rho v \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

셋째항은 角速度를 갖는 管内流體의 相對運動 때문에 發生하는 코리올리스(Coriolis) 加速度를 나타내는 항으로 一般産業用 配管系에서 使用되는 流體速度 0~15m/s 程度의 領域에서는 거의 影響이 없으므로<sup>1)</sup>, 計算을 單純化 시키기 위해서 本 研究에서는 無視하였다. 式(1)의 解는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$y(x, t) = Y(x, \omega) e^{i\omega t} \quad (2)$$

本 論文에서는 보 理論의 變位函數(displacement function)을 導入하여 式(3)과 같이 나타낸다.

$$Y(x, \omega) = A \sin(P_2 x) + B \cos(P_2 x) + C \sinh(P_1 x) + D \cosh(P_1 x) \quad (3)$$

式(3)에서  $P_1, P_2$ 는 運動方程式의 特性方程式(4)의 根이다.

$$EIP^4 + \rho v^2 P^2 - m\omega^2 = 0 \quad (4)$$

$Y(x, \omega)$ 을  $x$ 에 대하여 各各 微分하면, 다음과 같이 角變位, 모멘트 및 剪斷力으로 表示할 수 있다.

$$\theta(x, \omega) = -Y'(x, \omega)$$

$$M(x, \omega) = -E I Y''(x, \omega) \quad (5)$$

$$V(x, \omega) = -E I Y'''(x, \omega)$$

式(3)과 (5)을 利用하여 狀態벡터를 行列形態로 表示하면, 式(6)과 같이 얻을 수 있다.

$$\{Z(x)\} = [G(x)] \{B\} \quad (6)$$

여기서

$$\{Z(x)\} = [-Y \ \theta \ M \ V]^T, \{B\} = -[A \ B \ C \ D]^T$$

$$[G(x)] = \begin{bmatrix} \sin(P_2 x) & \cos(P_2 x) & \sinh(P_1 x) & \cosh(P_1 x) \\ P_2 \cos(P_2 x) & -P_2 \sin(P_2 x) & P_1 \sin(P_1 x) & P_1 \cosh(P_1 x) \\ -E I P_2^3 \sin(P_2 x) & -E I P_2^3 \cos(P_2 x) & E I P_1^3 \sinh(P_1 x) & E I P_1^3 \cosh(P_1 x) \\ -E I P_2^3 \cos(P_2 x) & E I P_2^3 \sin(P_2 x) & E I P_1^3 \cosh(P_1 x) & E I P_1^3 \sinh(P_1 x) \end{bmatrix}$$

式(6)에서 길이  $L$ 의 直線 管要素일 때, 管要素의 左側端( $x=0$ )에서 狀態벡터는  $\{Z_0\}$ , 左側端( $x=L$ )에서는  $\{Z_L\}$ 로 表示할 수 있으므로, 式(6)을 이용하면  $\{Z_0\}$ 와  $\{Z_L\}$  사이의 關係는 다음式과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{Z_L\} = [G(L)] [G(0)]^{-1} \{Z_0\} = [T] \{Z_0\} \quad (7)$$

또는

$$\begin{bmatrix} -Y(L) \\ \theta(L) \\ V(L) \\ M(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Y(0) \\ \theta(0) \\ V(0) \\ M(0) \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서  $f_{11} \sim f_{44}$ 는 전달행렬의 要素를 나타낸다.

式(7)에서  $[T]$ 는 直線配管에서 左右端의 狀態벡터  $\{Z_0\}$ 와  $\{Z_L\}$  사이에 關係되는 굽힘 振動에 대한 傳達行列(transfer matrix)을 나타낸다<sup>7)</sup>. 이 行列에서  $P_1, P_2$ 는 振動數  $\omega$ 의 函數이므로, 管要素의 傳達行列  $[T]$ 도  $\omega$ 의 函數로 된다. 이 傳達行列  $[T]$ 는  $x$ 軸으로 놓여 있는 配管要素에 대하여  $xy$  平面과  $xz$  平面에 같이 適用할 수 있다.

### 3. 動剛性行列(Dynamic Stiffness Matrix)

式(7)의 要素 傳達行列  $[T]$ 는 다음과 같이 分離될 수 있다.<sup>5)</sup>

$$\begin{Bmatrix} V_L \\ P_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{vv} & T_{vp} \\ T_{pv} & T_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_o \\ P_o \end{Bmatrix} = \begin{array}{|l} \text{Kinematics} \\ \text{Effects of} \\ \text{supports,} \\ \text{foundations,} \\ \text{etc} \end{array} \begin{array}{|l} \text{Material law} \\ \text{Equilibrium} \end{array} \begin{Bmatrix} V_o \\ P_o \end{Bmatrix} \dots\dots (9)$$

여기서  $V$ 와  $P$ 는 각각 변위와 힘의 벡터이다.  $i$  번째 요소에 대한 전달행렬은 식(9)를 행렬조작을 하므로써 다음과 같이 동강성행렬  $[k]_{dyn}^i$ 로 변환될 수 있다.<sup>5)</sup>

$$\begin{Bmatrix} P_o \\ P_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{vp}^{-1}T_{vv} & T_{vp}^{-1} \\ T_{pv} - T_{pp}T_{vp}^{-1}T_{vv} & T_{pp}T_{vp}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_o \\ V_L \end{Bmatrix}$$

$$\{p\}^i = [k]_{dyn}^i \{v\}^i \dots\dots\dots (10)$$

式(10)은 요소 節點에 作用하는 힘에 대한 橫變位 및 角變位로 표현하면, 아래와 같다.

$$\begin{Bmatrix} V_o \\ M_o \\ V_L \\ M_L \end{Bmatrix} = \frac{EI}{\Delta} \begin{bmatrix} k_{11} & k_2 & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & -k_{14} & k_{24} \\ \text{symm.} & & k_{11} & -k_{12} \\ & & & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_o \\ \theta_o \\ W_L \\ \theta_L \end{Bmatrix}$$

$$\{p_b\}^i = [k]_{dyn}^i \{v_b\}^i \dots\dots\dots (11)$$

式(11)의 굽힘振動에 대한 動剛性行列의 要素들은 附錄 I 에 나타내었다. 動剛性行列을 利用한 固有振動數의 計算은 式(11)의 要素 動剛性行列을 利用하여 構成한 系全體의 動剛性行列의 式(12)을 利用하여 固有值와 固有모드를 얻을 수 있다.

$$[k]_{dyn}^i \{v\} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

### 4. 周波數 從屬行列(Frequency-Dependent Matrix)

正確한 周波數從屬의 質量行列 및 剛性行列은 動剛性行列로 부터 얻어진다<sup>8)</sup>. 動剛性行列은 要素들이 三角函數 및 雙曲線函數로 構成되어 있으므로 Taylor 級數로 展開될 수 있다. 式(11)의 動

剛性行列은 式(13)과 같이 流動流體의 速度와 振動數에 대한 從屬行列로 構成되어 있으며, 行列들을 附錄 II 에 보인다. 여기서  $[A]$ 와  $[A_2]$ 는 從來의 流動流體를 無視하고 靜的 形狀函數를 利用한 有限要素法(FEM)의 剛性 및 質量行列이고, 式(12)의 動剛性行列  $[k]_{dyn}^i$ 은 다음과 같이 나타내어진다.

$$[k]_{dyn}^i = [A] - [A_1]v^2 - [A_2]\omega^2 - [A_3]v^2\omega^2 - [A_4]v^4 - [A_5]\omega^4 - \dots\dots\dots (13)$$

### 5. 數值計算 結果의 比較 및 考察

數值計算列로서 單純한 直管의 兩端固定과 兩端單純支持條件에 대해 固有振動數를 計算하고 既存의 傳達行列法, 有限要素法의 結果와 比較·考察하였다. 兩端固定配管의 數值計算에는 To와 Kaladi<sup>1)</sup>의 資料, 즉 配管의 縱彈性係數(Young's Modulus)  $5.512 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>, 內徑 17.7mm, 두께 1.9588mm, 길이 2.52984m, 單位길이당 配管의 質量 1.6668kg/m, 單位길이당 流體의 質量 0.23811 kg/m, 포아송비 0.3으로 하였다. 兩端單純支持配管의 數值計算에 使用된 資料<sup>2)</sup>로는 縱彈性係數(Young's Modulus)  $3.9786 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>, 內徑 22.225mm, 두께 1.5875mm, 길이 1.511m, 單位길이당 配管의 質量 0.1415kg/m, 單位길이당 流體의 質量 0.3874kg/m, 포아송비 0.3으로 하였다. 그림에서 퍼센트誤差는 다음과 같이 定義된다.

$$\text{Percentage error}(\%) = \frac{|\omega_{exact} - \omega_i|}{\omega_{exact}} \times 100$$

여기서  $\omega_{exact}$ 는 嚴密한 固有振動數<sup>9)</sup>이고,  $\omega_i$ 는 各種 方法으로 구한 固有振動數이다.

Fig. 1은 兩端固定配管의 流速이 없는 境遇, 要素數의 變化에 대한 1, 2, 3次 固有振動數의 收斂特性을 나타낸 것이다. 周波數 從屬行列의  $\omega^2$ (FDMO),  $\omega^4$ (FDM)項까지 고려한 計算値와 從來의 有限要素法(FEM)의 結果値를 嚴密解에 의한 퍼센트誤差로 나타낸 그림이다.  $\omega^2$ (FDMO)項까지 考慮한 計算値와 有限要素法의 結果는 一致하고, 要素數가 적은 境遇에 큰 誤差를 包含하고 있

으며, 要素數가 增加하면 嚴密解에 收斂한다.  $\omega^4$  (FDM)項까지 考慮한 計算値는 위 두 方法에 比해 적은 要素數에서도 큰 差異없이 아주 正確한 計算結果를 얻는다.

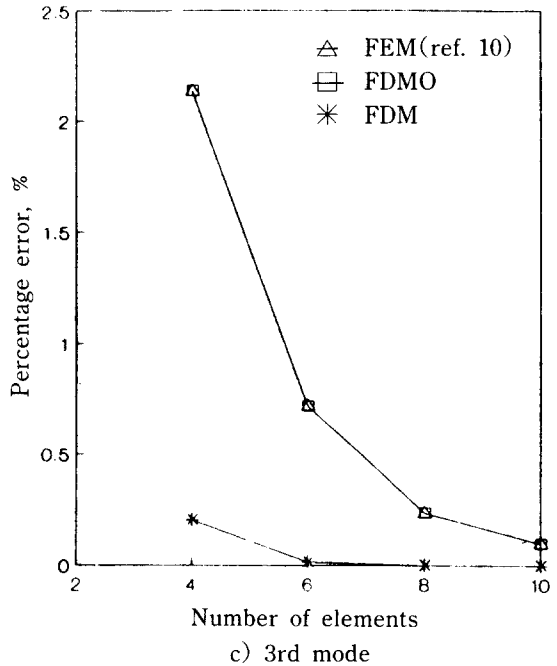
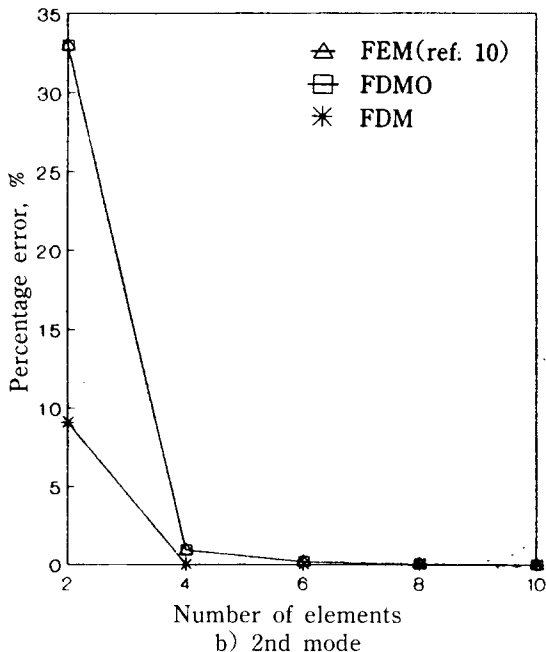
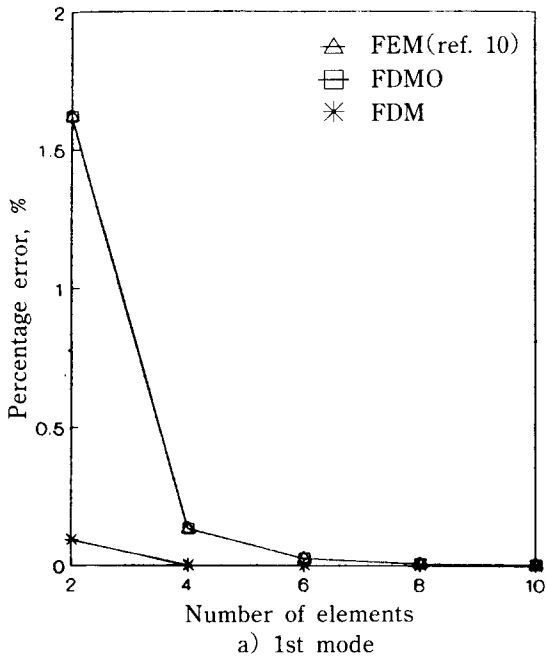


Fig. 1 Convergence characteristics of natural frequencies as a function of the number of element for clamped-clamped straight piping system (velocity = 0)

Fig. 2는 要素數를 6개로 同一한 길이로 分割한 兩端固定配管의 流速變化에 따라 傳達行列法 (TMM)에 의한 解로 無次元化한 周波數從屬行列法(FDM, FDMO), 有限要素法(FEM)의 固有振動數 計算結果를 比較하였다. 有限要素法과  $\omega^2$ 까지 考慮한 周波數從屬行列法(FDMO)에 의한 結果는 流速이 없는 境遇와 마찬가지로 一致하며 多少 精密度가 떨어진다. 周波數從屬行列法(FDM)은 傳達行列法의 固有値와 거의 一致한다.

Fig. 3은 要素數를 6개로 分割한 兩端單純支持配管의 臨界流速( $v_c = 19.37438828$ )<sup>10)</sup>에 대한 無次元 流速變化에 따른 1, 2, 3次 固有振動數의 收斂特性을 보이고 있다. 周波數從屬行列法(FDM), 有限要素法(FEM), 傳達行列法(TMM)의 結果를 Blevins의 結果와의 퍼센트誤差로 나타낸 그림으

로써, 코리올리스(Coriolis) 加速度項을 無視했기 때문에 각 方法은 速度의 增加에 따라 誤差가 增加하는 傾向을 보이고 있다.

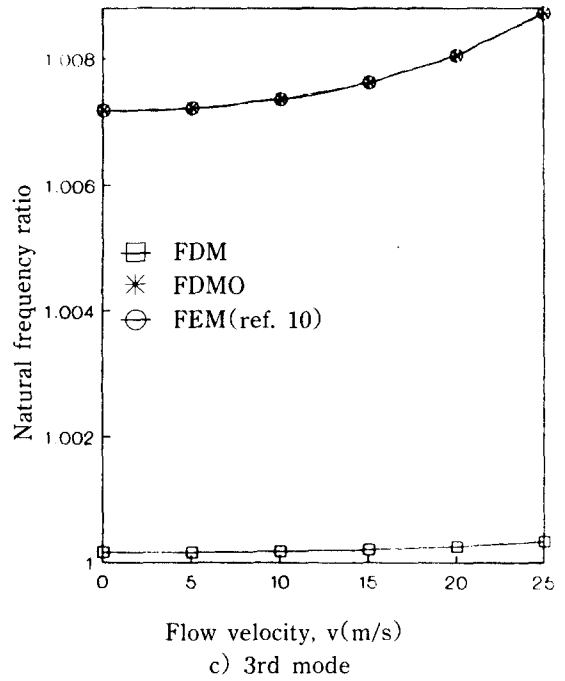
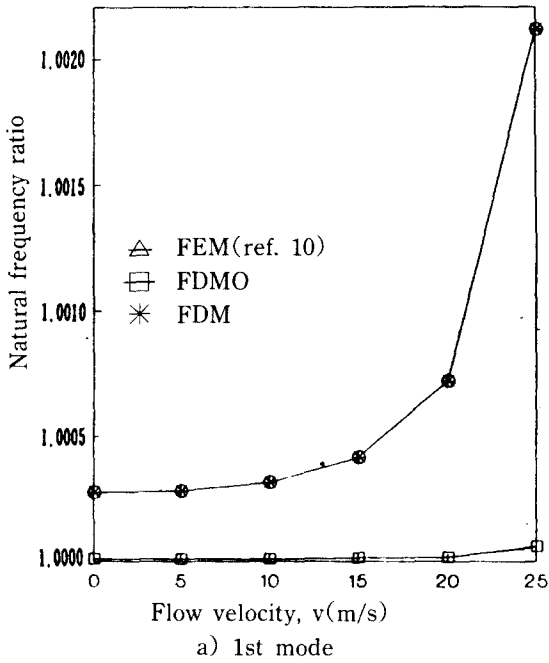
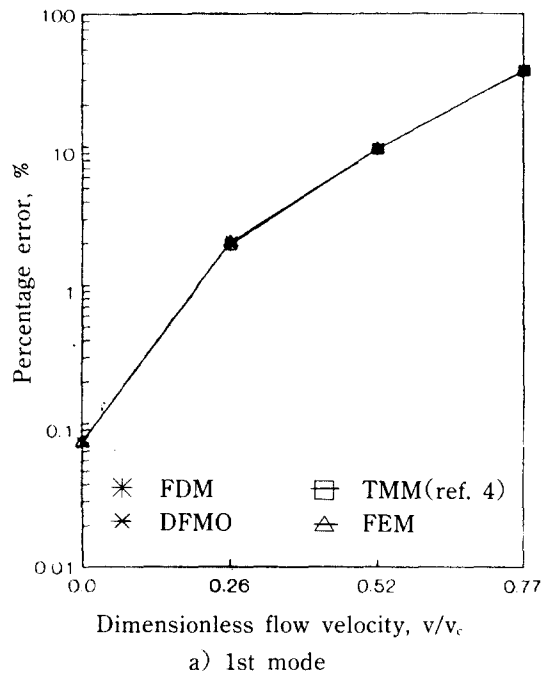
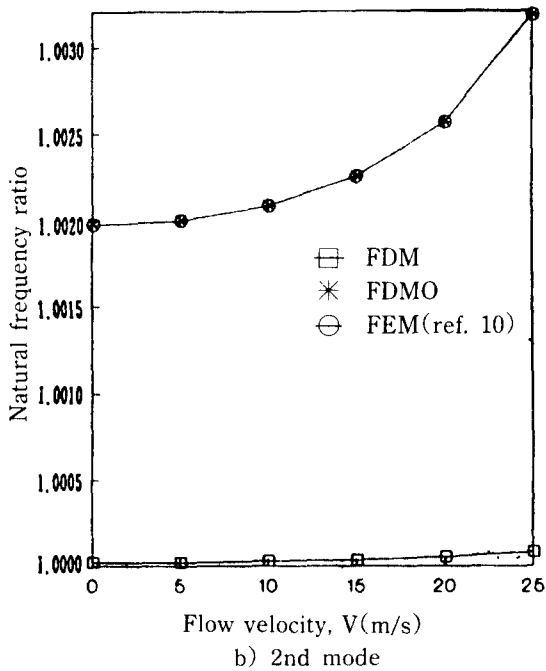


Fig. 2 Comparison of natural frequency ratio of clamped-clamped straight piping system a function of flow velocity



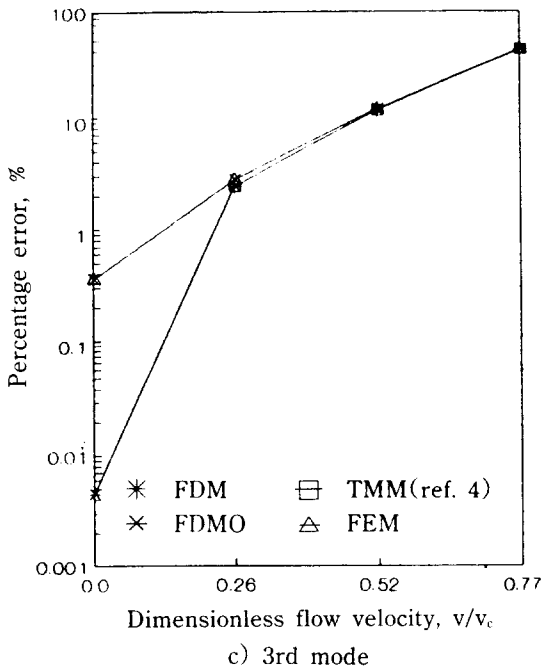
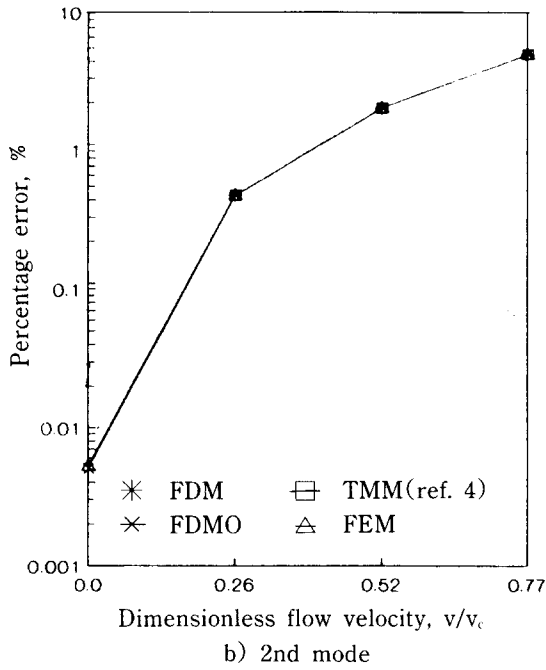
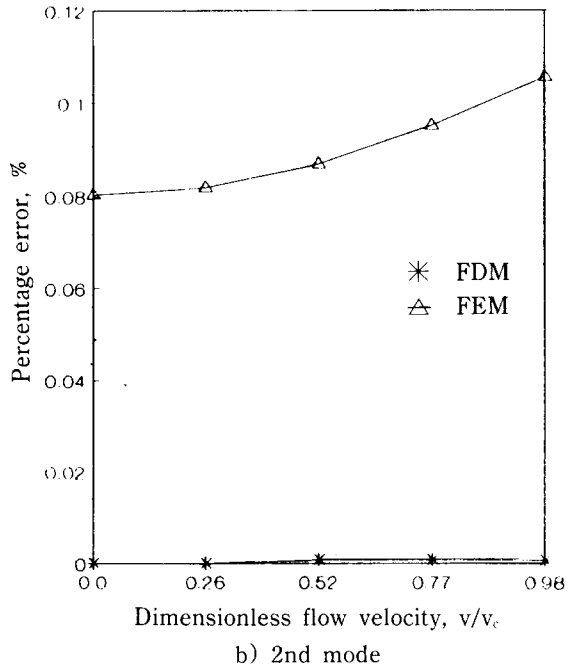
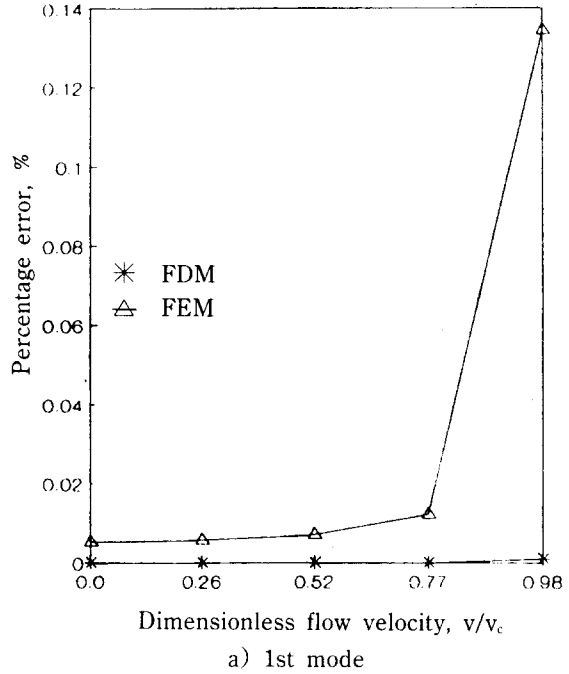


Fig. 3 Convergence characteristics of natural frequencies as a function of flow velocity for pinned-pinned straight piping system.

Fig. 4는 Fig. 2와 同一한 條件으로서, 周波數從屬行列法(FDM)과 有限要素法(FEM)의 結果를 傳達行列法(TMM)의 固有值에 對한 퍼센트誤差로 1, 2, 3次 固有振動數의 收斂特性을 보이고 있



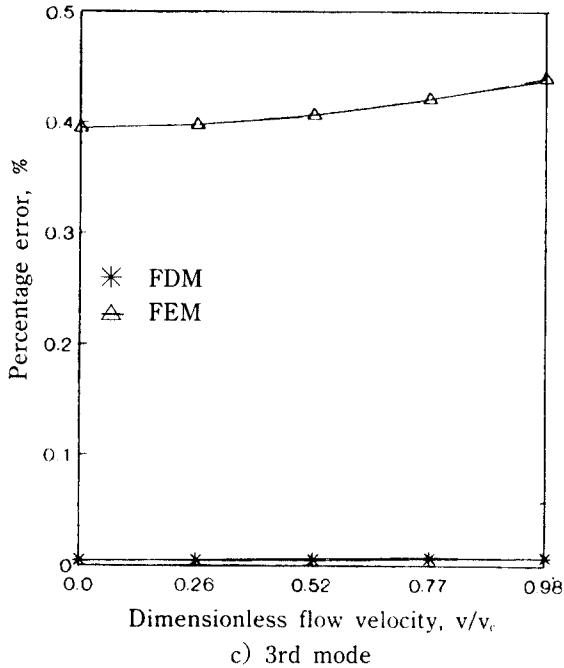


Fig. 4 Convergence characteristics of natural frequencies as a function of flow velocity for pined-pined straight piping system.

다.  $\omega^2$ 까지 考慮한 有限要素法에 의한 計算은 要素數를 많이 分割한 境遇에도 周波數從屬行列(FDM)에 비해 正確度가 많이 떨어진다.

### 6. 結 論

流體流動을 考慮한 配管系の 動剛性行列을 利用하여 周波數從屬行列을 새로이 誘導하였고, 이의 有用性을 既存의 方法과 比較·檢討하였다. 위에서 얻어진 結論을 要約하면 다음과 같다.

$\omega^2$ (FDMO)項까지 考慮한 周波數從屬行列에 의한 結果는 流速에 關係없이 從來의 靜의 形狀函數를 利用한 有限要素法의 計算値와 同一한 正確度를 얻는다. 그러나 多少 正確度가 떨어지는 것을 알 수 있고, 특히 要素數가 적은 境遇는 相當한 誤差를 包含한다.  $\omega^4$ 項까지 考慮할 때 매우 적은 要素數에서도 嚴密解와 잘 一致한다. 따라서 본

方法은 보다 正確한 固有振動數와 모드를 얻기 위한 보다 信賴性이 높고 正確한 固有値 알고리즘으로 使用될 수 있다.

### 參 考 文 獻

- To, C. W. S. and Kaladi, V., "Vibration of Piping Systems Containing a Moving Medium by the Transfer Matrix Method", Trans. ASME Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 107, pp. 334~349, 1985.
- Kohli, A. K. and B. C. Nakra, "Vibration Analysis of Straight Tubes Conveying Fluid by Means of Straight Beam Finite Elements", Journal of Sound and Vibration 93(2), pp. 307~311, 1984.
- Pestel, E. C. and Leckie, F. A., "Matrix Methods in Elastomechanics", McGraw Hill Book Co., Inc., 1963.
- Yang, B. S. Pilkey, W. D. and Fergusson, N. J., "Frequency Dependent Element Matrices for Rotor Dynamics Analysis", Journal of Sound and Vibration, Vol. 158, No. 2, 1992.
- Yang, B. S. and Pilkey, W. D., "Accurate Free Vibration Analysis for Rotating Shaft", ASME. Conf. on Mechanical Vibration and Noise, Rotating Machinery and Vehical Dynamics, DE-Vol. 35, 1991.
- Housner, G. W. "Bending Vibrations of a Pipeline Containing Flowing Fluid", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 19, pp. 205~208, 1952.
- 안영공, "유체의 유동을 고려한 일반배관의 진동해석", 부산수산대학교 석사학위논문, p. 45, 1992.
- Pilkey, W. D. "A New Look at Frequency Dependent Structural Matrices to Achieve Accurate Free Dynamics Analyses", Proceeding of 28th Strutral Dynamics and Materials Conference, paper No. 87-0815, part 2a pp. 296~299, 1987.

9. Blevins, R. D. "Formulas of Natural Frequency and Mode Shape", Van Nostrand Reinhold Co., 1979.
10. Blevins, R. D. "Flow Induced Vibrations", Van Nostrand Reinhold Co., 197.
11. 이영신, 천일환, "전달행렬을 이용한 유동매체를 가진 배관요소의 진동특성분석", 대학기계학회 추계학술대회 논문집(II) pp. 238~242, 1990.

### 附錄 I

式(11)의 굽힘振動에 대한 動剛性行列의 要素들은 다음과 같이 나타낸다.

$$\Delta = -P_2S_2S_4 - P_1S_6S_8 + \sin P_2L \sinh P_1L (P_2S_2S_8 - P_2S_4S_6) - \cos P_2L \cosh P_1L (P_1S_4S_6 + P_2S_2S_8)$$

$$k_{11} = -\sin P_2L \cosh P_1L (P_2S_3S_8 - P_2S_4S_7) - \cos P_2L \sinh P_1L (P_1S_3S_8 - P_1S_4S_7)$$

$$k_{12} = P_2S_1S_4 + P_1S_5S_8 - \sin P_2L \sinh P_1L (P_1S_1S_8 - P_2S_4S_5) + \cos P_2L \cosh P_1L (P_1S_1S_5 + P_2S_1S_8)$$

$$k_{13} = -P_2S_4 \sin P_2L + P_1S_8 \sinh P_1L$$

$$k_{14} = -S_4 \cos P_2L - S_8 \cosh P_1L$$

$$k_{22} = \sin P_2L \cosh P_1L (P_1S_2S_5 - P_1S_1S_6) + \cos P_2L \sinh P_1L (P_2S_1S_6 - P_2S_2S_5)$$

$$k_{23} = -k_{14}, \quad k_{24} = -S_2 \sin P_2L - S_6 \sinh P_1L$$

$$k_{33} = k_{11}$$

$$k_{34} = -k_{12}, \quad k_{44} = k_{22}$$

여기서,

$$S_1 = -(EI)^2(P_1^5 + P_1^3P_2^2)$$

$$S_2 = EI(P_1^3 + P_1P_2^2),$$

$$S_3 = -(EI)^2(P_1^5P_2 + P_1^3P_2^3)$$

$$S_4 = EI(P_1^3P_2 + P_1P_2^3)$$

$$S_5 = -(EI)^2(P_1^2P_2^3 + P_2^5)$$

$$S_6 = -EI(P_1^2P_2 + P_2^3)$$

$$S_7 = -(EI)^2(P_1^3P_2^2 + P_1P_2^5)$$

$$S_8 = -EI(P_1^3P_2 + P_1P_2^3)$$

### 附錄 II

式(13)에 나타내 있는 굽힘振動에 대한 周波數從屬行列에 대한 要素행렬들은 다음과 같다.

$$[A] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & & & \text{symm.} \\ 6L & 4L^2 & & \\ -12 & -6L & 12 & \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$[A_1] = \rho_f \begin{bmatrix} 6/5L & & & \text{symm.} \\ 1/10 & 2L/15 & & \\ -6/5L & -1/10 & 6/5L & \\ 1/10 & -L/30 & -1/10 & 2L/15 \end{bmatrix}$$

$$[A_2] = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ \text{symm.} & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$[A_3] = \frac{\rho_m L^3}{EI} \begin{bmatrix} 1/3150 & & & \text{symm.} \\ L/1260 & L^2/3150 & & \\ -1/3150 & L/1680 & 1/3150 & \\ -L/1680 & -L^2/3600 & -L/1260 & L^2/3150 \end{bmatrix}$$

$$[A_4] = \frac{\rho_f}{EI} \begin{bmatrix} L/700 & & & \text{symm.} \\ L^2/1400 & 11L^3/6300 & & \\ -L/700 & -L^2/1400 & L/700 & \\ -L^2/1400 & -13L^3/12600 & -L^2/1460 & 11L^3/6300 \end{bmatrix}$$

$$[A_5] = \frac{m^2 L^5}{69854400EI} \begin{bmatrix} 25488 & 5352L & 23022 & -5043L \\ & 1136L^2 & 5043L & -1097L^2 \\ & & 25488 & -5352L \\ \text{symm.} & & & 1136L^2 \end{bmatrix}$$