

◎ 論 文

線形振動系에 作用하는 非線形動吸振器에 관한 安定性解析 研究⁺

安 贊 祐* · 朴 一 秀** · 朴 東 煥**

(1992년 1월 30일 접수)

A Study of Stability Analysis on Nonlinear Dynamic Vibration Absorber Acting on Damped Main Vibration Systems

Chan-Woo Ahn · Il-Soo Park · Dong-Hwan Park

Key Words : Dynamic Vibration Absorber(동흡진기), Routh Hurwitz Method(루스 허르쯔
법), Harmonic Balance Method(조화바란스법), Amplitude Ratio(진폭비), Da-
mping Ratio(감쇠비)

Abstract

In this study, a system coupled with the nonlinear dynamic vibration absorber was modelled, and its equation of motion was analyzed by the harmonic balance method to obtain the amplitude ratio. And also, the stability analysis was done by the Routh Hurwitz method.

In the vibration systems coupled with the nonlinear dynamic vibration absorber, the unstable region and the jump phenomenon can be remarkably affected by the damping ratio. The stable and unstable region that obtained to differential method excellently agreed to the result of the stability analysis of Routh Hurwitz.

1. 序 論

産業의 발달이 加速化됨에 따라 機械, 構造物, 엔진, 터빈, 制御系 등의 設計와 같은 振動의 工學的인 應用에 자극 받아 振動에 대한 研究가 행하여지고 있으며, 특히, 高速機械에서는 振動問題가

발생한다.

振動의 原因은 모터나 터빈같은 重量이 回轉體의 內在的인 不均衡과 가스엔진, 왕복펌프와 같은 왕복동기계 등을 지지하는 構造物이나 機械部在들의 週期的인 應力變化로 인하여 發生되며 材料의 疲勞로 인한 摩蝕, 破損, 심한 騒音이 發生한다. 또한, 振動은 지면파를 發生시켜 都市地域의 심각

⁺ 1991년도 한국해양공학회 추계학술대회 발표(1991. 11)

* 정희원, 동아대학교 공과대학 기계공학과

** 동아대학교 공과대학 기계공학과 대학원

한 環境問題를 야기시킨다.

振動制御 裝置인 動吸振器는 Ascari⁽¹⁾에 의하여 主系의 振動을 除去하기 위한 스프링-質量系가 提示되었다. Den Hartog⁽²⁾는 非減衰動吸振器를 附着한 系에서 加振振動數의 影響을 研究하였으며, 白石明男⁽³⁾은 動吸振器에 의한 不規則 振動의 最適制御에 關하여 理論的 考察을 하였다. 衝擊적인 外力이 作用하는 경우의 振動을 抑制하기 爲하여 神谷⁽⁴⁾은 動吸振器를 1자유도 스프링-질량계에 부착한 경우의 自由振動에 對하여 研究하였고, 田中⁽⁵⁾은 衝擊應答의 最大值를 抑制하는 試驗을 하였다.

本 研究에서는, 非線形動吸振器가 附着된 系에서 運動方程式을 調和바란스法⁽⁶⁾으로 理論解析하여 振幅比를 算出하고, Routh Hurwitz法⁽⁷⁾으로 安定性 解析을 하여 減衰比의 影響에 따라서 不安定 領域과 跳躍現象이 發生하는 條件을 數値解析하여 研究하였으며 微分法을 使用하여 安定性 解析을 한 結果와 比較하였다.

2. 理論解析

(1) 振幅比의 解析

減衰를 가지는 主振動系에 非線形動吸振器가 附着된 振動系는 Fig. 1과 같다. Fig. 1의 振動系에서 質量 m_1 과 m_2 에 對한 運動方程式을 求하면 식(1)과 같다.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 + c_1 \dot{y}_1 - k_2 (y_2 - y_1) - h (y_2 - y_1)^3 - c_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) &= F \cos \Omega t \\ m_2 \ddot{y}_2 + k_2 (y_2 - y_1) + h (y_2 - y_1)^3 + c_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

식(1)에 $c_{er1} = 2\sqrt{m_1 k_1}$, $c_{er2} = 2\sqrt{m_2 k_2}$, $f = \omega_2 / \omega_1$, $P = F / (k_1 Y_{st})$, $x_1 = y_1 / Y_{st}$, $x_2 = y_2 / Y_{st}$, $Y_{st} = F / k_1$, $\gamma = h Y_{st}^2 / k_1$, $\zeta_1 = c_1 / c_{er1}$, $\zeta_2 = c_2 / c_{er2}$, $\mu = m_2 / m_1$, $\tau = \omega_1 t$, $\omega_1 = \sqrt{k_1 / m_1}$, $\omega_2 = \sqrt{k_2 / m_2}$, $\omega_r = \Omega / \omega_1$ 를 代 入하여 整理하면 식(2)와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + x_1 + 2\zeta_1 \dot{x}_1 - \mu f^2 (x_2 - x_1) - \gamma (x_2 - x_1)^3 - 2\zeta_2 \mu f (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= P \cos \omega_r \tau \\ \mu \dot{x}_2 + \mu f^2 (x_2 - x_1) + \gamma (x_2 - x_1)^3 + 2\zeta_2 \mu f (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= 0 \end{aligned}$$

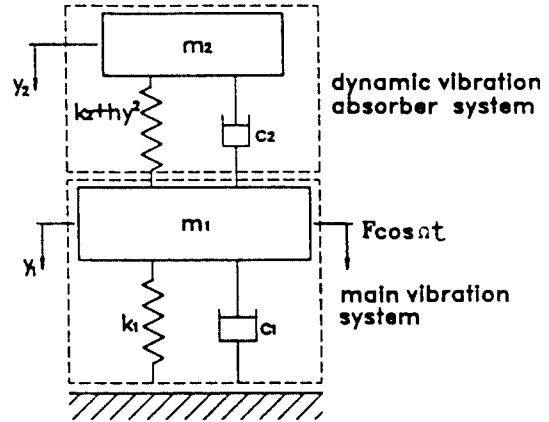


Fig. 1 System with nonlinear dynamic vibration absorber

$$0 \dots \dots \dots (2)$$

식(2)에서 '은 τ 에 對한 微分을 나타내며 $x_3 = x_2 - x_1$ 로 놓고 이것을 식(2)에 代 入해서 整理하면, 식(3)이 된다.

$$\begin{aligned} (1 + \mu) \dot{x}_1 + x_1 + 2\zeta_1 \dot{x}_1 + \mu x_3 &= P \cos \omega_r \tau \\ \mu \dot{x}_1 + \mu f^2 x_3 + \gamma x_3^3 + 2\zeta_2 \mu f \dot{x}_3 + \mu x_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

定常狀態의 應答은 對稱形非線形復元力을 가지므로 식(3)의 解를

$$x_1 = |A_1| \cos(\omega_r \tau + \Phi_1), \quad x_3 = |A_3| \cos(\omega_r \tau + \Phi_3) \dots \dots \dots (4)$$

로 놓고, 식(4)를 식(3)에 代 入하여 調和바란스法⁽⁵⁾을 利用하면 다음식이 求해진다.

$$\begin{aligned} \{-(1 + \mu)\omega_r^2 + 1\} |A_1| \cos \Phi_1 - 2\zeta_1 \omega_r |A_1| \sin \Phi_1 - \mu \omega_r^2 |A_3| \cos \Phi_3 &= P \\ \{(1 + \mu)\omega_r^2 - 1\} |A_1| \sin \Phi_1 - 2\zeta_1 \omega_r |A_1| \cos \Phi_1 + \mu \omega_r^2 |A_3| \sin \Phi_3 &= 0 \\ -\mu \omega_r^2 |A_1| \cos \Phi_1 + \{(\mu f^2 - \mu \omega_r^2) |A_3| + (3/4) \gamma |A_3|^3\} \cos \Phi_3 - 2\mu f \zeta_2 \omega_r |A_3| \sin \Phi_3 &= 0 \\ \mu \omega_r^2 |A_1| \sin \Phi_1 - \{(\mu f^2 - \mu \omega_r^2) |A_3| + (3/4) \gamma |A_3|^3\} \sin \Phi_3 - 2\mu f \zeta_2 \omega_r |A_3| \cos \Phi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

식(5)에서 $|A_1|$, $|A_3|$ 에 對한 식이 다음과

같이 산출된다.

$$e_1 |A_3|^6 + e_2 |A_3|^4 + e_3 |A_3|^2 + e_4 = 0 \dots (6)$$

식(6)에서,

$$e_1 = \{-3\gamma(1+\mu)/4\mu + 3\gamma/(4\mu\omega_r^2)\}^2 + \{6\zeta_1\gamma/(4\mu\omega_r)\}^2$$

$$e_2 = 2[-f^2(1+\mu) + f^2/\omega_r^2 + (1+\mu)\omega_r^2 - 1 - 4\zeta_1\zeta_2f - \mu\omega_r^2] \{-3\gamma(1+\mu)/4\mu + 3\gamma/(4\mu\omega_r^2)\} + [2\zeta_1f^2/\omega_r - 2\zeta_1\omega_r - 2(1+\mu)\zeta_2\omega_rf + 2\zeta_2f/\omega_r] \{6\zeta_1\gamma/(4\mu\omega_r)\}$$

$$e_3 = \{-f^2(1+\mu) + f^2/\omega_r^2 + (1+\mu)\omega_r^2 - 1 - 4\zeta_1\zeta_2f - \mu\omega_r^2\}^2 + \{2\zeta_1f^2/\omega_r - 2\zeta_1\omega_r - 2(1+\mu)\zeta_2\omega_rf + 2\zeta_2f/\omega_r\}^2$$

$$e_4 = -P^2 \dots (7)$$

$$|A_1|^2 = |A_3|^2 \{(\mu f^2 + (3/4)\gamma |A_3|^2 - \mu\omega_r^2) / (\mu\omega_r^2) + (2\zeta_2f)^2/\omega_r^2\} \dots (8)$$

또한, 진동계의 안정영역과 불안정영역을 규명하기 위하여 미분법을 사용하여 식(6)을 $|A_3|^2$ 에 대해서 미분하면 다음과 같다.

$$3e_1 |A_3|^4 + 2e_2 |A_3|^2 + e_3 = 0 \dots (9)$$

식(9)에서 $|A_3|^2$ 에 대한 2개의 方程式을 구하여 振動數比의 變化에 따라 값을 表示하면 2개의 曲線이 얻어지고, 두 曲線 内部의 領域은 不安定 領域이 되고 外部領域은 安定領域이 된다.

(2) 安定性 解析

Routh Hurwitz법에 의한 安定性解析을 하기 위하여 식(2)의 一般解를,

$$\begin{aligned} x_1(\tau) &= a_1(\tau)\cos\omega\tau + b_1(\tau)\sin\omega\tau \\ x_2(\tau) &= a_2(\tau)\cos\omega\tau + b_2(\tau)\sin\omega\tau \\ x_3(\tau) &= a_3(\tau)\cos\omega\tau + b_3(\tau)\sin\omega\tau \\ &\dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

로 두고, 식(10)을 식(2)에 代入하면,

$$\begin{aligned} -2\omega \frac{da_1}{d\tau} - \omega^2 b_1 + b_1 - 2\zeta_1 a_1 + 2\zeta_1 \frac{db_1}{d\tau} - \mu f^2 b_3 \\ - \frac{3}{4} b_3(a_3^2 + b_3^2) + 2\zeta_2 \mu f a_3 \omega - 2\zeta_2 \mu f \frac{db_3}{d\tau} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{db_1}{d\tau} - \omega^2 a_1 + a_1 + 2\zeta_1 \frac{da_1}{d\tau} + 2\zeta_1 b_1 \omega - \mu f^2 a_3 - \\ \gamma \frac{3}{4} a_3(a_3^2 + b_3^2) - 2\zeta_2 \mu f b_3 \omega - 2\zeta_2 \mu f \frac{da_3}{d\tau} = p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2\mu\omega \frac{da_2}{d\tau} - \mu\omega^2 b_2 + \mu f^2 b_3 + \gamma \frac{3}{4} b_3(a_3^2 + b_3^2) \\ - 2\zeta_2 \mu f a_3 \omega + 2\zeta_2 \mu f \frac{db_3}{d\tau} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2\mu\omega \frac{db_2}{d\tau} - \mu\omega^2 a_2 + \mu f^2 a_3 + \gamma \frac{3}{4} a_3(a_3^2 + b_3^2) \\ - 2\zeta_2 \mu f b_3 \omega + 2\zeta_2 \mu f \frac{da_3}{d\tau} = 0 \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

식(11), (12)가 성립되기 위해서는 $\sin\omega\tau$ 와 $\cos\omega\tau$ 의 계수가 같아야 한다. 여기서,

$$\begin{aligned} a_1 &= A_{10} + A_1 e^{st} \quad , \quad b_1 = B_{10} + B_1 e^{st} \\ a_2 &= A_{20} + A_2 e^{st} \quad , \quad b_2 = B_{20} + B_2 e^{st} \quad \dots \dots (12) \\ a_3 &= A_{30} + A_3 e^{st} \quad , \quad b_3 = B_{30} + B_3 e^{st} \end{aligned}$$

이다. 식(11)을 정리하면 식(13)과 같다.

$$B_0 s^4 + B_1 s^3 + B_2 s^2 + B_3 s + B_4 = 0 \dots \dots \dots (13)$$

식(3)에서,

$$B_0 = (4\omega^2 d_2^2 - 8\zeta_1 \omega d_1 d_2 + 4\zeta_1^2 d_2^2 + 4\zeta_1 e_8 d_1 d_2 + d_1^2 e_8^2 + 4\zeta_1 d_1^2)$$

$$B_1 = \{(-16\zeta_1 \omega d_2 + 8\zeta_1 e_8 d_2 + 4d_1 e_8^2 + 16\zeta_1^2 d_1) x + 4\omega e_8 d_2^2 - 4\omega e_8 d_1 d_3 + 4\omega e_8 e_8 d_2 + 8\zeta_1 \omega d_2 d_4 - 4\omega g_1 d_1 d_2 + 4\zeta_1 e_1 d_2^2 - 8\zeta_1^2 d_1 d_3 + 8\zeta_1^2 d_2 e_3 - 4\zeta_1 e_8 d_2 d_4 + 2e_1 e_8 d_1 d_2 - 2d_1 e_8^2 d_4 + 2d_1^2 e_8 e_9 - 8\zeta_1^2 d_1 d_4 + 4\zeta_1 g_1 d_1^2\}$$

$$B_2 = \{(3e_8^2 + 12\zeta_1^2) x^2 + (-8\omega e_8 d_3 - 8\omega g_1 d_2 - 16\zeta_1^2 d_3 + 4e_1 e_8 d_2 - 4d_4 e_8^2 + 8d_1 e_8 e_9 - 16\zeta_1^2 d_4 + 16\zeta_1 g_1 d_1) x + e_8^2 d_2^2 - 8\zeta_1 \omega d_3 e_3 + 2\omega e_8 d_3 d_4 - 4\omega e_9 d_1 d_3 - 2e_8 e_9 d_1 d_3 + 4\omega e_3 e_9 d_2 + 2e_3 e_8 e_9 d_2 + 4\omega^2 d_3^2 + 4\omega g_1 d_2 d_4 - e_9 g_1 d_1 d_2 + e_1^2 d_2^2 + 4\zeta_1 e_3 e_8 d_3 + 8\zeta_1^2 d_3 d_4 - 4\zeta_1 e_1 d_1 d_3 - 4\zeta_1 g_1 d_1 d_3 + 4\zeta_1 e_1 e_3 d_2 + 4\zeta_1 g_1 d_2 e_3 + 4\zeta_1^2 d_3^2 - 2e_1 e_8 d_2 d_4 + 2e_1 e_9 d_1 d_2 + e_8^2 e_3^2 + 4\zeta_1^2 e_3^2 + d_4^2 e_8^2 - 4d_1 e_8 e_9 d_4 + d_1^2 e_8^2 - d_1 g_1 e_9 d_2 + 4\zeta_1^2 d_4^2 - 8\zeta_1 g_1 d_1 d_4 + d_1^2 g_1^2 + 2\omega e_8 d_3 d_4\}$$

$$B_3 = \{(6e_8 e_9 + 12\zeta_1 g_1) x^2 + (-8\omega e_9 d_3 - 4e_8 e_9 d_3 - 4e_9 g_1 d_2 - 8\zeta_1 e_1 d_3 - 8\zeta_1 g_1 d_3 + 4e_1 e_9 d_2 - 8e_8 e_9 d_4 + 4d_1 e_8^2 - 16\zeta_1 g_1 d_4 + 4d_1 g_1^2) x - 4\omega g_1 d_3 e_3 + 4\omega e_9 d_3 d_4 + 2e_8 e_9 d_3 d_4 - 2e_8^2 d_1 d_3 + 2e_8^2 d_2 e_3 + 4\omega e_9 d_3^2 + 2e_9 g_1 d_2 d_4 + 2e_1 e_3 e_8 d_3 + 4\zeta_1 e_9 d_3 e_3 + 4\zeta_1 e_1 d_3 d_4 + 4\zeta_1 g_1$$

$$\begin{aligned}
 & d_3 d_4 - 2e_1 g_1 d_1 d_3 + 2e_1 g_1 d_2 e_3 + 4\zeta_1 e_1 d_3^2 - 2e_1 e_9 d_2 \\
 & d_4 + 2e_8 e_9 e_3^2 + 4\zeta_1 g_1 e_3^2 + 2e_8 e_9 d_4^2 - 2d_1 e_3^2 d_4 + 4\zeta_1 g_1 \\
 & d_4^2 - 2d_1 g_1^2 d_4 \} \\
 B_4 = & \{ (3e_3^2 + 3g_1^2)x^2 + (-4e_3^2 d_3 - 4e_1 g_1 d_3 - 4d_4 e_3^2 - 4 \\
 & d_4 g_1^2)x - 2e_9 g_1 d_3 e_3 + 2e_3^2 d_3 d_4 + e_3^2 d_3^2 + e_3^2 e_3^2 + 2e_1 e \\
 & e_3 d_3 + 2e_1 g_1 d_3 d_4 + e_1^2 d_3^2 + g_1^2 e_3^2 + e_3^2 d_4^2 + g_1^2 d_4^2 \} \\
 & \dots \dots \dots (14)
 \end{aligned}$$

이며, 식(14)에서,
 $e_1 = -\omega^2 + 1$, $e_3 = 2\zeta_2 \mu f \omega$, $e_7 = -\omega^2 + 1 - \mu \omega^2$, $e_8 = 2\omega + 2\mu \omega$, $e_9 = 2\zeta_1 \mu$, $d_1 = 2\zeta_2 \mu f$, $d_2 = 2\mu \omega$, $d_3 = \mu \omega^2$, $d_4 = -\mu f^2$, $g_1 = -\omega^2 + 1 + \mu \omega^2$ 이다.

Routh Hurwitz法의 安定性 判別條件을 식(13)에 適用하여 B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 가 모두 양이고, $B_1 B_2 - B_0 B_3 > 0$ 이며, $B_3(B_1 B_2 - B_0 B_3) - B_4 B_1^2 > 0$ 인 경우에 安定하다.

3. 結果 및 考察

Fig. 2-1과 Fig. 2-2는 $\gamma=0$ 인 線形振動系에서 質量比가 0.1인 경우에 最適振動數比와 最適減衰比를 적용한 경우, 振動數比에 대한 主振動系の 振幅比를 나타낸 것이다. 여기서 $\mu=0.1$ 때 最適固有振動數比는 0.861991이다. $\gamma=0.005$ 는 非線形系の 應答解析을 용이하게 하기 위한 임의의 값이다.

Fig. 2-1과 Fig. 2-2에서 알 수 있는 바와 같이

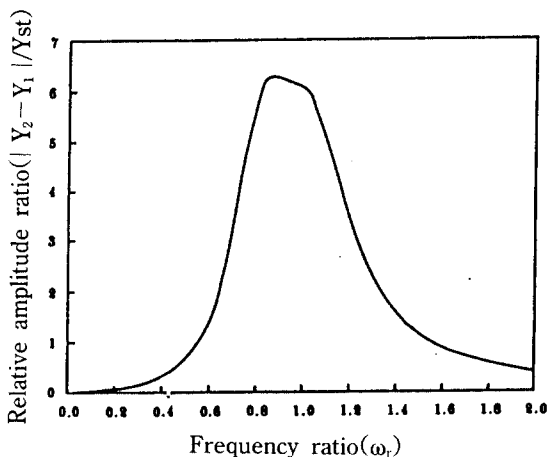


Fig. 2-1 Relative amplitude ratio versus frequency ratio.
 ($\mu=0.1, \zeta_2=0.197937, \gamma=0$)

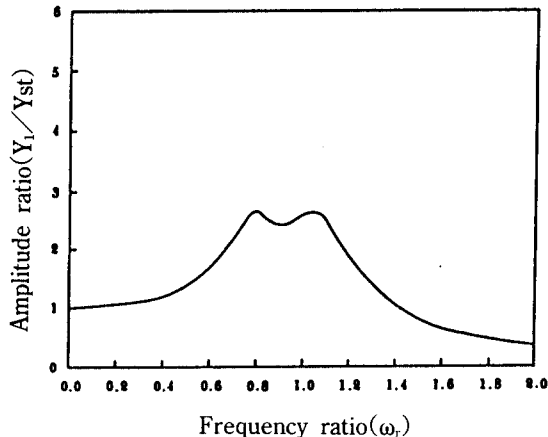


Fig. 2-2 Amplitude ratio versus frequency ratio.
 ($\mu=0.1, \zeta_2=0.197937, \gamma=0$)

非線形振動系에서 일어날 수 있는 跳躍現象과 不安定領域은 存在하지 않음을 알 수 있다.

Table 1. Numerical Analysis Conditions.

($\mu=0.1, f=0.861991$ for all conditions)

Fig. Numbers	Conditions	γ	ζ_2
Fig. 2-1, Fig. 2-2		0	0.197937
Fig. 3-1, Fig. 3-2		0.005	0.197937
Fig. 4-1, Fig. 4-2		0.005	0.1
Fig. 5-1, Fig. 5-2		0.005	0.075
Fig. 6-1, Fig. 6-2		0.005	0.05

Table 1은 本 研究에서 數值解析한 條件을 나타낸 것이다.

Fig. 3-1과 Fig. 3-2는 $\gamma=0.005$ 와 $\zeta_2=0.197937$ 일때 振動數比에 대한 相對振幅比와 主振動系の 振幅比를 나타낸 것으로 不安定領域은 存在하지 않는다. 이와 같은 現象은 非線形振動系이지만 減衰比가 크기 때문이다. Fig. 4-1과 Fig. 4-2는 $\gamma=0.005$ 와 $\zeta_2=0.1$ 일때 振動數比에 대한 相對振幅比와 主振動系の 振幅比를 나타낸 것이다. 여기서 不安定領域과 跳躍現象이 존재한다.

Fig. 5-1과 Fig. 5-2는 $\gamma=0.005$ 와 $\zeta_2=0.075$ 일때 振動數比에 대한 相對振幅比와 主振動系の 振幅比를 나타낸 것이다. 振幅比의 감소로 인하여 不安定領域과 跳躍現象은 증대된다.

Fig. 6-1과 Fig. 6-2는 $\gamma=0.005$ 와 $\zeta_2=0.05$ 일때

의 振幅比를 나타낸 것으로 不安定領域과 跳躍現象은 더욱 증대된다.

振動數比에 대한 振幅比의 값에서 γ 의 값이 양이므로 不安定領域의 振動數比가 1보다 큰 값에서

存在하였고, 減衰比가 減少할수록 不安定領域과 跳躍現象이 增加함을 알 수 있다. 또한 安定領域과 不安定領域은 식(13)에 의한 Routh Hurwitz의 安定性 判別의 結果와 잘 一致함을 알 수 있다.

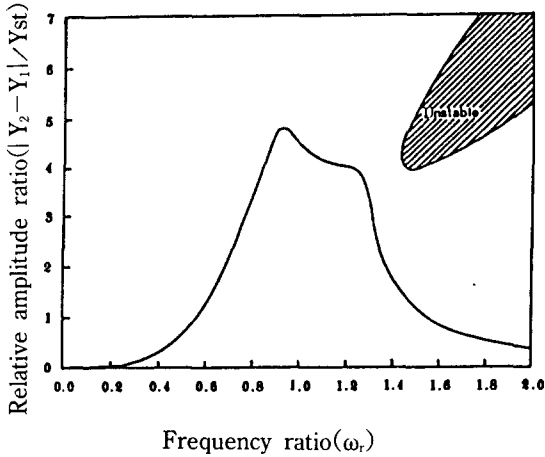


Fig. 3-1 Relative amplitude ratio versus frequency ratio.
($\mu=0.1, \zeta_2=0.197937, \gamma=0.005$)

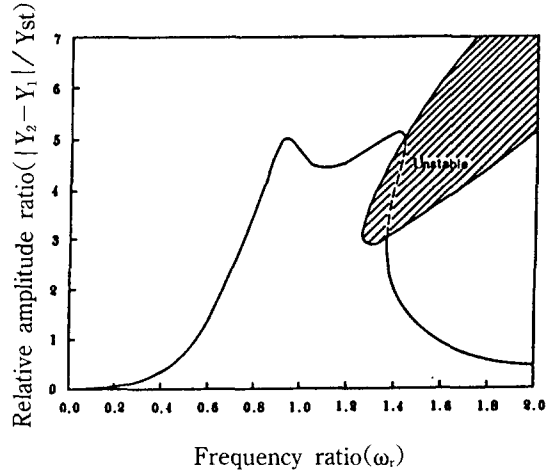


Fig. 4-1 Relative amplitude ratio versus frequency ratio.
($\mu=0.1, \zeta_2=0.1, \gamma=0.005$)

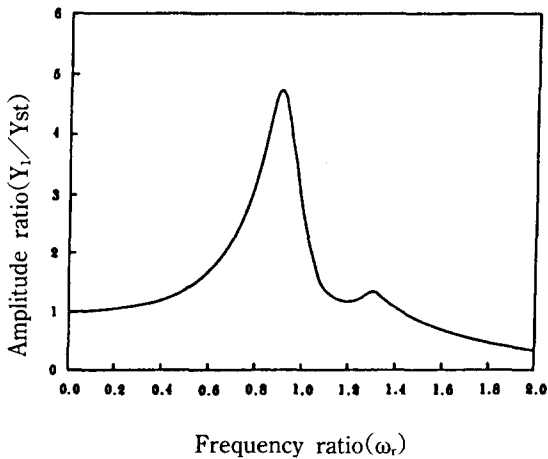


Fig. 3-2 Amplitude ratio versus frequency ratio.
($\mu=0.1, \zeta_2=0.197937, \gamma=0.005$)

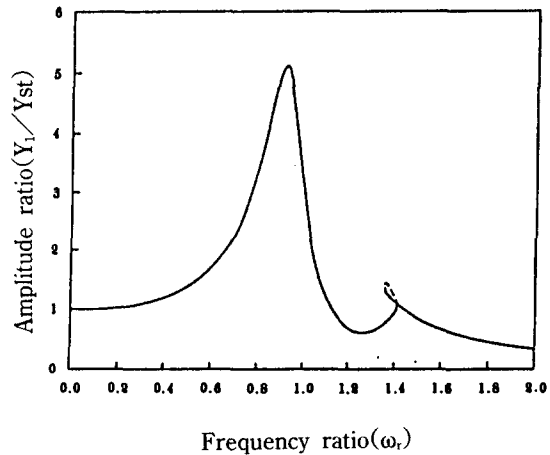


Fig. 4-2 Amplitude ratio versus frequency ratio.
($\mu=0.1, \zeta_2=0.1, \gamma=0.005$)

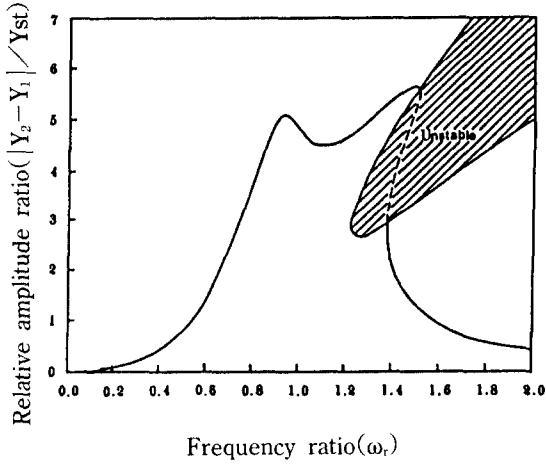


Fig. 5-1 Relative amplitude ratio versus frequency ratio.
($\mu=0.1, \zeta_2=0.075, \gamma=0.005$)

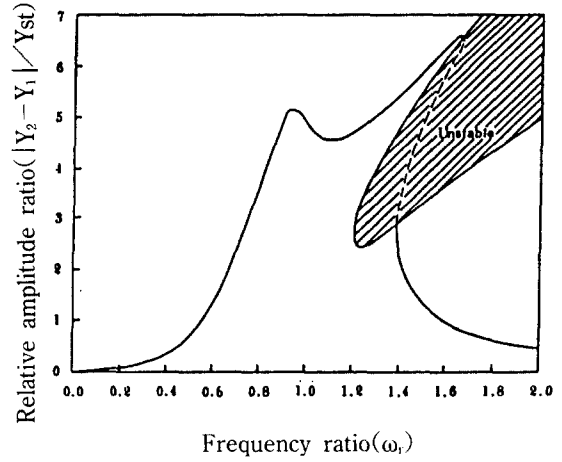


Fig. 6-1 Relative amplitude ratio versus frequency ratio.
($\mu=0.1, \zeta_2=0.05, \gamma=0.005$)

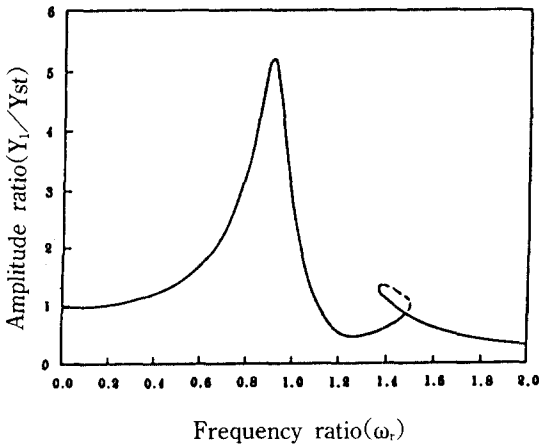


Fig. 5-2 Amplitude ratio versus frequency ratio.
($\mu=0.1, \zeta_2=0.075, \gamma=0.005$)

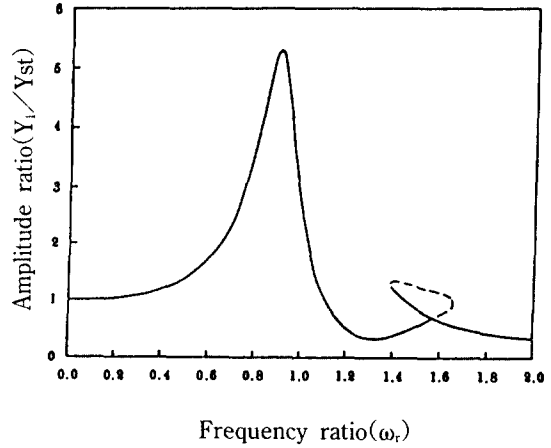


Fig. 6-2 Amplitude ratio versus frequency ratio.
($\mu=0.1, \zeta_2=0.05, \gamma=0.005$)

4. 結 論

減衰主振動系에 非線形動吸振器가 附着된 振動系의 運動方程式을 誘導하고, 理論解析과 安定性解析을 한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

1) 非線形動吸振器가 附着된 振動系에서 不安定領域과 跳躍現象은 減衰比의 크기에 따라서 決定된다.

2) 振幅比를 微分해서 구한 安定과 不安定領域은 Routh-Hurwitz의 安定性解析의 結果와 잘 일치한다.

參 考 文 獻

(1) A. Ascari, "The Transient Behaviour of the Dynamic Vibration absorber for the Linear

- Frequency Rise”, Journal of the Italian Association of Theoretical and applied Mechanics, Vol. 15, No. 2, pp. 107~111, 1980.
- (2) J. P. Den Hartog, “Mechanical Vibrations”, fourth edition, McGraw-Hill Book Company, pp. 93~104, 1956.
- (3) 白石明男, 山川出雲, “クーロン兩摩擦む動吸振器系の解析(第3報, 吸振器雙方にクロン摩擦を伴う場合)”, 日本機械學會論文集(C編), Vol. 50, No. 453, pp.819~827, 1984.
- (4) 神谷, 高野, “間欠運動の高速化に関する研究(動吸振器による残留振動の減衰)”, 精密機械, Vol. 43, No. 9, pp. 1075~1080, 1977.
- (5) 田中, 菊島, “衝撃應答抑制機能を有すの動吸振器に關よる研究(第1報, 豫測動作法によの制振原理)”, 日本機械學會論文集(C編), Vol. 52, No. 484, pp. 3175~3182, 1985.
- (6) D. W. Dordan and Smith, “Nonlinear Ordinary Differential Equations”, Clarendon Press, pp. 111~112, 1976.
- (7) S. S. Rao, “Mechanical Vibrations”, second edition, Addison Wesley, pp. 306~307, 1990.