

P-version 有限要素法에 의한 疲勞龜裂解析

Fatigue Crack Propagation Analysis by P-version of Finite Element Method

우 광 성* 이 채 규
Woo, Kwang Sung Lee, Chae Gue

요 지

철도, 항공 및 기계구조물등의 많은 설계문제에서는 반복하중의 영향을 받기 때문에 제조와 품질제어 공정에서 특히, 반복하중의 영향이 심한 구조부품의 피로균열에 대한 연구가 충분히 선행되어야 한다. Paris 법칙에서 응력확대계수범위 ΔK 에 10% 오차를 수반하면 피로수명 N에는 50% 정도의 오차를 초래할 만큼 민감도가 매우 크다. 그러나, 선형탄성과괴역학에 근거한 p-version 유한요소법은 응력확대계수를 산정하는데 있어서 종래의 h-version 유한요소법에 비해 훨씬 적합함이 증명되고 있다. 제안된 해석법의 효율성을 입증하기 위해 철도차량의 연결접합부에 있는 T-joint부위의 피로균열해석과 원공이 있는유한판의 원공주위에서 발생하는 균열해석이 수행되었다.

ABSTRACT

Since many design problems in the railroad, aerospace and machine structures involve considerations of the effect of cyclic loading, manufacturing and quality control processes much fully account for fatigue of critical components. Due to the sensitivity of the Paris law, it is very important to calculate ΔK numerically to minimize the error of predicted fatigue life in cycles. However, it is shown that the p-version of FEM based on LEFM analysis is far better suited for computing the stress intensity factors than the conventional h-version. To demonstrate the proficiency of the proposed scheme, the welded T-joint with crack problems of box car body bolster assembly and a crack problem emanating from a circular hole in finite strip have been solved.

1. 序 論

航空構造物 및 機械의 리벳연결부 및 용접접합부등의 部品에 작용하는 反復荷重(cyclic loading)에 의한 疲勞龜裂(fatigue crack)은 製造(manufacturing)과 品質制御工程(quality control process)

등에서 主要한 해석과제로 남아있다. 一例로 鐵道産業(railroad industry)에 사용되는 구조물의 설계시 차량구조의 組立部에는 反復荷重의 심한 영향을 받게된다. 美國의 A.A.R.(The Association of America Railroads)은 반복하중에 의한 疲勞解析의 임시규정을 제시하고 있는데[1] 예를 들면

* 정회원, 전남대학교 토목공학과 조교수

이 논문에 대한 토론을 1992년 12월 31일까지 본학회에 보내주시면 1993년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

單位車輛(unit train)의 용도와 부품상태에 따라 100만 마일에서 300만 마일까지 車輛의 예상수명을 규정하고 있다. 이러한 疲勞현상은 특히 차량의 연결부인 받침집합부(bolster assembly), 중앙바다 및 板(center sills & center plates), 전후 통풍돌기 및 지지대(front and rear draft lugs and supports) 등의 鐵道裝置(railroad equipment)는 다른 육상교통에 비해 심한 반복하중을 받고 있으며 구조적으로는 거의 대부분이 평판의 결합으로 이루어졌으며 一般的으로 용접된 부위에서부터 龜裂이 시작됨을 알 수 있다. 철도차량연결부의 幾何形狀은 매우 복잡하며 그중에서도 피로현상이 심하게 일어나는 화물차량받침(freight car bolster)이 본 연구의 대상이 된 것이며 그 형상이 Fig. 1에 잘 나타나 있다[4]. 피로해석에 대한 지침은 S-N 곡선과 修正 Goodman's Diagram을 많이 사용하여 왔으나 본 연구에서는 유한요소법을 이용한 線形彈性破壞力學(Linear Elastic Fracture Mechanics) 이론을 직접 적용할 것이다. 한편, 이러한 구조부재에 사용되는 材料는 제조 또는 조립과정에서 용접과 재료상의 缺陷(defects)과 표면에 흠집(flaws)이 생기는 등의 初期龜裂(initial flaw)이 일어날 수 있다. 이러한 초기균열은 시간이 경과함에 따라 균열크기는 증가하는데 비하여 구조물의 強度는 감소하여 마침내 전체구조물을 破壞시키고 만다. 이러한 龜裂은 화학용액등에 의한 응력부식(stress corrosion) 등에 인하여 발생함과 동시에 안정한 상태로 가기 위해 傳播(propagation)가 시작되는 것이다. 그러므로 구조물은 龜裂成長(crack growth)에 따라 균열선단에서 應力擴大係數(stress intensity factor)가 臨界值 K_{Ic} 보다 커지면 不安定 龜裂傳播(unstable crack propagation)가 일어나 마침내는 破壞되고 만다는 것이다. 균열전파가 일어날 때의 응력확대계수를 破壞靱性(fracture toughness)이라 하며 이것은 파괴에 저항하려는 성질이며 재료의 성질뿐만 아니라 荷重速度(loading rate)와 溫度에도 영향을 받는다. 疲勞龜裂과정에서 구조물의 예상수명을 예측하기 위해서는 기하형상과 하중형식에 다음과 같은 사항이 우선적으로 규정되어야 한다. 여기서 K_{Ic} 값은 기준에 발간된 문헌이나 실험에 의해서 결정될 수 있다[2, 4, 8].

- (i) 재료의 파괴인성(fracture toughness) K_{Ic} 값
- (ii) 균열성장속도를 위한 方程式(9)에 관계된 재료상수(material constants)
- (iii) 초기균열크기(initial crack size)
- (iv) 균열전파속도의 응력확대계수(stress intensity factor)
- (v) 臨界균열크기(critical crack size)

위의 문제를 해결하기 위한 가장 큰 문제는 應力擴大係數 K 를 여하한 방법으로 구해서 이에 따른 龜裂制御計劃(crack control plan)을 어떻게 효율적으로 수행할 수 있는가에 있다. 그러므로 본 연구는 우선적으로 제기된 h-version의 문제점들을 기존의 有限要素理論의 틀을 유지하면서 훨씬 더 효율적인 定式化 과정을 통하는 P-version 유한요소법을 도입하여 정확도, 신뢰성 그리고 경제성등의 문제를 해결할 수 있는 代案을 제시하고 동시에 반복하중에 의한 疲勞와 荷重의 組合에 의해 발생하는 균열문제에서 균열크기, 幾何形狀과 材料性質, 荷重條件, 反復回數 등의 변화에 따른 應力擴大係數 K 를 산정하며 아울러 파괴에 도달하기 까지의 피로예상수명(fatigue life prediction)을 예측하여 이에 따른 균열제어계획을 효율적으로 수립할 수 있도록 하는 것이 본 연구의 目的이라 하겠다.

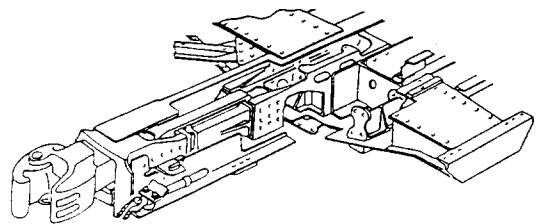


Fig.1 Typical box car body bolster assembly

2. 疲勞龜裂解析

2.1 解析範圍

本 연구에서는 2차원 線形彈性破壞力學(L.E.F.M. : Linear Elastic Fracture Mechanics)이론에 근거하여 Fig.1에 보이는 철도차량의 집합받침(box car body bolster assembly)의 疲勞解析 및 리벳연결에 의한 圓孔(fastner hole) 주변에서 발생하는 균열해석을 C^0 -四邊形階層要素(hierarchic

quadrilateral element)를 사용하여 해석하고자 한다. 연구의 범위는 재료의 성질이 線形彈性이고 形狀函數로는 積分型 르장드르函數(Integrals of Legendre Polynomial)을 사용하며 기하학적 곡선형상은 超有限寫像(transfinite mapping)을 이용하여 표현하며 해의 수렴성은 에너지 노름(energy norm)의 相對誤差를 自由度の 증가에 따라 살펴보고자 한다.

2.2 解析方法

龜裂선단의 응력집중계수(S.I.F.) K 값을 산정하기 위해 에너지법이 사용되었는데, 이는 K 값을 구하기 위한 간접 테크닉으로서 균열성장애 따른 포텐셜에너지의 감소를 계산하여 구하게 되며 보통 G 로 표시한다. 즉, 균열크기 a 의 변화에 대한 포텐셜에너지 π 에 대한 변화율로서 나타내며 에너지방출률(energy release rate)이라 한다. 표현식은 다음과 같다.

$$G = -d\pi/da \tag{1}$$

일반적으로 引張에 의한 열림형식(opening model) K_I 과 에너지방출률 G 값에 대한 상관식은 平面應力(plane stress)의 경우 다음과 같다.

$$G = K_I^2/E \tag{2}$$

또, 외부하중의 변화가 없을 때 에너지방출률은 Hellen, Parks[5]에 의해 제안된 假想龜裂擴張法(virtual crack extension method)이 더욱 효율적으로 적용될 수 있는데 이는 에너지법에 근거하며 해석기법에서 進一步한 것이다.

$$G = \frac{d\pi}{da} = -\frac{1}{2} \{u\}^T \frac{\partial [K]}{\partial a} \{u\} + \{u\}^T \frac{\partial \{f\}}{\partial a} \tag{3}$$

여기서, π 는 총포텐셜에너지, a 는 균열크기, $\{u\}$ 는 균열성장선의 변위벡터, $[K]$ 는 강성도매트릭스, 그리고 $\{f\}$ 는 하중벡터를 나타낸다[5]. 만약 외력 및 열하중의 변화가 가상균열 Δa 가 발생되는 동안 일정하다면 G 는 식(4)와 같게 된다.

$$G = -\frac{1}{2} \{u\}^T \frac{\partial [K]}{\partial a} \{u\} \tag{4}$$

疲勞破壞解析이 修正 Goodman의 圖表에 기초한 접근방법일 때는 흔히 Miner의 線形累積損傷法則(linear cumulative damage rule)을 사용하여 왔다. 이것으로 피로파괴에 도달할 때까지의 반복회수에 대한 최대응력의 변화곡선(S-N 곡선)을 예측할 수 있는데 최대응력에 대한 반복회수 N_i 는 아래 식과 같이 표현된다[2, 4].

$$N_i = N_e \left[\frac{S_{max,i}}{S_e} \right]^{1/k} \tag{5}$$

N_e : 재료의 피로한계(fatigue limit)
 S_e : N_e 일 때의 응력한계로 재료성질, 기하형상 및 응력비의 영향을 받으며 修正 Goodman의 圖表로 부터 구해진다.

k : Log-Log 좌표에서 S-N 곡선의 기울기의 절대값, 보통 0.1-0.32 사이의 값

S_{max} : 최대응력

여기서 응력확대계수의 중요성을 설명하기 위해 S_{min} 와 S_{max} 의 응력을 받는 일정진폭(constant amplitude) 문제에서 유한요소법에 의한 응력해석에서 발생하는 최대응력에 대한 상대오차가 식(6)과 같이 표현되며 S_{max}^* 는 유한요소법에 의해 계산된 응력값이다.

$$e_s = \left| \frac{S_{max} - S_{max}^*}{S_{max}} \right| \tag{6}$$

식(6)를 사용하여 수치해석으로 계산된 반복회수를 N^* 이라 하고 이에 대응되는 최대응력을 S_{max}^* 이라 할 때 식(7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{N^*}{N} = (1 - e_s)^{1/k} \tag{7}$$

그러므로, 반복회수에 대한 상대오차도 식(8)과 같이 정의된다.

$$e_N = \frac{N - N^*}{N} = 1 - (1 - e_s)^{1/k} \tag{8}$$

식(8)에서 보듯이 응력계산값이 10%의 오차를 수반하고 $k=0.15$ 라 할 때 반복회수 N 는 50%의 오차를 유발함을 공식으로부터 쉽게 알 수 있으며 ΔK 의 오차에 대한 반복회수 N 의 상관관계가 Fig.2에 표현되어 있다[3]. 반복회수산정에 대한 좀 더 간략한 공식은 Paris, Gomez와 Anderson

[2]이 제안한 것으로 식(9)에 표시되어 있으며 본 연구에서는 이 방법을 채택하고자 한다. 즉, 疲勞에 의한 豫想壽命(life prediction)이 Paris, Gomez등에 의해 제안되었는데 다음과 같다[2, 7, 8].

$$da/dN=C(\Delta K)^m \tag{9}$$

- 여기서, a : 균열크기
- N : 반복회수
- ΔK : 반복하중에서 응력확대계수의 범위
- C, m : 실험적으로 결정되는 재료의 상수

식(9)로부터 반복회수 N 을 산정할 수 있다. 즉,

$$N=\int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{C(\Delta K)^m} \tag{10}$$

여기서 ΔK 는 균열길이 등의 기하형상에 대한 함수이므로 ΔK 는 초기균열에서 균열진전에 따라 수치적으로 구해져야 한다.

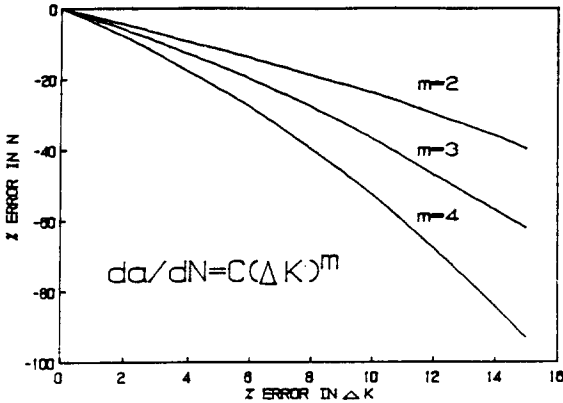


Fig.2 Sensitivity of the Paris Law

3. 實際變形에너지 算定

2차원 선형탄성문제의 변형에너지는 식(11)과 같이 표현할 수 있다.

$$U=\frac{1}{2} \int \epsilon^T \sigma dV \tag{11}$$

여기서 $\epsilon^T=\{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, 2\epsilon_{12}\}$ 는 변형도 벡터를 나타내며 실제에너지와 유한요소에 의한 근사에너지의 에너지 노름(energy norm)은 식(12)과 같으며 이 값이 최소화됨에 따라 해가 수렴하게 된다.

$$\|e\|_E^2=U(u-u_{FE})=|U(u)-U(u_{FE})| \tag{12}$$

한편, p-version 유한요소에서 수렴구간(asymptotic range)은 아래 식으로 예측할 수 있다.

$$|U_{ex}-U_p| \leq CN_p^{-\beta} \tag{13}$$

여기서 N_p 는 U_p 에 대응하는 자유도수, p 는 형상함수의 차수, C 는 양의 상수, β 는 수렴속도를 나타낸다. 그러나, 유한요소의 해가 수렴구간내에 있을 정도의 충분한 크기의 자유도를 갖고 있다면 식(13)은 부등호 대신 등호로 대치할 수 있을 것이며 같은 방법으로 수렴구간에 있는 U_{p-1} , U_{p-2} 도 아래 식과 같이 정의될 수 있다[4].

$$\begin{aligned} U_{ex}-U_{p-1} &= CN_{p-1}^{-\beta} \\ U_{ex}-U_{p-2} &= CN_{p-2}^{-\beta} \end{aligned} \tag{14}$$

식(13)과 식(14)에 양변에 LOG를 취하여 식을 再정리 하면 아래 식을 얻게되며 이로부터 실제변형에너지를 얻게 된다.

$$\frac{\text{LOG} \frac{U_{ex}-U_p}{U_{ex}-U_{p-1}}}{\text{LOG} \frac{U_{ex}-U_{p-1}}{U_{ex}-U_{p-2}}} = \frac{\text{LOG} \frac{N_{p-1}}{N_p}}{\text{LOG} \frac{N_{p-2}}{N_{p-1}}} \tag{15}$$

4. 數値解析例

4.1 圓孔균열해석

이 문제는 앞에서 언급한 바와 같이 ΔK 의 오차가 반복회수 N 에 매우 큰 영향을 미치는 까닭에 본 논문에서 제안되는 p-version 유한요소법이 응력확대계수를 산정하는데 있어서 실제값에 비해 얼마나 높은 정확도를 갖는가를 보여주기 위해 채택되었다. 사각형 有限板의 圓孔으로 부터 발생된 균열 문제에 대한 p-version 모델이 Fig.3에 나타나 있다. 응력확대계수 K_I 은 a/b , r/b 와 h/b 의 함수가 되며 a 는 전체 균열크기의 1/2을 나타내며 r 은 圓孔의 半徑을 b 와 h 는 有限板의 폭과

높이를 나타낸다. Fig.4에서는 식(15)가 정당한가를 수치적으로 보여주고 있는데 그림에서 보듯이 r/b에 따른 균열문제에서 p-level이 5차를 넘게 되면 강한 선형성을 보여주므로 外挿法에 의해 p-level=∞ 즉, 자유도가 ∞가 되었을 경우의 實際變形에너지방출률 G가 구해진다. 그러므로, 해의 정확도를 높이기 위해 p-level의 차수를 더 증가시키지 않고도 유한요소법에 의한 실제 응력 확대계수를 구할 수 있다. Fig.5에서 h/b=2일 때 r/b가 0, 0.25, 0.5로 원공크기가 커짐에 따른 a/b 즉, 균열진전에 따른 F-factor(Correction factor)가 Newman의 Boundary Collocation Method 값 [6]과 p-version 해석결과(p=8, 4개요소)와 좋은 비교를 보이고 있다. 물론, p-level=∞일 때의 값을 사용하게 되면 Newman 값과 거의 일치됨이 확인되었다. 그러나, Fig.5에서 보듯이 p=8이 사용되었을 때도 높은 수렴성을 보여주고 있다.

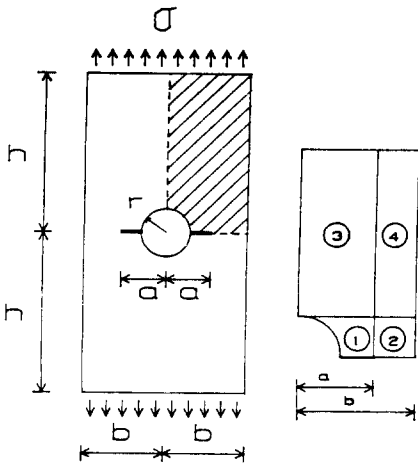


Fig.3 P-version model for a crack emanating from a circular hole in rectangular plate under tension

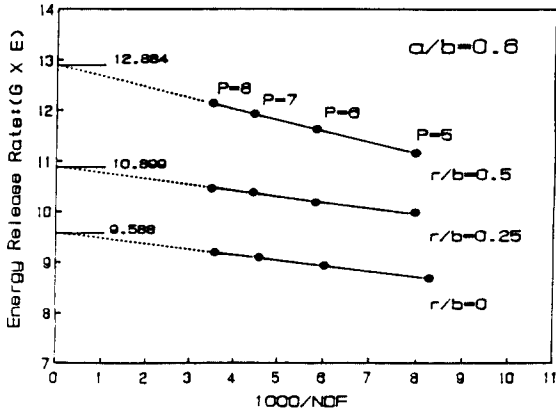


Fig.4 Strong linearity of (NDF)⁻¹ vs. G

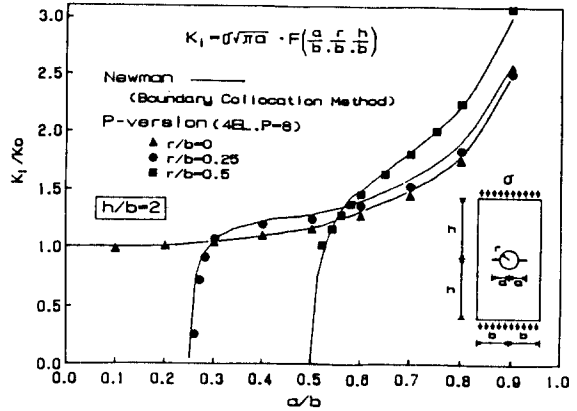


Fig.5 Variation of stress intensity factor K with crack length

4.2 T-joint部の 疲勞龜裂解析

필렛용접에 의한 T-joint부에 대한 형상과 p-version 모델이 Fig.6에 나타나 있다. 여기서 E=29000 Ksi, ν=0.3, t=0.25 in가 사용되었다. 여기서 응력확대계수는 가상균열확장법에 의해 구해지며 이에 따른 가상균열의 크기 Δa에 매우 민감한 반응을 보여준다. 고로, Δa가 변화함에 따라 에너지방출률이 안정된 값을 갖는 구간에 대한 조사가 Fig.7에 나타나 있으며 본 논문에서는 Δa=1-7a를 사용하였다. 한편, Fig.8은 앞의 문제와 마찬가지로 자유도의 증가에 따른 에너지방출률의 선형성을 살펴 보았는데 p=6 이후부터는 강한 선형성을 보여주므로 식(15)을 사용하여 무한대 자유도일 경우의 한계값(Limit Value)를 구하였다. 한편, 필렛용접부의 초기균열은 0.0075'(a/t=0.03)으로 가정하였으며 다른 균열크기의 각각 0.0125', 0.025', 0.0375'와 0.05' 정하였다. 그 이유는 균열이 진전되는 방향의 靱帶(ligament)가 완전 항복(full yielding)이 되었다는 가정 아래 최대균열크기 a_r를 아래와 같이 산정할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & \text{i) } \sigma_y = 36 \text{ksi일 때} \\
 & \frac{1}{2} \left(0.25 - \frac{20}{36 \times 4} \right) = 0.0556' \\
 & \text{ii) } \sigma_y = 33 \text{ksi일 때} \\
 & \frac{1}{2} \left(0.25 - \frac{20}{33 \times 4} \right) = 0.0492'
 \end{aligned} \tag{16}$$

그러므로 최대균열크기를 위에서 선택한 것 과 같이 0.05'로 가정하였다. 한편, 강재의 초기균열

전과될 때의 ΔK_{th} 는 應力比(stress ratio) R 의 함수로 표시된다[7].

$$\begin{aligned} \Delta K_{th} &= 6.4(1 - 0.85 \cdot R) \quad \text{for } R > 0.1 \\ \Delta K_{th} &= 5.5 \text{ksi} \sqrt{\text{in}} \quad \text{for } R \leq 0.1 \end{aligned} \quad (17)$$

本 논문에서는 $\sigma_{min}=0$ 과 $\sigma_{max}=20\text{ksi}$ 로 가정하였으므로 應力比 R 은 0이 된다. 고로, $\Delta K_{th}=5.5\text{ksi} \sqrt{\text{in}}$ 가 됨을 알 수 있다. Fig.9는 위에서 선택된 균열크기에 따른 K_I 값을 구하기 위해 외삽법을 이용하여 실제에너지 방출률이 구해지는 것을 보여주고 있으며 균열크기에 따른 ΔK_I 값이 Table 1에 나타나 있으며 이 값들은 $\Delta K_{th}=5.5\text{ksi} \sqrt{\text{in}}$ 보다 크므로 균열전과가 발생됨을 알 수 있다 [7, 8].

Table 1 균열크기에 따른 ΔK_I

a(inch)	a/t	G	ΔK_I
0.0075	0.03	0.00105	5.518
0.0125	0.05	0.001344	6.243
0.025	0.10	0.002015	7.644
0.0375	0.15	0.002553	8.604
0.05	0.20	0.00317	9.588

a/t에 대한 ΔK_I 의 그림이 Fig.10에 나타나 있으며 最少自乘法에 의해 ΔK_I 의 식이 아래와 같이 얻어진다.

$$\Delta K_I = 5.271 + 87.96a \quad (18)$$

만약에 σ_f 가 30-80ksi 사이일 때 식(9)의 상수 값 C 와 m 은 각각 3.6×10^{-10} 와 3이 된다. 이 경우

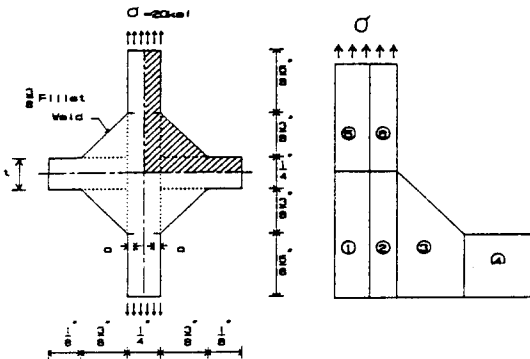


Fig.6 Stretched Plate with Fillet Welded Ribs(Weld Face-Flat)

의 강재는 Ferrite-Pearlite Steel에 해당된다. 식 (10)에 사용하여 적분하게 되면 Table 2와 같이 예상피로수명 N 이 결정된다.

Table 2 예상피로수명 N 의 산정

a_i	$\sigma_y=36\text{ksi}$		$\sigma_y=33\text{ksi}$	
	a_f	N	a_f	N
0.0075	0.0556	2.96×10^5	0.0492	2.78×10^5
0.0125	0.0556	2.36×10^5	0.0492	2.18×10^5
0.025	0.0556	1.30×10^5	0.0492	1.12×10^5
0.0375	0.0556	0.62×10^5	0.0492	0.44×10^5

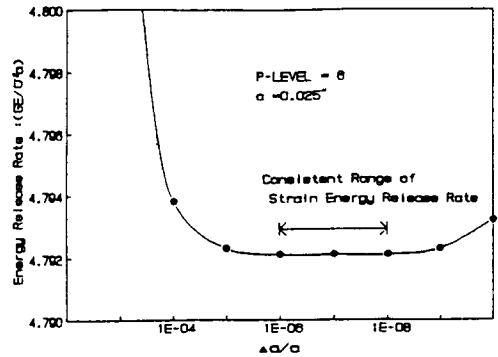


Fig.7 Sensitivity of G vs. Δa

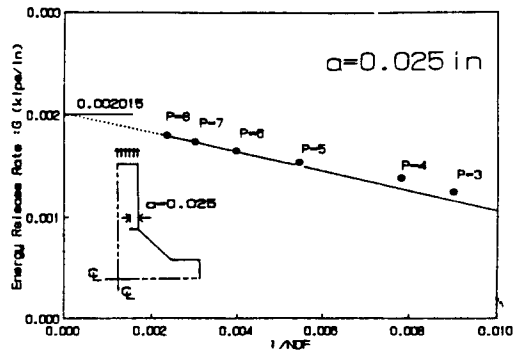


Fig.8 Extrapolate Value of Strain Energy Release Rate for $\alpha = 0.025$

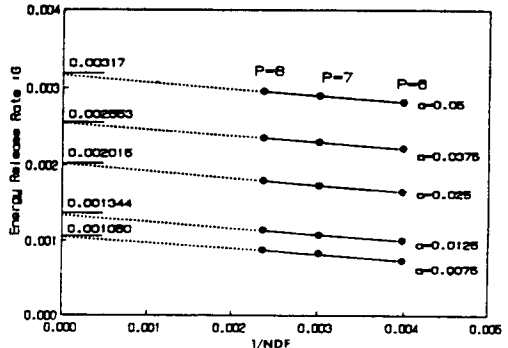


Fig.9 Values of Strain Energy Release Rate of Crack Sizes Ranging from 0.03t to 0.2t

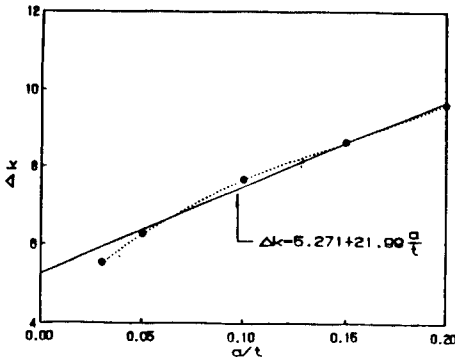


Fig.10 Relationship Between ΔK and a/t

5. 結 論

反復荷重을 받는 리벳연결부 및 용접부는 구조 설계자에게 항상 주의대상이 된다. 특히 응력집중에 기인하여 높은 應力준위에서 발생하는 피로균열과 피로 수명 N 은 ΔK 에 매우 큰 영향을 받는 관계로 균열이 진전됨에 따른 응력확대계수값의 정확한 계산이 요구된다. 이에 최근에 새로 제안되는 p-version 유한요소법을 사용하여 圓孔균열문제와 철도차량의 화물차량받침을 형성하는 T-joint부의 疲勞龜裂해석이 수행되었다. LEFM 해석에 근거한 응력확대계수값 계산은 假想균열확장방법이 사용되었으며 반복횟수 N 을 구하기 위해 Paris방정식이 이용되었다. 수치결과에서 보듯이 P-version 유한요소해석은 강한 선형성이 있는 관계로 점근구간(asymptotic range)에 있는 일련의 p-level이 p-2, p-1, p인 3개의 에너지값을 이용하여 실제에너지값(exact energy)을 구할 수 있기 때문에 이로부터 자유도가 무한대가 될 때의 응력확대계수값을 산정할 수 있어서 상대오차 1% 내외의 매우 높은 정확도를 보여 주었다. 그러므로, Fig.2에서 보듯이 피로수명 N 의 예측도 매우 높은 정확도를 갖게 한다. 그러나, 종래의 h-version 유한요소법으로는 Fig.4와 같이 외삽법을 사용한 한계값(Limit Value)을 구하기 위해서는 균등요소분할(uniform mesh refinement)을 해야 하는데 해석영역이 직사각형 또는, 정사각형 이외의 임의의 형상을 갖는 경우는 선형성(linearity)을 찾기가 불가능하다. 또한, 선형성이 있다고 하더라도 그 수렴성이 p-version 유한요소법에 비해 2배 가량 늦음을 알 수 있다. 반면에, p-

version 방법은 유한요소망을 고정시킨 후 형상함수의 次數를 단순증가 시킴에 따라 점근구간에 들면서 부터 강한 선형성을 보임을 Fig.8로 부터 알 수 있다. 이로 부터, 새로 제안되는 p-version 모델은 균열문제 및 피로균열해석에 종래의 h-version 유한요소법에 비해 수렴속도, 정확도 및 선형성에 기인한 장도가 무한대일 때의 한계값을 구할 수 있는 효율성등으로 훨씬 적합한 모델이라 할 수 있다.

감사의 글

이 논문은 1991년도 전남대학교 학술진흥재단 연구비에 의해 수행되었으므로 이에 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

- [1] P. Prezybylinski, S. Halcomb, Interim AAR Guidelines for Fatigue Analysis of Freight Cars, Technical Report R-245, Association of American Railroads, May 1977.
- [2] P.C. Paris, M.P. Gomez and W.E. Anderson, A Rational Analytic Theory of Fatigue, The Trend in Engineering, University of Washington, Vol.13, No.1, 1961.
- [3] V.E. Saouma, I.J. Zatz, An automated finite element procedure for fatigue crack propagation analysis, AIAA Journal, 1985.
- [4] B.A. Szabo, P.K. Basu, Fatigue Life Computations in the Railroad Industry, Computational Methods in Ground Transportation Vehicles, The Winter Annual Meeting of ASME, Phoenix, Arizona, Nov.14-19, 1982.
- [5] D.M. Parks, A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors, Int. J. Fracture, Vol. 10, No.4, pp.487-502, Dec. 1974.
- [6] H. Tada, P. Paris, G.R. Irwin, The Stress Analysis of Cracks Handbook, Second Edition, Paris Production Inc., 1985.
- [7] J.M. Barsoum, S.T. Rolfe, Fracture & Fatigue Control in Structures, 2nd Ed., 1987.
- [8] T. Taniguchi, Crack propagation analysis in civil engineering structures, Computers & Structures, Vol.41, No.6, pp.1295-1303, 1991.

(접수일자 : 1992. 7. 13)