

◎ 論 文

모멘트 방정식 방법에 의한 횡요 운동 방정식의 랜덤 해석

배 준 홍* · 권 순 홍** · 하 동 대***

(1992년 8월 6일 접수)

Random Analysis of Rolling Equation of Motion of Ships Based on Moment Equation Method

Junhong Bai, Sun Hong Kwon, Dong Dai Ha

Key Words : Moment Equation Method(모멘트 방정식 방법), Random Analysis(랜덤해석), Rolling Equation of Motion(횡요 운동방정식), Shaping Filter(형상필터), Non-stationary Response(비정상응답)

Abstract

In this paper an application technique of moment equation method to solution of nonlinear rolling equation of motion of ships is investigated. The exciting moment in the equation of rolling motion of ships is described as non-white noise. This non-white exciting moment is generated through use of a shaping filter. These coupled equations are used to generate moment equations. The nonstationary responses of the nonlinear system are obtained. The results are compared with those of a linear system.

1. 서 론

진동 분야에서는 랜덤 기진력에 대한 시스템의 동적 거동에 대하여 오래전부터 많은 연구가 행해져 왔다. 특히 최근에는 비백색 잡음 기진력에 대한 시스템의 응답에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다.

비백색 잡음 기진력은 백색 잡음을 필터에 통과

시켜서 생성시키는 방법이 주로 사용되고 있다. 이 경우 FPK 방법을 사용하여 그 추이 확률 밀도 함수(transitional probability density function)를 구할 수도 있지만 4개의 독립 변수를 갖는 FPK 방정식을 풀기는 대단히 어렵다.¹⁾

Kimura, Sakata²⁻⁵⁾ 등은 모멘트 방정식 방법에 의해 비백색 잡음하의 시스템의 비정상 응답을 구하는 방법을 제시하였다. 이 방법은 FPK 방법에 비해서 비교적 쉽게 응답의 통계적 성질이 구해지

* 부산대학교 대학원 조선공학과

** 정회원, 부산대학교 조선공학과

*** 부산대학교 조선공학과

는 장점이 있다. 그들은 선형 감쇄와 비선형 복원항으로 구성된 지배 방정식을 필터 방정식과 같이 풀어서 비정상 평균 응답을 구하였다.

조선 분야에서는 필터를 이용한 FPK 방법을 Francescutto⁶⁻⁷⁾가 제시한 바 있지만, 필자들이 아는 바로는, 모멘트 방정식 방법은 아직 제시된 바 없다고 생각된다. 따라서 본 연구에서는 모멘트 방정식 방법에 의해 필터 방정식과 연성된 비선형 감쇄와 비선형 복원형태를 가지는 선형 항의 운동 방정식을 푸는 방법이 제시되었다.

2. 지배 방정식

본 연구에서는 선박 횡요 운동의 강한 비선형성을 고려하여 감쇄항과 복원항을 각각 3차의 비선형항으로 포함하고 있는 비선형 횡요 운동 방정식을 도입하였다.

$$\ddot{\theta} + D(\dot{\theta}) + R(\theta) = F(t) \dots\dots\dots (1)$$

여기서, θ 는 선박의 횡요각이고 $D(\dot{\theta})$ 는 감쇄항을 나타내고 $R(\theta)$ 는 복원항을 나타낸다. 본 연구에 사용된 감쇄항과 복원항을 구체적으로 나타내면 다음과 같다.

$$D(\dot{\theta}) = C_1\dot{\theta} + C_3\dot{\theta}^3 \dots\dots\dots (2)$$

$$R(\theta) = \omega_n^2(\theta + \lambda\theta^3) \dots\dots\dots (3)$$

여기서, C_1 은 선형 감쇄 계수이고 C_3 는 비선형 감쇄 계수를 나타내며, ω_n 은 고유 주파수이고 λ 는 비선형 복원항을 결정하는 계수이다.

$F(t)$ 는 진폭 변조(amplitude modulation)된 비백색 랜덤 기진 모우먼트이고 아래와 같은 특성을 갖는다.

$$F(\tau) = e(\tau)n(\tau) \dots\dots\dots (4)$$

$$E[n(\tau)] = 0, E[n(\tau)n(\tau+v)] = R(v) \dots\dots (5)$$

여기서,
 $e(\tau)$; deterministic envelope function
 $n(\tau)$; 영평균(zero mean)과 상관 함수(correlation function) $R(v)$ 를 갖는 가우시안 비백색 잡음

특히, 본 연구에서는 백색 잡음으로 입력을 받아 비백색 잡음으로 바꾸는 형상 필터(shaping filter)가 도입되었으며 그 필터 방정식은 아래와 같다.

$$\dot{F} + \gamma F + \Omega^2 F = \Omega^2 w(t) \dots\dots\dots (6)$$

여기서,
 γ ; 주파수 폭
 Ω ; 중심 주파수
 $w(t)$; 영평균이고 밀도 S_w 를 갖는 백색 잡음 즉, $w(t)$ 의 통계적 성질을 수학적으로 표현하면 다음과 같다.

$$E[w(t)] = 0, E[w(t)w(t+\tau)] = 2\pi S_w \delta(\tau) \dots\dots\dots (7)$$

3. 모우먼트 방정식 방법

(1)에 나타난 운동 방정식과 (6)에 나타난 필터의 방정식을 matrix꼴로 나타내기 위해 $y_1 = \theta, y_2 = \dot{\theta}, z_1 = F, z_2 = \dot{F}$ 으로 두면

$$d \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix} d\tau + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} dW \dots\dots\dots (8)$$

여기서,
 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -C_1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2 & -\gamma \end{bmatrix}$
 $g = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega^2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$

이고, W 는 $E[dW] = 0, E[(dW)^2] = I_w d\tau$ 의 성질을 갖는 일차원 Wiener 과정이다.

식 (8)에 의해 나타난 시스템의 모우먼트 방정식들은 $\dot{E}[yy^T] = E[\dot{y}\dot{y}^T] + E[y\dot{y}^T]$ 의 성질로부터

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zy} & P_{zz} \end{bmatrix} = \frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} E[yy^T] & E[yz^T] \\ E[zy^T] & E[zz^T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[\dot{y}\dot{y}^T] + E[y\dot{y}^T] & E[\dot{y}z^T] + E[yz^T] \\ E[\dot{z}y^T] + E[zy^T] & E[\dot{z}z^T] + E[zz^T] \end{bmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

$$= \left[\begin{array}{cc} AP_{yy} + CP_{zy} + P_{yy}A^T + P_{yz}C^T & AP_{yz} + CP_{zz} + P_{yz}B^T \\ BP_{zy} + P_{zy}A^T + P_{zz}C^T & BP_{zz} + P_{zz}B^T \end{array} \right] \\ - \left[\begin{array}{cc} P_{gy} + P_{yg} & P_{gz} \\ P_{gz} & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & \beta\beta^T \end{array} \right] I_w \dots \quad (9)$$

여기서,

$$P_{yy} = E[yy^T], P_{yz} = E[yz^T] = P_{zy}^T, P_{zz} = E[zz^T] \\ \dots \dots \dots \quad (10)$$

$$P_{gy} = E[gy^T] = P_{yg}^T, P_{gz} = E[gz^T] = P_{zg}^T \dots \quad (11)$$

이다. 식 (9)의 모우멘트 방정식의 독립 변수들은 다음과 같은 세 종류의 모우멘트 형태로 분류된다.

- (a) P_{yy} ; 주 시스템의 출력 과정 y 에 대한 모우멘트
- (b) P_{yz} ; 주 시스템의 출력 과정 y 와 필터의 출력 z 사이에 연성된 모우멘트
- (c) P_{zz} ; 필터의 출력 과정 z 에 대한 모우멘트

그래서 (9)식은 아래와 같은 형태로 쓰여질 수 있다.

$$\dot{P}_{yy} = v_1 [P_{yy}(\tau), P_{yz}(\tau), P_{gy}(\tau)] \\ \dot{P}_{yz} = v_2 [P_{yz}(\tau), P_{gz}(\tau), P_{zz}(\tau)] \dots \dots \dots (12) \\ \dot{P}_{zz} = v_3 [P_{zz}(\tau)]$$

여기서, v_1, v_2, v_3 은 각각 P 즉, 모우멘트들의 합수를 나타낸다.

고차의 모우멘트는 이차 모우멘트의 항으로 표현 가능하다는 응답에 대한 가우시안 가정하에서 P_{gy} 와 P_{gz} 는

$$P_{gy}(\tau) = w_1 [P_{yy}(\tau)] \\ P_{gz}(\tau) = w_2 [P_{yz}(\tau), P_{yz}(\tau)] \dots \dots \dots (13)$$

으로 표현될 수 있고, w_1, w_2 는 비선형 함수이다. (13)식을 (12)식에 대입하면

$$\dot{P}_{yy} = v_1 \{P_{yy}(\tau), P_{yz}(\tau), w_1 [P_{yy}(\tau)]\} \\ \dot{P}_{yz} = v_2 \{P_{yz}(\tau), w_2 [P_{yy}(\tau), P_{yz}(\tau)], P_{zz}(\tau)\} \\ \dot{P}_{zz} = v_3 [P_{zz}(\tau)] \dots \dots \dots (14)$$

와 같은 형태를 얻을 수 있다. 식 (14)를 Runge-

Kutta방법에 의해서 시간 적분하면 선박 횡요의 통계적 성질이 비교적 쉽게 얻어진다.

4. 필터 방정식의 계수 결정

본 연구에서는 JONSWAP wave spectrum으로부터 기진 모우멘트 스펙트럼을 구한 다음 이를 필터 방정식으로부터 구한 기진 모우멘트 스펙트럼과 비교함으로써 필터 방정식의 계수들을 구한다.

본 연구에서는 Vassilopoulos⁸⁾가 발표한 주파수 응답 함수를 사용하였다. 즉, 해상파 스펙트럼으로부터 얻어지는 기진 모우멘트 스펙트럼은 (15)식과 같은 형태로 나타난다.

$$S_M(\omega) = |\alpha^*(\omega)|^2 S(\omega) \dots \dots \dots (15)$$

여기서,

$$\alpha^* = \frac{b\omega^2}{g} \omega_{eq}^2$$

b ; 유체 동역학적 계수

g ; 중력 가속도(9.8m/s²)

$S_M(\omega)$ 는 무차원화된 기진 모우멘트 스펙트럼이고 $S(\omega)$ 는 역시 무차원화된 해상 파스펙트럼이다. 또한 ω_{eq} 는 주어진 비선형 시스템과 등가의 통계적 성질을 주는 선형 복원 계수로써 등가 선형화법에 의해 구해진다.

5. 수치 해석 및 결과

본 연구에 사용된 횡요 기진 모우멘트는 필터 방정식에 의하여 (6)식과 같이 주어진다. 본 연구에서는 식 (4)에 나타나 있는 deterministic envelope function $e(\tau)$ 를 단위 계단 함수(Unit step function) 즉, $t < 0$ 일 경우 $e(\tau) = 0$ 이고 $t > 0$ 일 경우 $e(\tau) = 1$ 인 형태로 취하였다. 지진 문제를 다룰 때에는 $e(\tau)$ 가 시간에 따라 감소하는 지수 함수(exponential function)의 합의 형태로 표현된다.

수치 해석을 수행할 때 초기치 설정이 아주 중요하게 부각되었다. 본 연구에서는 필터 방정식에 대하여 정상 상태로 가정을 함으로써 필터 방정식

에 대한 모우먼트 방정식들이 close된 형태로 풀어져서 계산이 가능하였다.

Fig. 1-3에서는 선형 감쇄 계수 $C_1=0.3$, 비선형 감쇄 계수 $C_3=0.1$, 비선형 복원 계수 $\lambda=0.5$, $S_0=0.06$, $\gamma=0.25$ 으로 주어졌을 경우 횡요각과 각속도에 대한 과도 평균 자승(transient r.m.s)와 상호 상관 응답들(cross-correlation responses)을 나타내었다. 실선으로 표시된 값들은 복원항과 감쇄항 모두 3차 항의 비선형 항으로 처리한 결과이고 점선은 감쇄항을 선형항으로 처리한 결과이다.

Fig. 4-6에서는 선형 감쇄 계수 $C_1=0.1$, 비선형 감쇄 계수 $C_3=0.01$, 비선형 복원 계수 $\lambda=0.3$, $S_0=0.06$, $\gamma=0.25$ 으로 주어졌을 때의 횡요각과 각속도에 대한 과도 평균 자승(transient r.m.s)와 상호 상관 응답을 나타내었다.

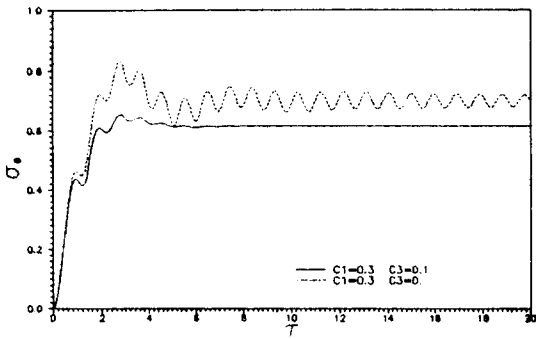


Fig. 1 Transient rms response for roll angle ($\gamma=0.25 \omega_n=1.5 \lambda=0.5 \Omega=1.5 S_0=0.06$)

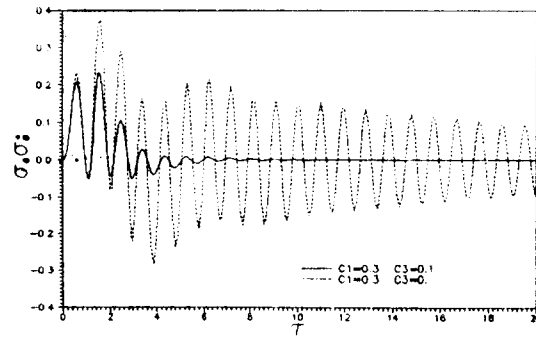


Fig. 2 Cross-correlation response for roll angle and angular velocity ($\gamma=0.25 \omega_n=1.5 \lambda=0.5 \Omega=1.5 S_0=0.06$)

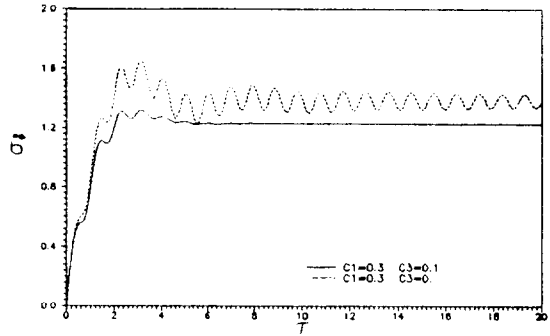


Fig. 3 Transient rms response for angular velocity ($\gamma=0.25 \omega_n=1.5 \lambda=0.5 \Omega=1.5 S_0=0.06$)

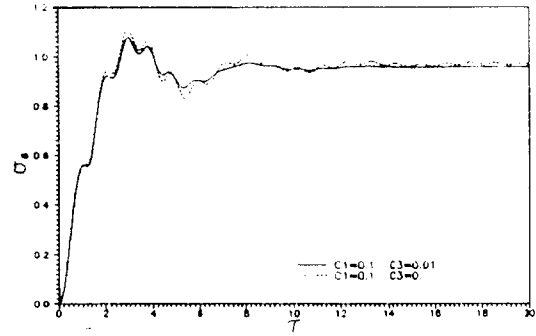


Fig. 4 Transient rms response for roll angle ($\gamma=0.25 \omega_n=1.5 \lambda=0.3 \Omega=1.5 S_0=0.06$)

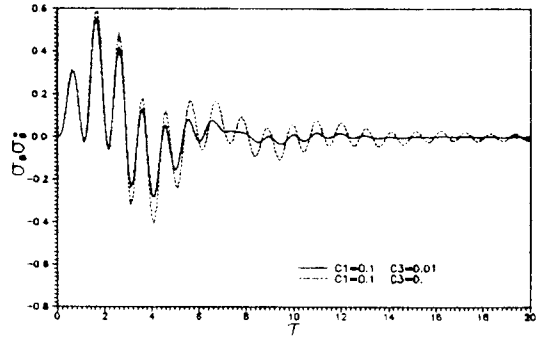


Fig. 5 Cross-correlation response for roll angle and angular velocity ($\gamma=0.25 \omega_n=1.5 \lambda=0.3 \Omega=1.5 S_0=0.06$)

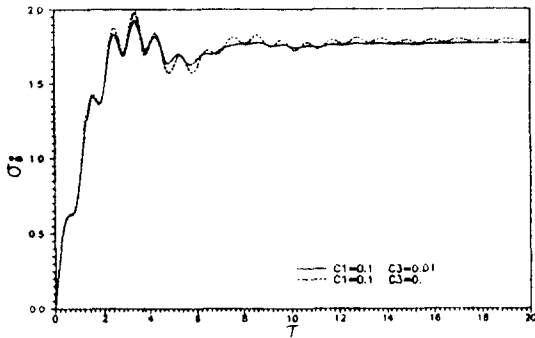


Fig. 6 Transient rms response for angular velocity
 $(\gamma=0.25 \quad \omega_n=1.5 \quad \lambda=0.3 \quad \Omega=1.5 \quad S_n=0.06)$

여기서, 필터 방정식에 나타난 백색 잡음의 강도는 S_n 이다. Fig. 1-6에서 보는 바와 같이 비선형 계수들의 값이 작을수록 선형 계수들의 결과와 가깝게 나타난다는 것을 알 수 있다.

6. 결 론

본 연구를 통하여 비백색 잡음 가진 횡요 모멘트에 의한 선체 횡요 운동의 비정상 상태의 평균 응답을 모우멘트 방정식 방법에 의하여 구하였다. 강한 비선형성을 가지는 횡요운동 방정식의 경우도 모우멘트 방정식 방법에 의하여 그 평균 응답의 시간에 대한 변화를 비교적 쉽게 구할 수가 있었다.

Reference

1. T. Kapitaniak, "Stochastic Response with Bifurcations to Non-linear Duffing's Oscillator", Journal of Sound and Vibration, Vol. 102, No. 3, 1985.
2. K. Kimura and M. Sakata, "Non-stationary Responses of a Non-Symmetric Non-linear System Subjected to a Wide Class of Random Excitation", Journal of Sound and Vibration, Vol. 76, No. 2, 1981.
3. M. Sakata and K. Kimura, "Calculation of the Non-Stationary Mean Square Response of a Non-linear System Subjected to Non-White Excitation", Journal of Sound and Vibration, Vol. 73, No. 3, 1980.
4. M. Sakata, K. Kimura and M. Utsumi, "Non-Stationary Response of Non-linear Liquid Motion in a Cylindrical Tank Subjected to Random Base Excitation", Journal of Sound and Vibration, Vol. 94, No. 3, 1984.
5. K. Kimura, M. Sakata, "Moment Equations Approach to Nonstationary Responses of a Nonlinear System Subjected to Nonwhite Random Excitation", First International Conference on Computational Stochastic Methods, Computational Mechanics Publications, 1991.
6. A. Francescutto, "On the Nonlinear Motion of Ships and Structures in Narrow Band Sea", Proceedings of the IUTAM Symposium on Dynamics of Marine Vehicles and Structures in waves, London, 1990.
7. A. Francescutto, "A Stochastic Analysis of Nonlinear Rolling in a Narrow Band Sea", Proceedings of 18th International Symposium on Naval Hydrodynamics, Ann Arbor, 1990.
8. L. Vassilopoulos, "Ship Rolling at Zero in Random Beam Seas with Nonlinear Damping and Restoration", J. Ship Research, SNAME, 15, pp. 289-294, 1971.