

## 鐵筋 및 프리스트레스트 콘크리트 平面 및 셸 構造物의 有限要素 解析

### Finite Element Analysis of Reinforced and Prestressed Plane and Shell Structures



오 병 환\*

#### 1. 서 론

최근 들어 유한요소 해석법(Finite Element Method)을 이용한 철근콘크리트 구조물의 해석에 대한 연구가 활발히 진행되고 있고 또한 실무에서도 활용이 급격히 증가되고 있다. 대부분의 철근콘크리트 구조물의 설계는 재료 기동의 복잡성으로 인해서 실험결과를 이용한 반 경험적인 방법을 바탕으로 설계를 수행하고 있다. 그러나, 강력한 수치해석수단인 유한요소법의 창출로 인해 복잡한 철근콘크리트 구조물도 비교적 쉽게 해석할 수 있는 시대가 되었다. 본 小考에서는 유한요소법이 각종 콘크리트 구조물에 어떻게 활용될 수 있는지 그 개괄적인 내용에 대하여 소개하여 앞으로의 이용에 도움을 드리고자 한다.

#### 2. 유한요소 해석의 기본절차

##### 2.1 개 요

유한요소법이 갖는 장점중의 하나는 서로 다른 분야의 문제에 적용할 때에도 거의 비슷한 해석절차를 거친다는 사실이다. 특히 구조해석 문제에 있어서는 하나의 범용 컴퓨터프로그램으로 여러 다른 종류의 문제를 해석할 수 있고 서로 다른 컴퓨터프로그램도 많은 공통적인 해석과정을 가지고 있다.

실제의 구조물을 변위법에 의한 정적 유한요소 해석을 수행하고자 할 때는 일반적으로 다음과 같은 단계를 거친다(그림1. 참조).

- (1) 구조물 전체의 영역을 절점(node)에서 서로 연결된 유한수(finite)의 요소(element)로 분할한다. 요소의 분할에서 절점의 위치를 정하고 각 요소별 절점간의 연결을 구성한다.

\* 정회원, 서울대학교 토목공학과 교수

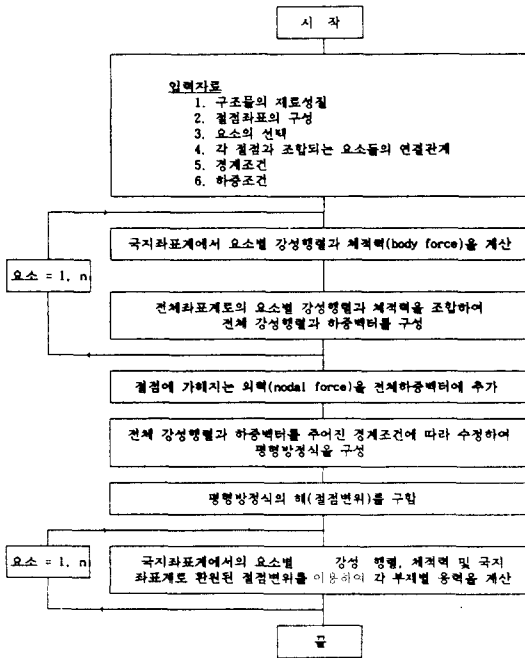


그림 1. 유한요소 해석과정의 일반적인 흐름도

- (2) 다음 절차는 각 요소별 강성행렬(element stiffness matrix)과 각 요소의 절점에 가해지는 하중벡터(load vector)를 구성하는 과정이다.
- (3) 요소별로 구한 강성행렬과 하중벡터는 구조물 전체 영역에 관한 강성행렬과 하중벡터로 조합하게 된다. 이 과정이 끝나면 구조물 전체 영역의 유한요소 방정식, 즉 하중-변위에 관한 연립방정식이 구성된다.
- (4) 다음 단계로 모든 실제 구조물은 경계조건(boundary condition)이나 초기조건(initial condition)이 있으므로 이 조건들을 위에서 구한 연립 방정식에 반영하여 이 연립방정식을 변형한다. 이 과정은 앞의 3번째 단계와 동시에 이루어지는 것이 보통이다.
- (5) 앞 단계에서 변형된 유한요소 방정식은 평형방정식에 의해서 구조물 전체 영역의 자유도에 대한 해를 구하는데, 변위법에

의하여 구해지는 해는 절점변위(nodal displacement)이다.

- (6) 계산된 절점변위들을 각 요소별 절점변위로 변환하여 각 요소의 응력(stress), 혹은 부재력(member force)을 구하므로써 전체 구조물의 유한요소법에 의한 해석절차를 마치게 된다.

## 2.2 선형 유한요소 해석

구조물의 선형-탄성거동을 해석하는 경우에는 재료의 응력-변형도 관계가 선형임은 물론 작용하는 하중이 상대적으로 작거나 구조체가 상대적으로 강하여(stiff) 발생하는 변위가 미소하고 원래의 기하학적 형태가 변하지 않는 경우이다.

2-차원 유한요소로서 이상화시킬 수 있는 철근 콘크리트 구조물의 유한요소 형상은 그림 2와 같으며, 2차원 영역을 나타내는 유한요소에는 삼각형 요소(triangular element)와 사각형 요소

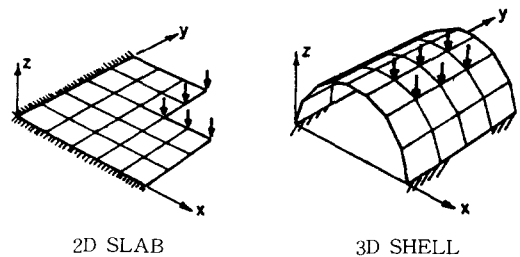
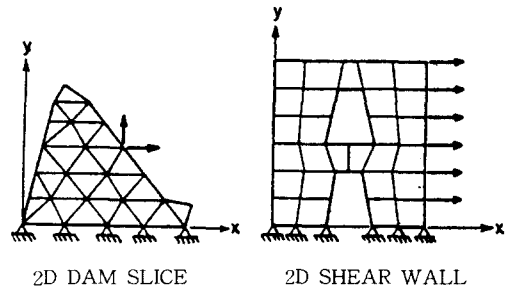


그림 2. 2차원 요소로 이루어진 구조물의 유한요소 모델

(quadrilateral element) 등이 있다. 직사각형 요소 (rectangular element)는 일반 사각형 요소의 특별한 경우로서 체눈(mesh)을 규칙적으로 구성할 수 있고 국지좌표와 전체좌표와의 일치등 편리한 일면이 있으나 곡선으로 이루어진 경계등의 모델링이 어렵고, 변화있는 체눈의 구성이 어려워 그 사용이 제한을 받으므로 일반적인 사각형 요소나 삼각형 요소에 비해서 많이 사용되고 있지 않다.

그림 2와 같은 동질의 연속체에서 각 유한요소 에 대한 요소 강도행렬(element stiffness matrix)은 가상일의 원리(virtual work)와 같은 에너지법칙(energy principle)을 사용하여 결정할 수 있으며, 기본절차는 다음과 같다.

- (1) 요소의 어떤 점에서의 내부 변위(internal displacement)  $v$ 는 절점변위(nodal displacement)  $r$ 과 변위함수(displacement function)  $\phi$ 에 의해서 식(1)과 같이 표현된다.

$$\{v\} = [\phi]\{r\} \quad (1)$$

- (2) 식(1)에서 변형-변위(strain-displacement) 관계를 유도하면,

$$\{\epsilon\} = [B]\{r\} \quad (2)$$

- (3) 요소의 응력-변형(stress-strain) 관계는 다음과 같다.

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \quad (3)$$

- (4) 식(2)를 식(3)에 대입하여 응력-변위관계를 유도하면, 식(4)와 같다.

$$\{\sigma\} = [D][B]\{r\} \quad (4)$$

- (5) 가상변위(virtual nodal displacement)  $\{r\}$ 를 주고, 가상일의 원리를 이용하면, 외적 가상일(external virtual work)  $W_e$ 는

$$W_e = \{r\}^T \{S\} \quad (5)$$

- (6) 내적 가상일(internal virtual work)  $W_i$ 는

$$W_i = \int \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dv \quad (6)$$

식(2)로 부터

$$\{\epsilon\}^T = \{r\}^T [B]^T \quad (7)$$

식(7)을 식(6)에 대입하면,

$$W_i = \{r\}^T \int [B]^T \{\sigma\} dv \quad (8)$$

식(4)를 식(8)에 대입하면, 다음과 같다.

$$W_i = \{r\}^T \left[ \int [B]^T [D] [B] dv \right] \{r\} \quad (9)$$

- (7) 식(5)와 식(9)로 부터,  $W_e = W_i$ 에서

$$\{r\}^T \{S\} = \{r\}^T \left[ \int [B]^T [D] [B] dv \right] \{r\} \quad (10)$$

$$\{S\} = \left[ \int [B]^T [D] [B] dv \right] \{r\} \quad (11)$$

또는

$$\{S\} = [k]\{r\} \quad (12)$$

따라서, 요소 강도행렬은

$$[k] = \int [B]^T [D] [B] dv \quad (13)$$

일반적으로 특별한 경우를 제외하고, 식(13)에 의한 적분은 컴퓨터내에서 수치적으로 계산할 수 있다. 위와같은 과정을 통해서 요소 강도행렬이 계산되고, 국지좌표계를 전체좌표계로 변환하면, 구조물의 강도행렬  $[K]$ 가 구성된다.

$$\{R\} = [K]\{r\} \quad (14)$$

여기서,  $\{R\}$ : 외적 절점하중(known external nodal point loads)

$\{r\}$ : 절점변위(unknown nodal point displacements)

이며, 각 요소의 응력은 식(4)에 의해서 계산된다.

### 2.3 비선형 유한요소 해석

구조물에 상대적으로 큰 외력이 작용하면 연성

(ductility)이 큰 재료의 경우에는 항복(yielding)이 일어나고 취성(brittle)이 큰 재료의 경우에는 균열(crack)이 발생하여 응력-변형도 관계에 있어 더 이상 선형성이 보장되지 않는다. 즉 이러한 재료의 응력-변형도 관계는 선형-탄성 영역과 소성영역의 두 영역으로 구분 지을 수 있고 하중이 점점 더 증가함에 따라 응력-변형도 관계는 선형-탄성영역을 벗어나 소성영역으로 들어가게 된다(그림3.(a)). 또한 재료에 따라서는 선형-탄성영역과 소성영역의 구분이 분명하지 않은 경우도 있다(그림3.(b)). 이러한 경우, 구조물의 거동을 해석하기 위해서는 더 이상 선형-탄성해석에 의존할 수 없고 소성영역을 고려할 수 있는 재료 비선형 해석이 요구된다.

철근콘크리트 구조물에서 발생하는 재료 비선형성에는 콘크리트의 균열, 철근 및 콘크리트의 비선형 응력-변형관계, 크리프, 건조수축, 온도 및 하중이력(load history)과 같은 시간의존 효과(time dependent effects) 등이 포함된다.

구조물에 상대적으로 큰 변형이 발생하여 구조물의 기하학적 형태가 변하여 변위-변형도 관계가 비선형이 되는 경우, 변형도와 변위 사이의 관계식에서 미소 변형해석에서 무시했던 고차항을 포함시켜 그 거동을 표현해야 하는 경우, 콘크리트나 흙과 같이 장기적으로 변형이 계속되어 초기 탄성변형보다 creep, shrinkage 등의 비탄성변형이 상대적으로 더 클 경우, 또는 계속 경계조건이 변화하여 경계조건을 미리 정할 수 없는 접촉문제(contact problem) 등에서 구조물의 거동을 하중에

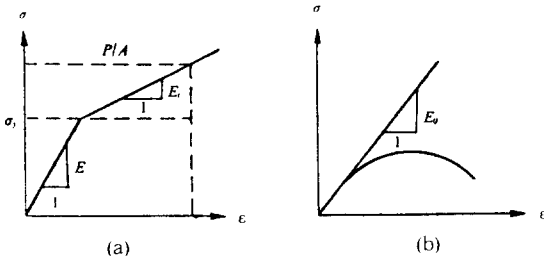


그림 3. 비선형 응력-변형률 관계

대하여 또는 시간의 경과에 대해 좀 더 자세히 나타내기 위해서는 기하학적 비선형 해석이 필요하게 된다.

비선형 해석의 경우에는 응력-변형도 관계와 변형도-변위 관계에서도 모두 비선형성을 고려해야 하므로 변형도행렬[B]에는 기하학적 비선형 변위장의 상태를, 재료행렬[D]는 재료의 비선형 상태를 표현할 수 있어야 한다. 즉, [B]와 [D]는 일정한 값이 아닌 복잡한 함수로 나타나게 된다. 재료의 비선형성은 매우 복잡하고 여러 양상을 가지고 있으나(그림4) 재료 비선형 강성행렬을

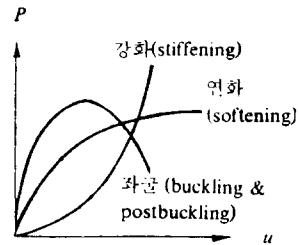


그림 4. 재료의 비선형

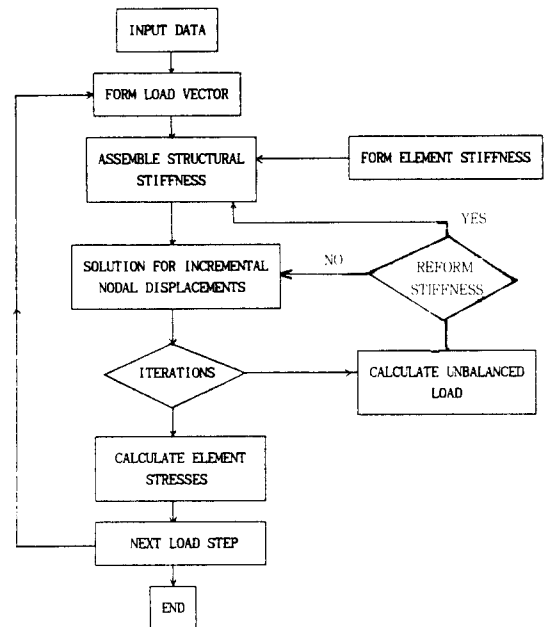


그림 5. 비선형 유한요소 해석의 흐름도

구성하는 모델로는 비선형-탄성(nonlinear elastic) 모델과 소성(plastic)모델이 있으며, 실제 구조물에 대한 비선형 유한요소 해석의 전체적인 흐름도는 그림5와 같다.

### 2.3.1 비선형-탄성 모델

비선형-탄성 모델은 현재의 응력상태를 결정하는데 관여하는 인자에 따라 구분되며, 그 중 Cauchy 모델과 Green hyperelastic model은 그 구성이 간단하고 구조물의 해석시 소요시간이 적게 들지만 전체 변형에 입각한 알고리즘을 사용하고 있으므로(그림6), 반복작업동안 오차가 누적되어 상대적으로 큰 하중상태에서는 계산 결과의 정확도가 다소 떨어진다. 또한, unloading, reloading 등의 효과를 정확히 고려할 수 없다. 그러나 증분 형태의 hypoelastic 모델을 사용하면 접선 탄성계수를 사용하므로 위의 단점을 보완할 수 있으며 해석오차도 줄일 수 있다. 또한 재료의 성질이 복잡한 콘크리트나 흙의 거동을 해석할 때 실험결과를 토대로 이 모델을 사용하면 실용적인 적용이 가능하다. 여기서는 비선형-탄성 모델에 대한 재료역학적인 설명은 피하고 증분형태의 hypoelastic 모델을 유한요소법에 적용하는 방법에 대해서 기술하였다. 일반적으로 응력상태가 변형도와 응력경로(stress path)의 함수로 표현되는 응력-변형도 관계는 다음의 식으로 표현할 수 있다.

$$d\sigma_{ij} = f_{ij}(d\epsilon_{kl}, \sigma_{mn}) \quad (15)$$

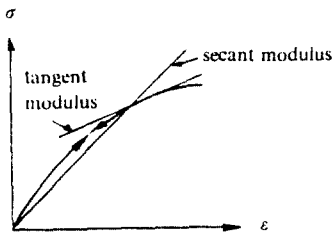


그림 6. 비선형-탄성모델

여기서  $f_{ij}$ 는 반응함수(response function)로서 미소 변형에 의한 응력은 가역적(reversible)이고, 경로에는 종속적(path-dependent)인 성질을 갖는다. 반응함수  $f_{ij}$ 는 그 재료의 응력-변형도 관계의 많은 실험 결과치로부터 결정되며, 재료가 콘크리트인 경우 변형함수식은 쌍곡선의 변형된 형태를 갖는다고 가정한 뒤 경계조건을 대입하여 결정한다. 식(16)은 콘크리트에 대한 응력-변형도 관계식으로 응력경로의 영향이 포함되어 있다.

$$\sigma = \frac{E_0 \epsilon_1}{1 + \left(\frac{E_0}{E_s} + 2\right) \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_{ic}}\right) + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_{ic}}\right)^2} \quad (16)$$

또한 접선 탄성계수  $E(\epsilon_1)$ 는 식(16)의 응력을 변형에 관해 미분한 값으로서 다음 식으로 표시된다.

$$\frac{d\sigma_1}{d\epsilon_1} = E(\epsilon_1) = \frac{E_0 \left[1 - \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_{ic}}\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{E_0}{E_s} + 2\right) \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_{ic}}\right) + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_{ic}}\right)^2\right]^2} \quad (17)$$

2차원 평면응력상태를 예를들면 응력-변형도 관계는 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E(\epsilon_1)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

즉

$$\{d\sigma\} = [E_T] \{d\epsilon\} \quad (19)$$

따라서 식(13)에 의해서 강성행렬을 구성할 때 재료행렬 [D]는 비선형 효과가 포함된  $[E_T]$ 로 교체되어야 한다.

### 2.3.2 소성 모델(Plastic Model)

소성 모델은 그 구성이 다소 복잡하고 구조물의 해석시간이 많이 소요되는 경향이 있는 반면,

변형증분(incremental deformation)에 입각한 알고리즘을 사용하므로(그림7) 구조물의 해석상태가 비교적 안정하고 큰 하중하에서도 상대적으로 오차가 작다. 또한 unloading, loading 등의 효과를 고려하기에 용이하므로 상대적으로 반복하중이나 충격하중등의 해석에 유용하며, 여러가지 비선형 요인을 복합적으로 고려할 수 있어 비선형해석에 일반적으로 쓰이는 방법이다.

소성 모델은 완전소성모델(perfectly plastic model)과 소성경화모델(hardening plastic model)로 구분된다. 완전소성 모델에서는 소성거동의 시작을 나타내는 항복조건과 파괴를 나타내는 파괴조건이 정의되어야 하고 소성경화 모델에서는 1) 초기항복표면, 2) 계속되는 하중표면/loading surface), 3) 적정의 소성거동법칙(plastic flow rule)의 구성이 잘 정의되어야 한다.

소성모델의 재료행렬은 표1의 항복표면식을 이용하여 구성하며, 소성모델을 가장 간단한 구조

체인 트러스구조(그림8)에 적용시켜 설명하면 다음과 같다. 여기서 사용하는 항복조건식은 Von Mises Criteria이며 응력-변형도 관계는 다음 그림9와 같다고 가정한다.

그림9의 응력-변형도 관계에서 외부 하중의 증가량  $\Delta P$ 에 의해 내부응력이  $\Delta\sigma$ 만큼 증가되었고 이 응력의 증가량을 소성영역에서의 증가량이라 한다면 응력의 증가량에 의한 변형도의 증가량은 탄성변형도  $d\epsilon_e$ 과 소성변형도  $d\epsilon_p$ 의 증가량의 합으로 표현할 수 있다.

$$d\epsilon = d\epsilon_e + d\epsilon_p \quad (20)$$

또한 응력-변형도 관계식으로 부터 탄소성 재료행렬은 탄성 재료행렬과 소성 재료행렬의 합으로 구성된다고 할 때 탄소성 강성행렬도 탄성 강성행렬  $[K]_e$ 와 소성 강성행렬  $[K]_p$ 의 합으로 표현할 수 있다.

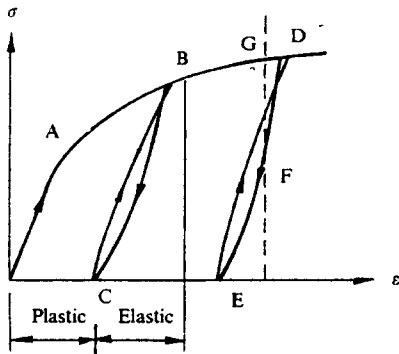


그림 7. 소성경화모델

표 1. 항복표면식

항복한계	항복표면식
Tresca	$\sigma_1 - \sigma_3 = Y(\kappa)$
Von Mises	$(J_2')^{1/2} = K(\kappa)$
Mohr-Coulomb	$\tau = C - \sigma \tan \phi$
Drucker-Prager	$\alpha J_1 + (J_2')^{1/2} = (\kappa')$

$\sigma_1, \sigma_2$ : 주응력,       $\tau$ : 경화변수.  
 $Y, K$ : 재료변수,       $C$ : 접착력  
 $\phi$ : 내부마찰각,  $J_1$ : first stress invariant  
 $J_2'$ : second deviatoric stress invariant

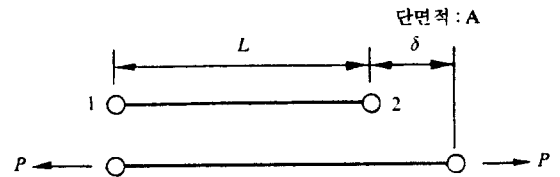


그림 8. 트러스 요소

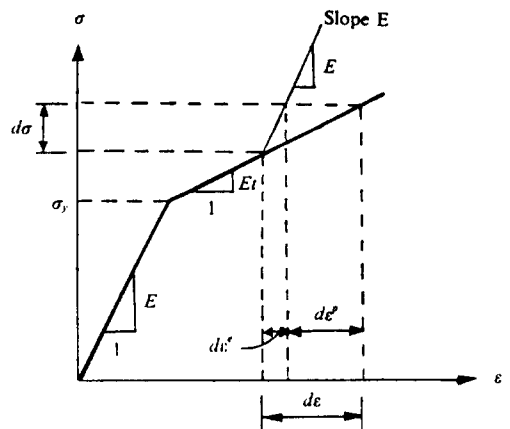


그림 9. 사용 재료의 응력-변형도 관계

$$[E]_{ep}=[E]_e+[E]_p \quad (21)$$

$$[K]_{ep}=[K]_e+[K]_p \quad (22)$$

소성 강성행렬 $[K]_p$ 를 구성하기 위해, 먼저 Von Mises 항복표면식(표1)을 2차원 평면상에서 다음과 같이 정의한다:

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (23)$$

위의 식을 트러스 요소에 적용시키면 트러스 요소는 축방향으로의 변형만을 고려하므로 Von Mises의 항복표면식은  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ 의 조건에 따라 다음과 같이 간단하게 표현된다.

$$\sigma_1 = \sqrt{3} J_2 \quad (24)$$

소성경화변수(hardening parameter)  $h$ 는 하중의 이력(history)에 영향을 받지 않으며 하중 표면식(24)의 우변이 상수이므로 다음과 같이 간략하게 된다.

$$h = \frac{df}{d\varepsilon} = \frac{af}{\sigma\sigma} \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} = \frac{E_t}{1 - E_t/E} \quad (25)$$

따라서 소성 재료행렬은 다음과 같이 간략하게 표시된다.

$$[E]_p = -\frac{E^2}{h+E} \quad (26)$$

위의 식(25)와 식(26)으로 부터 탄-소성 재료행렬은 식(27)과 같이 구성된다.

$$[E]_{ep} = E \left[ 1 - \frac{E}{h+E} \right] \quad (27)$$

위의 식(27)에 나타난 탄-소성 강성행렬을 사용하여 트러스 부재의 소성영역에서의 탄-소성 강성행렬을 트러스의 탄성 강성행렬은 이용하여 다음식으로 표현된다.

$$[K]_{ep} = \frac{AE}{L} \left( 1 - \frac{E}{h+E} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

만약 어떤 재료의 응력-변형도 관계에서 재료

의 특성이 완전소성(perfect plastic) 거동을 보인다면  $h$ 의 값은 0이 되어  $[K]_{ep}$ 는 0 행렬(null matrix) 이 된다.

### 2.3.3 비선형 방정식의 해법

재료 비선형 또는 기하학적 비선형을 고려하는 경우, 강성행렬이 비선형항을 포함하고 있으므로 반복해석(iteration)을 통해 구조물의 변위를 구하게 된다. 즉 비선형 문제를 구간마다 선형화하여 이를 연속적으로 해결하는 방법이다. 이 반복해석법과 관련된 기본개념을 간략하게 요약하면 다음과 같다.

#### 1) 증분법(Incremental Method)

이 방법은 전체하중  $\{R\}$ 을 여러 단계로 나누어 가하고, 각 단계에서는 변위와 응력의 변화가 미소하여 선형이라고 가정한 후, 현 증분단계에서 구하여진 변위와 응력을 전단계까지 누계된 변위와 응력에 다시 합하여 현 단계에서의 변위와 응력을 구하는 방법이다(그림10). 즉 전 단계의 변위와 응력상태를 이용하여 현 단계의 강성행렬을 구성하여 구조물을 해석하는 방법이다. 이 방법에 의한 평형곡선은 그림10에서 보는 바와 같이 정확한 곡선에서 약간 벗어나게 되므로 하중 단계를 많이 나눌수록 더 정확한 해석결과를 얻을 수 있다. 또한 증분법에서는 각 증분 단계마다 강성행렬을 새로이 구성해야 하는 번거로움이

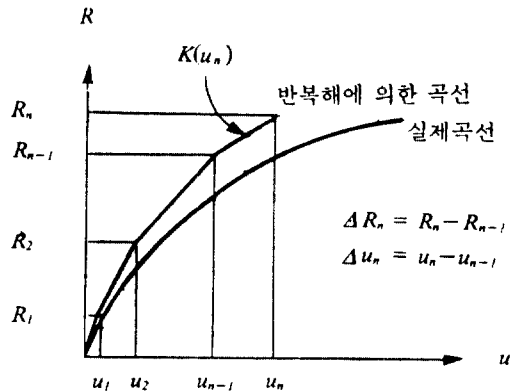


그림 10. 증분법에 의한 해(解)의 수렴과정

있고, 하중단계를 많이 나눔에 따라 상대적으로 계산 소요시간이 길어지고 오차가 누적될 수 있는 단점이 있다. 이 방법의 특징은 정확해나 실험결과 없는 문제에도 광범위하게 적용할 수 있고 또한 각 하중상태에 따른 구조물의 거동을 알 수 있는 장점을 지니고 있다.

## 2) 반복법(Iteration Method)

이 방법은 하중-변위의 평형방정식에서 주어진 하중 {R}에 대해 평형이 만족하도록 반복 계산 때마다 강성행렬을 재구성하고 이를 이용하여 근사해를 반복적으로 수정하여 허용오차 범위내의 근사해를 구하는 방법이다. 반복해석법에 의해 해를 구하는 것은 여력(residual force)을 최소화하는 것과 같은 의미이며, 구간 마다의 강성행렬을 선형화하여 해를 구하는 방법으로는 다음 방법이 있다. ① 할선법(Secant Method), ② Newton-Rapson Method, ③ Modified Newton-Rapson Method.

## 3) 혼합법

이 방법은 앞에서 설명한 증분법과 반복법의 단점을 배제하고 장점만을 취한 방법으로서 하중을 몇 개의 단계로 나누어 가하고 각 하중단계에서 반복법을 사용하여 구조물을 해석하게 된다. 따라서 이 방법을 사용하면 계산시간을 단축시키면서 수렴도를 향상시킬 수 있으며 각 하중상태에서의 구조체의 비선형 거동을 정확히 알 수 있는 등의 장점이 있기 때문에 널리 사용되고 있는 방법이다. 구조물의 비선형 해석을 수행함에 있어 하중을 몇 개의 단계로 나누고 각 하중단계에서 초기 강성을 사용하여 해석을 수행할 수도 있고 수렴속도를 빠르게 하기 위해 위의 방법을 수정하여 사용할 수도 있다.

# 3. 철근콘크리트 구조물의 유한요소 해석

## 3.1 개요

모든 구조물은 이론적으로 3차원 형상으로 이해

될 수 있으나 실제 해석을 수행하고자 할 때에는 계산시간상 차원을 줄이는 것이 바람직하다. 따라서 철근콘크리트 구조물의 유한요소 해석시 첫 단계는 대상 구조물에 적합한 유한요소 모델을 선택하는 것이다.

철근콘크리트 구조물을 표현할 수 있는 유한요소 모델은 (1) 평면응력(plane stress), (2) 평면변형(plane strain), (3) 축대칭 구조(axisymmetric), (4) 평판(plate), (5) 셸(shell), (6) 직방체(solid, 3-dim.) 등으로 구분할 수 있다. 모델이 결정되면, 다음 단계로 재료의 역학적 성질을 기술하는 구성방정식(constitutive equation), 즉 식(3)과 같은 응력-변형도 관계 행렬을 구성하게 된다. 또한, 구조물의 형상함수를 이용하여 변위-변형도 관계식이 식(2)와 같이 구해지며, 가상일의 원리에 의해서 식(13)과 같은 강도 행렬이 구성된다. 이 강도 행렬과 식(14)를 통해서 대상 구조물의 변형도와 응력을 구하게 된다.

## 3.2 평면응력 문제

평면응력 요소는 가장 단순한 연속체형의 요소이다. 가장 많이 사용되는 요소로는 4절점 요소와 3절점 요소가 있으며, 4절점 이상의 고차 요소를 사용할 경우에는 경계조건(boundary condition)의 설정에 주의하여야 한다. 사용 가능한 형상비(aspect ratio)는 요소의 종류, 기하학적 형태, 구조 형태등에 따라 다르며 일반적인 규칙은 없다. 응력경사(stress gradient)가 없는 경우에는 형상비가 50까지도 사용되는 경우가 있으나 일반적으로 이러한 큰 형상비는 피하는 것이 좋다. 형상비와 요소의 비틀림(distorsion)에 대한 일반적인 지침으로서, 가능한 형상비는 1에 가깝도록 하고, 절점의 내부각은 사각형 요소일 경우 90도에 가까운 것이 좋으며, 중간 절점은 변의 중앙부 부근에 위치하도록 한다. 또한 가능한 요소의 변은 직선을 유지하도록 한다.



### 3.2.1 기본방정식

평면응력 상태는 3차원 응력상태에서 z-축에 관련된 모든 응력들을 무시하는 경우로서( $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ ), 응력-변형도 관계식은 위의 식 (18)과 같다.

### 3.2.2 적용 예

유한 요소법이 철근콘크리트 보에 처음 적용된 것은 Ngo와 Scordelis에 의해서 1967년 시작되었다[6]. 이 연구에서 단순 보의 콘크리트와 철근을 2차원 삼각형 유한요소로 모델하여 해석을 수행하였다. 이 모델에서 철근과 콘크리트의 부착거동을 위해서 link 요소를 사용하였으며, 유한요소 해석 시 콘크리트에서의 주응력, 철근에서의 응력 및 부착응력등을 결정하기 위해서 균열 양상을 미리 가정함으로써 선형탄성 해석을 수행하였다.

#### <예제 1> : 얇은 보(Shallow Beam)

단순 지지되고, 지간이 12ft(3.7m)인 철근콘크리트 보의 중앙(midspan)에 집중하중을 작용시켰다. 이때 보의 거동을 실험결과와 유한요소 해석결과와 비교하였으며, 보의 형상 및 부재치수는 그림11와 같다. 콘크리트와 철근의 강도특성은 다음과 같다.<sup>(12)</sup>(여기서, 1 psi=0.07kg/cm<sup>2</sup>).

#### <콘크리트>

- 압축강도=3,270psi(230kg/cm<sup>2</sup>)
- 인장강도= 575psi(40kg/cm<sup>2</sup>)
- 탄성계수=3.47×10<sup>6</sup>psi(242,900kg/cm<sup>2</sup>)

#### <철근>

- 항복강도=80,000psi(No.9 bars),  
50,000psi(No.4 bars),  
47,000psi(No.2 bars)
- 탄성계수=30×10<sup>6</sup>psi(No.9 bars),  
29×10<sup>6</sup>psi(No.4 bars),  
28×10<sup>6</sup>psi(No.2 bars)

철근콘크리트보의 유한요소 모델에서 콘크리트와 주 철근은 그림12에서와 같이 삼각형 평면응력 요소로 모델하였고, 수직 스트립 철근은 트러스요소와 2-D bond linkage element로 모델하였다.

구조해석시에는 재료 비선형성을 고려하여 콘크리트의 균열양상을 알아보았으며, 철근 및 bond linkage element의 비선형성도 고려하였다. 그림 13, 14는 중앙부 단면에서의 휨 및 전단응력의

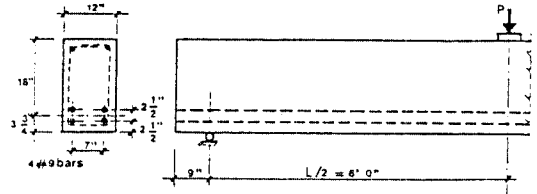


그림 11. 철근콘크리트 보의 형상

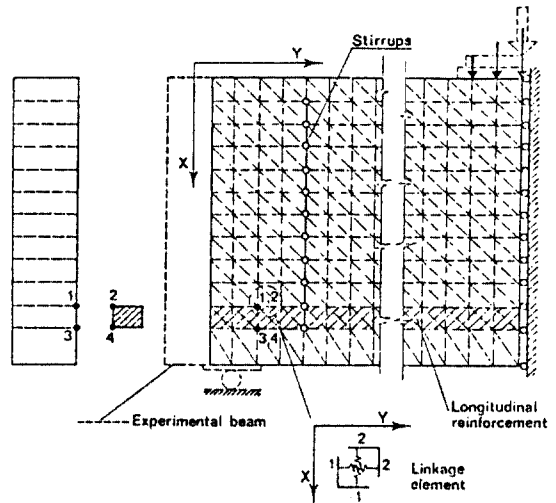


그림 12. 유한 요소 모델 형상

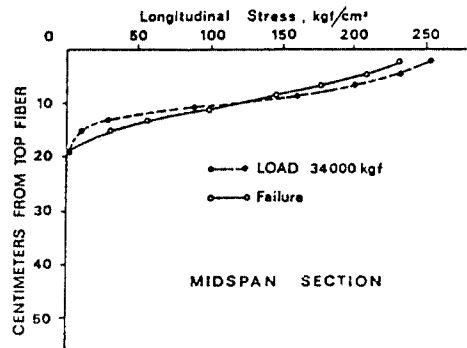


그림 13. 중앙 단면에서의 휨응력 분포

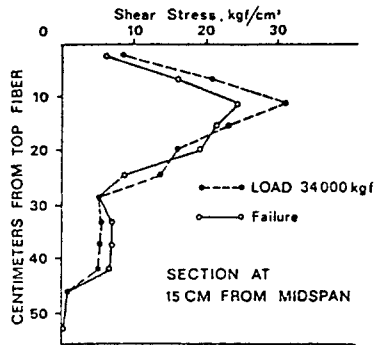


그림 14. 중앙 단면에서 15cm 떨어진 곳에서의 전단응력 분포

분포를 보여주고 있다.

〈예제 2〉 : 깊은 보(Deep Beam)

철근콘크리트 보는 폭이 10cm, 높이가 16cm, 보의 길이가 160cm인 단순보이며, 그림15와 같다.<sup>(12)</sup> 하중은 보의 상단부에 등분포하중으로 작용하며, 보의 자세한 형상 및 유한요소 모델은 그림15에 자세하게 설명되어 있다. 주철근은 4개의 층으로 배근되어 있으며, 철근의 직경은 0.8cm, 항복강도는 2400kg/cm<sup>2</sup>이다. 콘크리트의 압축강도와 탄성계수는 각각 302, 3.2×10<sup>9</sup>kg/cm<sup>2</sup>이다.

보의 유한요소 모델시 콘크리트는 삼각형 평면 응력 요소로 모델하였으며, 철근은 smeared된 철근층에 의해서 표현하였으며, 그러한 철근층은 실제 철근과 같은 방향에서만 일축응력을 부담한다. Dowel action과 bond slip은 무시하였으며, 콘크리트의 파괴 법칙은 Mohr-Coulomb 거동으로 가정하였다. 해석에 의한 보의 항복(yielding)과 균열은 그림16에서 보여주고 있다. 극한하중의 약 37%일 때 지점 부근에서 항복이 발생하였으며, 극한하중의 약 55%일 때 보의 바닥 부근에서 인장균열이 발생하였다. 하중이 증가하면서 많은 곳에서 항복과 균열이 발생하였고, 극한하중 120ton일 때 지점 부근에서 보의 파괴가 발생하였다. 이러한 해석결과는 파괴하중이 129ton인 실험 결과에서 나타난 거동과 잘 일치함을 보여준다.

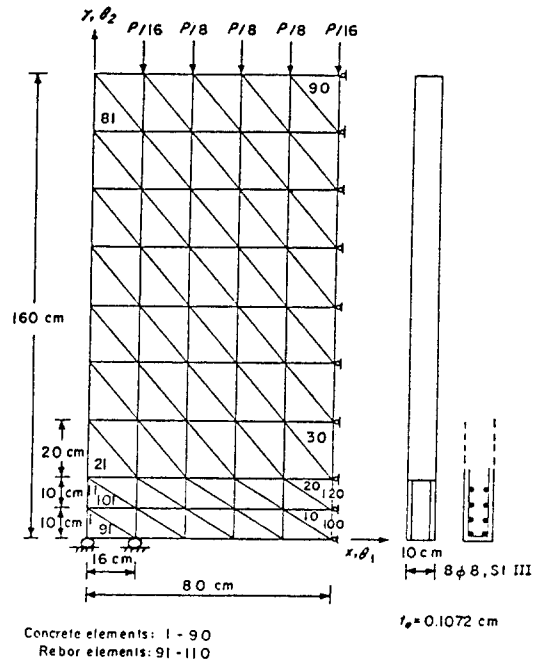


그림 15. 깊은보의 형상 및 유한요소 모델

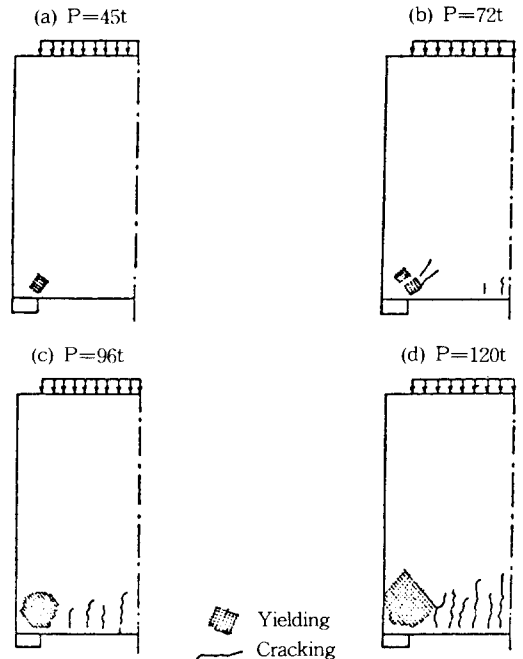


그림 16. 유한요소 해석에 의한 보의 항복 및 균열 형상

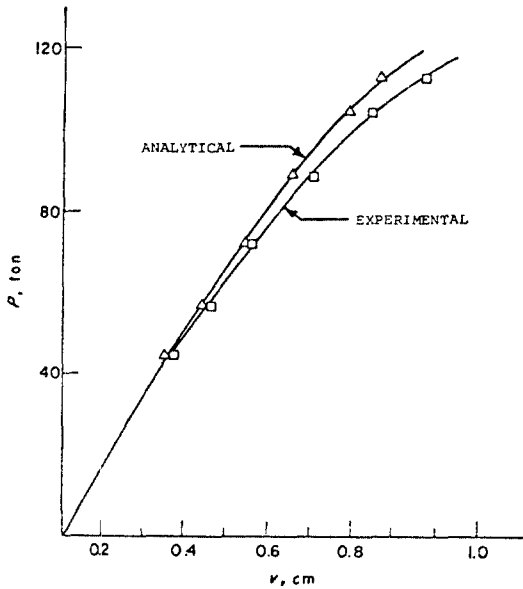


그림 17. 중앙부(midspan)에서의 처짐 형상

그림17은 유한요소 해석과 실험에서 관찰된 중앙부(midspan)에서의 처짐을 보여주는 그림으로 이 두결과가 잘 일치함을 보여주고 있다.

### 3.3 평면변형 문제

#### 3.3.1 기본방정식

평면변형 상태는 3차원 변형상태에서 z축에 관련되는 모든 변형도 성분을 무시하는 경우로서 ( $\epsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$ ), 응력-변형도 관계는 식(29)와 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu(1-\nu) & 0 \\ \nu(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

#### 3.3.2 적용 예

평면변형 상태에 의해서 해석 가능한 구조물에는 댐, 터널, 외압 및 내압을 받는 파이프등이

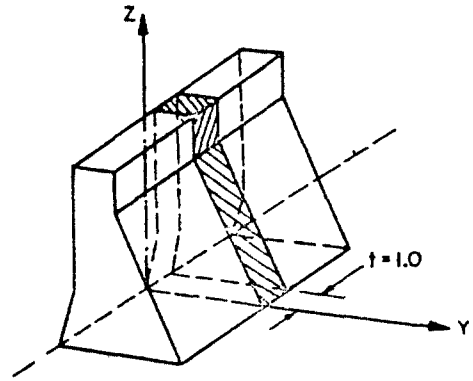


그림 18. 평면변형 유한요소 모델

있다. 그림18은 댐 구조물 길이 방향의 단위폭을 평면변형 유한요소로 모델하는 과정이다.

### 3.4 축 대칭 구조물

회전축에 평행인 임의의 평면을 회전축에 대해 회전시켜 링(ring)형태의 구조체를 이루는 경우를 축 대칭 요소라 하며, 축대칭 요소는 축대칭 구조물에만 사용하도록 제한되나 비대칭 하중에 대해서도 사용할 수 있는 프로그램도 있다. 이 요소에서 작용하중은 원주방향 하중(circumferential loads) 과 방사방향 하중으로 입력된다. 축 대칭 요소는 평면요소와 비슷한 짐을 갖고 있으나 원주방향(hoop)의 응력을 고려해야 하는 점이 다르다. 이 요소는 주로 실린더 좌표를 표시하는 것이 편리하며 축 대칭 하중만이 가해지는 경우 원주방향 변위는 없기 때문에 z-r평면 상에서 방사방향(radial)변위 u와 회전축 방향 변위 w만이 존재하게 된다. 따라서 이 요소는 평면(plane strain) 요소의 범주에 속한다고 할 수 있으나 [B]행렬과 [E]행렬이 확장되는 점이 순수한 평면요소와 다르다.

#### 3.4.1 기본방정식

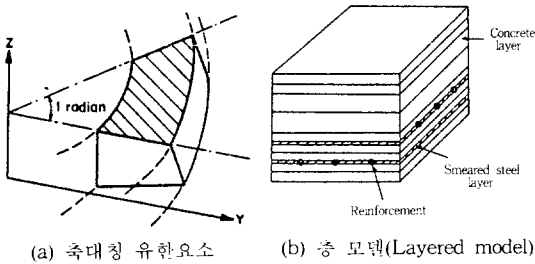
구조물과 재하하중이 축에 대칭인 경우, z축에 관련되는 전단응력( $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ )을 무시하므로써

응력-변형도 관계식은 식(30)과 같다.

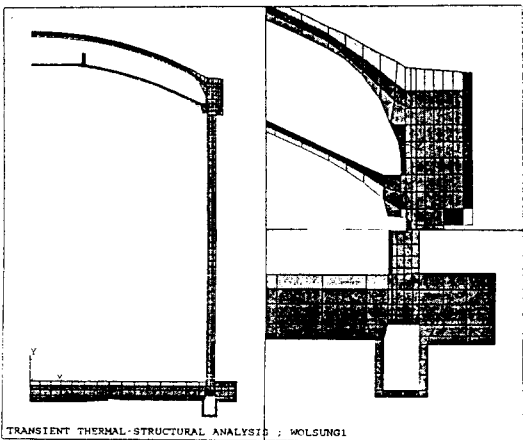
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xz} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu(1-\nu) & 0 & \nu(1-\nu) \\ \nu(1-\nu) & 1 & 0 & \nu(1-\nu) \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) & 0 \\ \nu(1-\nu) & \nu(1-\nu) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xz} \\ \epsilon_z \end{Bmatrix} \quad (30)$$

### 3.4.2 적용 예

축대칭 하중을 받는 축대칭 요소의 유한요소 해석은 평면응력 요소의 해석과 유사하다. 일반적으로 축대칭 요소에 의해서 해석 가능한 구조물로는 내압을 받는 원자로 격납구조물 및 원통형 용기(물 탱크) 등이 있다. 그림19(c)는 내압을 받는 원자력 격납구조물의 축대칭 유한요소 모델형상이며, 그림19(b)는 두께 방향을 재료특성에 따라 등가 층요소(layered element)로 구분한 형상이



(a) 축대칭 유한요소 (b) 층 모델(Layered model)



(c) 격납구조물의 축대칭 모델

그림 19. 축대칭 유한요소 모델

다. 축대칭 변형요소에 대한 해석에는 3.3.2절에 수록되어 있다.

## 3.5 평판 및 슬래브

일반적으로 평판 및 셸 요소는 그 두께가 다른 두 변의 길이보다 현저하게 작은 구조물에 적용되는 요소로서, 사각형 요소와 삼각형 요소가 있다.

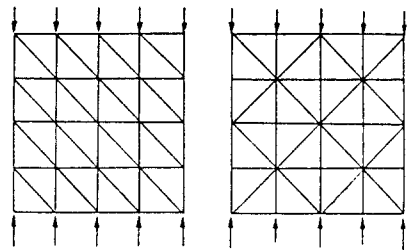


그림 20. 삼각형요소의 대칭성 유지

### 3.5.1 기본방정식

평판의 휨 변형을 해석하는 경우에는 다음과 같은 가정이 요구된다.

1. 평판의 두께는 다른 치수에 비해서 대단히 얇다.
2. 평판내 임의의 점에서 변형은 미소하다.
3. 중립면에 수직인 방향의 응력은 무시할 정도로 작다.
4. 변형전에 중립면(mid-surface)에 수직인 직선은 변형후에도 수직을 유지한다.

즉, 전단변형은 무시되고 휨 변형만을 고려한다(Kirchhoff theory). 그러나 Mindlin theory에서는 전단변형이 포함되며, 이 가정이 성립하지 않는다.

위의 가정에 의하면

$$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \sigma_z = 0 \quad (31)$$

이고, 변형된 중립면의 곡률로 표시되는 평판 요소의 변형도는 다음식과 같다.

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ -2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} -\partial^2 (N_i) / \partial x^2 \\ -\partial^2 (N_i) / \partial y^2 \\ -2\partial^2 (N_i) / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ e_{xi} \\ e_{yi} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

또는 간단하게

$$\{\epsilon\} = [B]\{u\} \quad (33)$$

로서 n은 요소내 절점수,  $e_{xi}$ ,  $e_{yi}$ 는 절점 i에서 x축과 y축을 회전축으로 하여 회전했을 때의 회전각(경사)이다. 재료특성행렬 [E]는 식(34)와 같다.

$$[E] = \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu/2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

### 3.5.2 적용 예

평판 요소를 이용한 유한요소법에 의해서 해석 가능한 구조물로는 철근콘크리트 슬래브 및 박스 거더 교량등이 있으며, 삼각형 및 사각형 평판 쉘 요소를 이용하여 유한요소법에 의한 균열을 고려한 철근콘크리트 슬래브의 연구는 Jofriet과 McNice[7], Bell 및 Elms[8, 9, 10] 등에 의해서 소개되었다. 프리스트레스트 콘크리트 슬래브에 대한 해석은 Youssef[11]에 의해서 연구가 수행되었으며, 유한요소 해석에서 균열을 고려하기 위해서 탄-소성(elastic-plastic) 개념을 이용하였다.

#### <예제 1> : 거더-슬래브 교량

단순 지지된 강주형 I-형 교량으로서 차폭은 2차선 지간은 12m, 슬래브의 두께는 20cm이다. 작용하중은 DB-18 하중이며, 종방향으로 최대 휨모멘트가 발생하도록 재하하였다. 유한요소 해석시 상판 슬래브는 판 요소(plate element) 거더는 보 요소(beam element)로 모델하였으며, 유한요소 모델형상은 그림21과 같다. 해석결과에서는 슬래브의 종방향 모멘트의 분포(그림22)와 거더에서 발생하는 종방향 모멘트의 분포(그림23) 등을 알아 보았다.

1	21	41	61	81	101	121	141	161	181	201	221	241	261	281	301	321
2	22	42	62	82	102	122	142	162	182	202	222	242	262	282	302	322
3	23	43	63	83	103	123	143	163	183	203	223	243	263	283	303	323
4	24	44	64	84	104	124	144	164	184	204	224	244	264	284	304	324
5	25	45	65	85	105	125	145	165	185	205	225	245	265	285	305	325
6	26	46	66	86	106	126	146	166	186	206	226	246	266	286	306	326
7	27	47	67	87	107	127	147	167	187	207	227	247	267	287	307	327
8	28	48	68	88	108	128	148	168	188	208	228	248	268	288	308	328
9	29	49	69	89	109	129	149	169	189	209	229	249	269	289	309	329
10	30	50	70	90	110	130	150	170	190	210	230	250	270	290	310	330
11	31	51	71	91	111	131	151	171	191	211	231	251	271	291	311	331
12	32	52	72	92	112	132	152	172	192	212	232	252	272	292	312	332
13	33	53	73	93	113	133	153	173	193	213	233	253	273	293	313	333
14	34	54	74	94	114	134	154	174	194	214	234	254	274	294	314	334
15	35	55	75	95	115	135	155	175	195	215	235	255	275	295	315	335
16	36	56	76	96	116	136	156	176	196	216	236	256	276	296	316	336
17	37	57	77	97	117	137	157	177	197	217	237	257	277	297	317	337
18	38	58	78	98	118	138	158	178	198	218	238	258	278	298	318	338
19	39	59	79	99	119	139	159	179	199	219	239	259	279	299	319	339

\* (1) : beam element(girder)    (2) : plate element(slab)

그림 21. 강주형 I-형 교량의 유한요소 모델

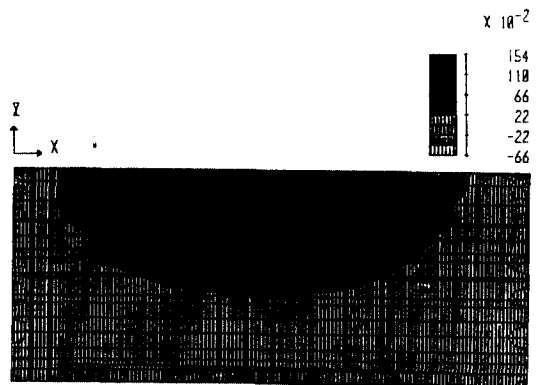


그림 22. 슬래브에서의 종방향 모멘트의 분포

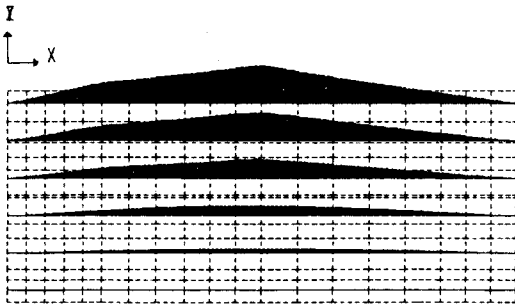


그림 23. 거더에서의 증방향 모멘트의 분포

### 3.6 셸 구조물

일반적으로 셸이란 그 두께가 다른 두번의 길이에 비해 현저히 작은 3차원 곡면구조를 말하며, 외부하중을 막 작용(membrane)과 휨 작용(bending action)의 조합에 의해 매우 효과적으로 지지하는 구조물이다. 평판(plate)은 곡률이 무한대인 셸의 한 특수한 경우이다. 셸 요소는 두께에 대한 반경의 비나 스패의 비( $R/t$ )에 따라 50-500사이인 경우는 "얇은 셸", 50보다 작은 경우는 "두꺼운 셸"로 가정한다.

#### 3.6.1 기본방정식

셸 구조물 해석을 위해서는 (1) 평판 요소의 조합으로 셸의 곡면을 근사적으로 모델링하여 해석하는 방법, (2) 고전적인 얇은 셸 이론에 근거한 셸 요소를 사용하는 방법, (3) 등매개 변수 셸 요소(degenerated shell element)를 사용하는 방법등이 있다. 가장 일반적으로 사용하는 방법은 평판 휨(plate bending) 요소에 평면요소(plane stress)를 결합하여 강성행렬을 구하고 그 해를 근사적으로 구하는 방법이다. 이 경우 한 절점당 3개의 이동 변위와 2개의 회전 변위를 가지며 변위-변형도 관계는 식(35)와 같다.

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u, x \\ v, y \\ u, y+v, x \\ u, z+w, x \\ v, z+w, y \end{Bmatrix} = [B]\{u\} \quad (35)$$

재료특성 행렬  $[D]$ 는 식(36)과 같다.

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\nu/2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\nu/2\alpha \end{bmatrix} \quad (36)$$

여기서,  $\alpha =$  평판/셸 단면에 포물선으로 분포된 전단응력을 평균 전단응력으로 표현하는데 따르는 보정치로서 평판의 경우 1.2를 취한다.

#### 3.6.2 적용 예

셸 요소를 이용한 유한요소법에 의해서 해석 가능한 구조물로는 돔 구조물, 액체저장탱크, 격납 구조물등이 있으며, 한 예로 원자력 격납구조물과 셸 Roof 구조물을 셸 요소로 해석하기 위한 유한요소 모델 형상은 그림24와 같다.

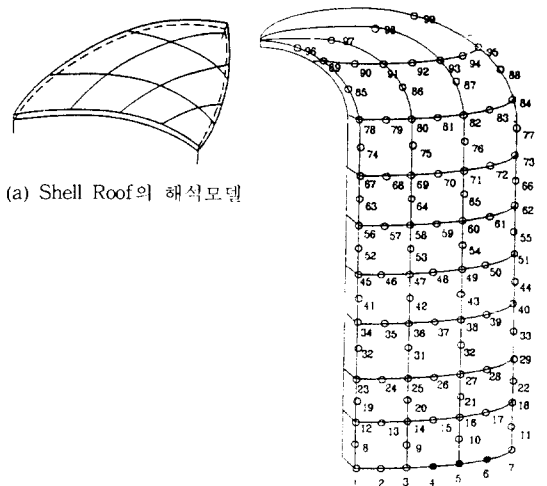
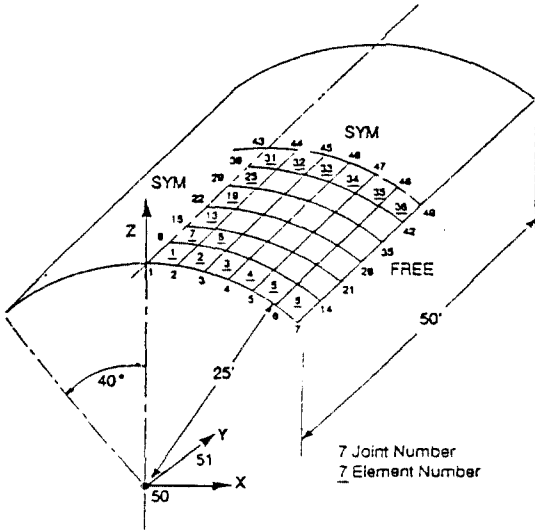


그림 24. 셸 요소에 의한 구조물의 유한요소 모델

〈예제 1〉 : Reinforced concrete single span cylindrical roof

셸 구조물의 형상은 그림25와 같고, 자중에 대해서 해석을 수행하였으며, 자중은 구조물에 균일하게 분포한다. 그림26은 자유단의 중앙에서



THICKNESS = 3 in  
 MODULUS OF ELASTICITY =  $4.32 \times 10^6$  psf  
 POISSON'S RATIO = 0.0  
 GRAVITY LOAD = 90 psf  
 (UNIFORM ON SURFACE AREA)

BOUNDARY CONDITION: SIMPLY SUPPORTED ON CURVED EDGES

그림 25. Cylindrical Roof의 유한요소 모델

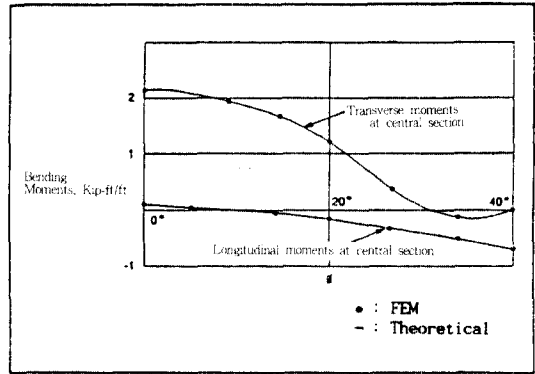


그림 27. 휨 모멘트의 비교

의 수직변위와 축방향 변위를 유한요소 해석 결과와 이론적인 결과의 비교를 보여주는 그림이다. 그림에서 보면 이들의 결과는 잘 일치함을 보여주고 있다. 그림27은 구조물의 중앙부에서의 휨 모멘트를 보여주는 그림으로서 해석결과와 이론적인 결과가 잘 일치하고 있다.

3.7 선형 탄성 파괴 해석

본 절에서는 선형 탄성 파괴 모델(linear-elastic fracture model)을 콘크리트에 적용하여 휨파괴가 발생하는 얇은보(shallow beam)와 사인장 파괴가 발생하는 얇은보에 대한 유한요소 해석방법에 대해서 서술하였다.

3.7.1 얇은보의 휨파괴

휨 파괴가 발생하는 보의 segmental 보 요소 (beam element)를 사용하여 각 단면에서 몇개의 콘크리트층과 철근층으로 분할한다. 이때 다음과 같은 가정이 요구된다. (1) 평면은 변형후에도 평면을 유지한다. (2) 각 층은 일축응력상태에 있다.

유한요소법에서는 각 층에 대해 재료의 성질, 응력과 변형상태 및 균열등이 각 하중의 증가시나 반복계산동안 각 층에 대해 새로이 저장된다. 이러한 해석을 통해서 보의 국한 파괴거동까지

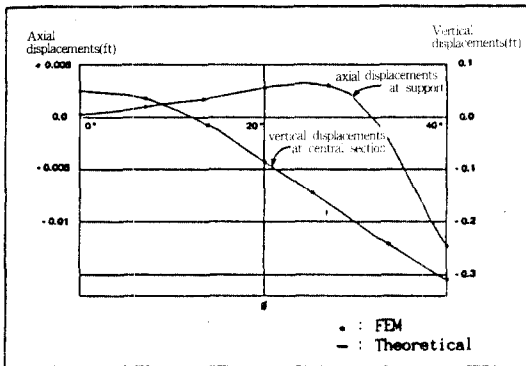


그림 26. 변위값의 비교

잘 추적할 수 있다.

### 3.7.2 얽은보의 전단 및 사인장 파괴

보의 사인장균열등을 추적하기 위하여 보를 콘크리트, 철근 및 철근과 콘크리트의 부착등을 유한요소로 모델하였다. 철근은 단면폭에 균일하게 분포된다고 가정하고, 철근의 탄성계수를 수정하여 보의 폭과 같은 폭을 가지는 층으로 변환하였다. 단위폭의 보는 평면응력 유한요소로 해석하였다. 수직 스트립은 일차원 bar element로 모델하였고, 그림28과 같은 linkage element를 이용하여 부착응력-미끄러짐과 골재의 interlock을 모델하였다. 균열의 열림과 닫힘을 나타내기 위해서 H, V의 두개의 자유도와 적당한 스프링상수  $K_v$ ,  $K_h$ 를 가정하였다. 이러한 유한요소 해석을 통해서 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

1. 콘크리트의 종방향 수직응력 분포
2. 콘크리트의 전단응력 분포
3. 종방향 철근의 인장력
4. 종방향 철근에서 횡방향 전단력
5. Dowel tension과 dowel shear
6. Bond-link element에서의 휨
7. 스트립에서의 휨
8. 주인장 균열

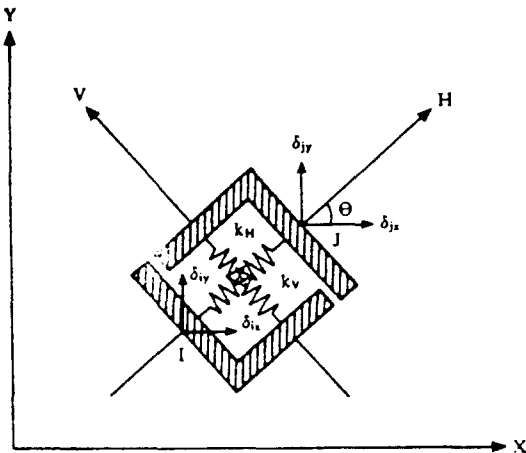


그림 28. 부착거동을 묘사하는 연결요소(linkage element)

## 4. 결 론

본 小考에서는 최근들어 철근콘크리트 및 프리스트레스트 콘크리트 구조물의 강력한 해석수단으로 자리잡고 있는 有限要素法의 기본 理論 및 적용방법과 적용 例를 중심으로 고찰하였다.

콘크리트 구조물은 그 역학적거동이 워낙 복잡하여 非線形舉動을 하며, 따라서 정확한 해석을 위하여는 非線形 有限要素解析을 수행하여야 한다. 전산컴퓨터의 급속한 발달로 복잡한 해석도 단시간내에 가능하게 되었으며, 이것은 복잡한 콘크리트 구조물의 정확한 거동해석을 가능케 하였다.

본 考에서는 주로 철근콘크리트 구조물의 주를 이루는 2차원 평면구조물과 셸 구조물의 해석방법에 대하여 고찰하였고, 이것은 철근콘크리트 보, 전단벽체, 평판 및 슬래브, 댐, 원통형 셸구조물, 원자력 발전소 격납구조물, 교량구조물 등에 다양하게 적용될 수 있다. 지면관계상 해석의 기본과 정 및 적용에만 고찰하였고 좀더 상세한 것은 참고문헌의 참조를 통하여 구체적으로 실제 구조물에 활용될 수 있을 것으로 사료된다.

결론적으로 유한요소법은 복잡한 長大 콘크리트 구조물의 정확한 해석을 가능케하는 가장 강력한 수단으로 자리잡고 있다.

## 참 고 문 헌

1. Clough, R.W., "Original Formulation of the Finite Element Method", Proceedings of the ASCE 7th Structures and Pacific Rim Engineering Congress, San Francisco, 1989.
2. Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method : From Intuition to Generality", Applied Mechanics Review, Vol.23, No.3, March 1970.
3. Mackerle, J., "Finite Element methods : A



- 
- Guide to Information Sources", Finite Element in Analysis and Design, Vol.8, Special Issue, 1990.
4. Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw-Hill Publishing Co., Ltd., London, 1971.
  5. Kang, Y.J., "Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Frames", Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1977.
  6. Ngo, D., and Scordelis, A.C., "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams", American Concrete Institute Journal, Vol. 64, No.3, March 1967.
  7. Jofriet, J.C., and McNice, G.M., "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Slabs", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.97, No.ST3, March 1971.
  8. Bell, J.C., "A Complete Analysis of Reinforced Concrete Slabs and Shells", Ph.D. Dissertation, Department of Civil Engineering, University of Canterbury, Christchurch, New Zealand, 1970.
  9. Bell, J.C., and Elms, D.C., "A Finite Element Post Elastic Analysis of Reinforced Concrete Shells", Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures, No.54, April 1974.
  10. Bell, J.C., and Elms, D., "Partially Cracked Finite Elements", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.97, No.ST7, July, 1971.
  11. Youssef, A. A.-R., McCutcheon, J.O., Mufti, A.A., and Mirza, M.S., "Inelastic Analysis of Plates and Slabs Using Finite Elements", Structure Concrete Series No. 71-1, McGill University, Montreal, March 1971.
  12. ASCE, "State-of-the-Art Report on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete", ASCE Task Committee on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures, 1982, pp.545.