

## 막·케이블·트러스구조의 범용해석프로그램; McS

金 勝 德\*

### 1. 연구 방법

최근 세계를 향한 한국의 움직임이 매우 두드러지게 나타나고 있다. 그 중 몇가지의 대표적인 예로, 1988년의 서울 올림픽, 1993년의 대전 엑스포를 들 수 있다. 이들 세계적인 축제는, 대외적으로는 발전된 한국의 위상을 상징적으로 나타낼 뿐 아니라, 대내적으로는 정치, 경제, 사회, 문화 등 여러분야에서 우리 생활에 직접 또는 간접으로 영향을 끼치고 있다. 또 이들 축제는 건축적인 시각에서 보면 또 다른 면모를 나타내고 있다. 즉, 지금까지의 건축물과는 다른 구조형태를 지닌 특수 대공간 구조물의 출현이라 할 수 있다. 올림픽 공원의 체조 경기장을 비롯하여 한밭벌에 세워질 각종 전시장 건물들은, 우리의 경제발전과 비례하여 더욱 더 그 수요가 늘어날 특수 구조물의 좋은 예라 할 수 있다.

이러한 특수 대공간 구조물중에서도, 유연한 구조물의 일종인 막구조 및 케이블 구조의 비약적인 발전이 우리의 주목을 끌고 있다. 막구조, 케이블 구조, 또는 복합구조체로서의 케이블-막구조는 휨 강성이 매우 작은 재료인 막 및 케이블로 구성되어 있으므로, 초기 강성이 매우 약한 구조체이다. 그러므로 강성을 확보하기 위해서는 초기응력의 도입이 필수적이라 할 수 있다.

이러한 이유로, 막구조 및 케이블구조의 구조설

계는 다른 일반적인 구조설계와는 달리,

- 1) 초기응력 도입에 의한 형상결정해석
- 2) 응력-변형해석

의 2단계 해석이 필요하게 된다.

또, 강성이 매우 작으므로, 기하학적 비선형성을 고려한 비선형해석이 요구된다. 따라서 일반적으로 이용되고 있는 범용 구조해석 프로그램은 막구조 및 케이블구조의 해석에는 부적당하다.

이상의 배경으로, 저자가 東京大學 生産技術研究所의 博士研究員으로 재직 중, 1991년 10월에서 1992년 3월 사이에, 東京大學의 羊谷裕産 연구실과 成均館大學校의 權宅鎮 연구실의 공동 프로젝트의 일환으로, 막구조, 케이블구조 및 트러스구조로 구성된 복합구조체를 해석할 수 있는 범용 프로그램을 개발 하였다.

이 프로그램은 한국의 明進鍛造工業株式會社(대표:朴明現)와 일본의 T.I.S. & Partners(대표:今川憲英)의 후원으로 개발되었으며, McS(Membrane and Cable/Truss Structures의 약자)라 이름지워졌다.

### 2. 연구 내용

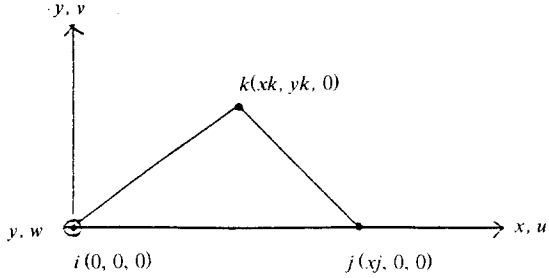
#### 2-1. 비선형 강성 방정식

McS에서는 막요소, 케이블요소 및 트러스요소가 준비되어 있으며, 이들 요소들은 독립해서 사용할 수도 있으며, 복합하여 사용할 수도 있다.

여기서는 기하학적 비선형성을 고려한 막요소

\* 정회원, Visiting Scholar, Purdue Univ., 공학박사

의 강성 방정식의 유도 과정을 설명한다. 케이블 요소 및 트러스요소의 비선형 강성 방정식도 같은 방법으로 구할 수 있으며, 여기서는 지면관계상 생략한다.



요소좌표계 :  $x, y, z$   
 요소내변위 :  $u(x, y), v(x, y), w(x, y)$

그림 1. 삼각형 막요소

그림 1의 삼각형 막요소에서  
 요소좌표계에서의 절점변위를,

$$\{d_x\} = \begin{Bmatrix} d_{xi} \\ d_{xj} \\ d_{xk} \end{Bmatrix}, \{d_y\} = \begin{Bmatrix} d_{yi} \\ d_{yj} \\ d_{yk} \end{Bmatrix}, \{d_z\} = \begin{Bmatrix} d_{zi} \\ d_{zj} \\ d_{zk} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

요소좌표계에서의 절점하중을,

$$\{f_x\} = \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{xj} \\ f_{xk} \end{Bmatrix}, \{f_y\} = \begin{Bmatrix} f_{yi} \\ f_{yj} \\ f_{yk} \end{Bmatrix}, \{f_z\} = \begin{Bmatrix} f_{zi} \\ f_{zj} \\ f_{zk} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

요소내의 임의의 점의 변위를  $x, y$ 의 1차 근사식으로 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x, y) &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \\ \omega(x, y) &= \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y \end{aligned} \quad (3)$$

계수  $\alpha_1 \sim \alpha_3$ 을 식 (1)의 절점좌표로 표현하면,

$$\begin{aligned} d_{xi} &= u(0, 0) = \alpha_1 \\ d_{xj} &= u(x_j, 0) = \alpha_1 + \alpha_2 x_j \\ d_{xk} &= u(x_k, y_k) = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \end{aligned} \quad (4)$$

윗식을 매트릭스로 나타내면,

$$\begin{Bmatrix} d_{xi} \\ d_{xj} \\ d_{xk} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_j & 0 \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

즉,  $\{d_x\} = [\Phi] \{\alpha\}$

같은 방법으로  $\{d_y\}, \{d_z\}$ 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\{d_y\} = [\Phi] \{\beta\} \quad (7)$$

$$\{d_z\} = [\Phi] \{\gamma\} \quad (8)$$

$[\Phi]$ 를 구하면,  $|\Phi| = x_j y_k$ 가 되고, 3각형  $ijk$ 의 면적( $Am$ )의 2배가 되는 것을 알 수 있다. 즉,

$$|\Phi| = 2Am = x_j y_k \quad (9)$$

$[\Phi]$ 의 역매트릭스를 Cramer공식을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$[\Phi]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{x_j} & \frac{1}{x_j} & 0 \\ \frac{x_k - x_i}{x_j y_k} & -\frac{x_k}{x_j y_k} & \frac{x_i}{x_j y_k} \end{bmatrix} \quad (10)$$

윗식을 다음과 같이 치환한다.

$$[\Phi]^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기서,

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ b_1 &= -\frac{1}{x_j}, b_2 = \frac{1}{x_j}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$C_1 = \frac{x_k - x_i}{x_j y_k}, C_2 = -\frac{x_k}{x_j y_k}, C_3 = \frac{x_i}{x_j y_k}$$

식(6)~식(8)로부터 계수  $\{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}$ 를 구하면 다

음과 같다.

$$\{\alpha\} = [\Phi]^{-1} \{d_x\} \quad (13)$$

$$\{\beta\} = [\Phi]^{-1} \{d_y\} \quad (14)$$

$$\{\gamma\} = [\Phi]^{-1} \{d_z\} \quad (15)$$

윗 식을 식(3)에 대입하면,

$$U = (x, y) = a_1 \cdot dx_i + (b_1 d_{xj} + b_2 d_{yj}) \cdot x \\ + (C_1 d_{xj} + C_2 d_{xj} + C_3 d_{xk}) \cdot y$$

$$V = (x, y) = a_1 \cdot dy_i + (b_1 d_{yi} + b_2 d_{yj}) \cdot x \\ + (C_1 d_{yi} + C_2 d_{yj} + C_3 d_{yk}) \cdot y$$

$$W = (x, y) = a_1 \cdot d_{zi} + (b_1 d_{zi} + b_2 d_{zj}) \cdot x \\ + (C_1 d_{zj} + C_2 d_{zj} + C_3 d_{zk}) \cdot y$$

변형도-변위관계식을 다음과 같이 비선형항을 포함한 식으로 채택한다.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \quad (17)$$

식(16)을 식(17)에 대입하고, 변형도를 절점변위로 표현하면,

$$\epsilon_x = b_1 d_{xi} + b_2 d_{xj} + \frac{1}{2} \left\{ (b_1 d_{xi} + b_2 d_{xj})^2 \right. \\ \left. + (b_1 d_{yi} + b_2 d_{yj})^2 + (b_1 d_{zi} + b_2 d_{zj})^2 \right\} \\ \epsilon_y = c_1 d_{yi} + C_2 d_{yj} + C_3 d_{yk} + \frac{1}{2} \left\{ (C_1 d_{xj} + C_2 d_{xj} + C_3 d_{xk})^2 \right. \\ \left. + (C_1 d_{yi} + C_2 d_{yj} + C_3 d_{yk})^2 + (C_1 d_{zi} + C_2 d_{zj} + C_3 d_{zk})^2 \right\} \\ \gamma_{xy} = (b_1 d_{yi} + b_2 d_{yj}) + (C_1 d_{xi} + C_2 d_{xj} + C_3 d_{xk}) \\ + \{(b_1 d_{xi} + b_2 d_{xj}) \cdot (C_1 d_{xi} + C_2 d_{xj} + C_3 d_{xk}) \\ + (b_1 d_{yj} + b_2 d_{zj}) \cdot (C_1 d_{yi} + C_2 d_{yj} + C_3 d_{yk}) \\ + (b_1 d_{zi} + b_2 d_{zj}) \cdot (C_1 d_{zi} + C_2 d_{zj} + C_3 d_{zk})\} \quad (18)$$

식(18)을 매트릭스로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & \vdots & b_2 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & \vdots & 0 & c_2 & 0 & \vdots & 0 & c_3 & 0 \\ c_1 & b_1 & 0 & \vdots & c_2 & b_2 & 0 & \vdots & c_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_k \end{Bmatrix} \\ + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & d^T & B^T & B & d \\ \frac{1}{2} & d^T & C^T & C & d \\ & d^T & B^T & C & d \end{Bmatrix} \quad (19)$$

여기서,

$$\{d_i\} = \begin{Bmatrix} d_{xi} \\ d_{yi} \\ d_{zi} \end{Bmatrix}, \{d_j\} = \begin{Bmatrix} d_{xj} \\ d_{yj} \\ d_{zj} \end{Bmatrix}, \{d_k\} = \begin{Bmatrix} d_{xk} \\ d_{yk} \\ d_{zk} \end{Bmatrix} \\ [B] = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & \vdots & b_2 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & \vdots & 0 & b_2 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & \vdots & 0 & 0 & b_2 & \vdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [C] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & \vdots & C_2 & 0 & 0 & \vdots & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & \vdots & 0 & C_2 & 0 & \vdots & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & \vdots & 0 & 0 & C_2 & \vdots & 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}$$

윗식을 간략히 표현하면,

$$\{\epsilon\} [A] \{d\} + \left[ \frac{1}{2} d^T B^T B d \quad \frac{1}{2} d^T C^T C d \quad d^T B^T C d \right]^T \quad (20)$$

여기서,

$$[A] = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix}, \{d\} = \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_k \end{Bmatrix}$$

중분구간에서의 응력-변형도 관계식을 다음과 같이 평면 응력형으로 채택한다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E_m}{1-V^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-V}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$\text{즉, } \{\sigma\} = [E] \{\epsilon\} \quad (22)$$

현재의 상태를 초기상태로 가정하고, 현상태에서의 증분에 관한 가상일을 고려하면, 다음과 같은 가상일의 방정식을 구할 수 있다.

$$\iiint_V [(\sigma_x^{(0)} + \sigma_x) \delta \epsilon_x + (\sigma_y^{(0)} + \sigma_y) \delta \epsilon_y + (\tau_{xy}^{(0)} + \tau_{xy}) \delta \gamma_{xy}] dV = (f^{(0)} + f)^T \delta d \quad (23)$$

여기서  $\sigma_x^{(0)}$ ,  $\sigma_y^{(0)}$ ,  $\tau_{xy}^{(0)}$ 는 초기응력이고,  $f^{(0)}$ 와 평형상태를 이루고 있다.

식 (19), (20)으로부터  $\delta \epsilon_x$ ,  $\delta \epsilon_y$ ,  $\delta \gamma_{xy}$ 를 구하면,

$$\begin{aligned} \delta \epsilon_x &= [A_1] \delta d + [d^T B^T B] \delta d \\ \delta \epsilon_y &= [A_2] \delta d + [d^T C^T C] \delta d \\ \delta \gamma_{xy} &= [A_3] \delta d + d^T [C^T B + B^T C] \delta d \end{aligned} \quad (24)$$

식(23)의 피적분함을  $\iiint_V dV = Amhm(Am; 3 \text{각형 요소의 면적, } hm; \text{두께})$ 로 한다.

식(24)를 식(23)에 대입하면,

$$\begin{aligned} Amhm[(\sigma_x^{(0)} + \sigma_x)([A_1] + [d^T B^T B]) + (\sigma_y^{(0)} + \sigma_y)([A_2] + [d^T C^T C]) + (\tau_{xy}^{(0)} + \tau_{xy})([A_3] + d^T [C^T B + B^T C])] \\ = (f^{(0)} + f)^T \end{aligned} \quad (25)$$

식 (22)에 식(20)을 대입하고, 그 결과를 다시 식 (25)에 대입하여,  $d$ 의 2차항을 생략하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} f^{(0)} + f &= A_m h_m (A^T \sigma^{(0)}) \\ &+ A_m h_m [\sigma_x^{(0)} B^T B + \sigma_y^{(0)} C^T C + \tau_{xy}^{(0)} B^T C + C^T B] d \\ &+ A_m h_m [A^T E A] d \end{aligned} \quad (26)$$

여기서,

$$\{\sigma^{(0)}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(0)} \\ \sigma_y^{(0)} \\ \tau_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix}$$

고차항의 생략, 수치해석의 오차등으로 인하여 불평형력(Residual force)이 발생한다. 이러한 불평형력을  $r$ 라고 하면, 식 (26)의 오른쪽 제1항부터

$$r = A_m h_m \cdot A^T \sigma^{(0)} - f^{(0)} \quad (27)$$

윗 식을 이용하여, 식 (26)의 증분방정식은 다음과

같이 된다.

$$f - r = [k_E + k_G] d \quad (28)$$

여기서,

$$\begin{aligned} k_E &= A_m h_m [A^T E A] \\ k_G &= A_m h_m [\sigma_x^{(0)} B^T B + \sigma_y^{(0)} C^T C + \tau_{xy}^{(0)} (B^T + C^T B)] \end{aligned} \quad (29)$$

윗 식의  $k_E$ ,  $k_G$ 는 각각 증분구간에서의 강성 매트릭스 및 초기응력 매트릭스를 나타낸다.

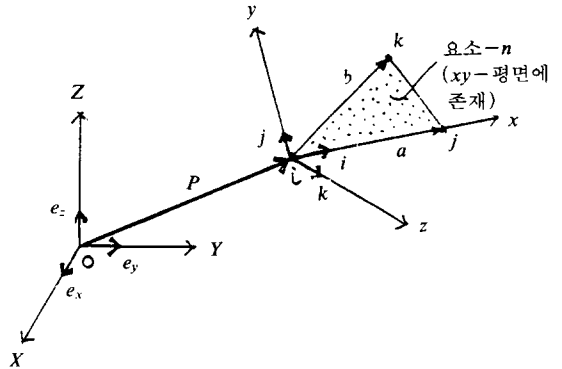


그림 2. 삼각형 요소의 좌표변환

다음은 그림 2를 이용하여 좌표변환 매트릭스를 구해본다.

전체 좌표계를 X, Y, Z 요소좌표계를 x, y, z이라 하고, 위의 그림과 같이 각 좌표계에서의 단위 벡터를 생각한다. 전체좌표계에서의 절점 i, j, k의 절점 좌표를 다음과 같이 나타낸다.

$$X_i = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}, X_j = \begin{Bmatrix} X_j \\ Y_j \\ Z_j \end{Bmatrix}, X_k = \begin{Bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{Bmatrix} \quad (31)$$

$\vec{ij}$ ,  $\vec{ik}$  벡터를  $a$ ,  $b$ 로 하고, 식 (31)을 이용하면,

$$a = X_j - X_i, b = X_k - X_i \quad (32)$$

윗식을 이용하면,  $i, j, k$ 는 다음과 같다.

$$i = \frac{a \times b}{|a|}, k = \frac{a \times b}{|a \times b|}, j = k \times i \quad (33)$$

식 (32)를 이용하여,  $a, b, a \times b$  벡터를 다음과 같이 계산해 둔다.

$$a = (x_j - x_i)e_x + (y_j - y_i)e_y + (z_j - z_i)e_z \quad (34)$$

$$b = (x_k - x_i)e_x + (y_k - y_i)e_y + (z_k - z_i)e_z \quad (35)$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x_j - x_i & y_j - y_i & z_j - z_i \\ x_k - x_i & y_k - y_i & z_k - z_i \end{vmatrix} = \Delta_x e_x + \Delta_y e_y + \Delta_z e_z \quad (36)$$

여기서,

$$\Delta_x = (Y_j - Y_i)(Z_k - Z_i) - (Y_k - Y_i)(Z_j - Z_i)$$

$$\Delta_y = (Z_i - Z_i)(X_k - X_i) - (Z_k - Z_i)(X_j - X_i)$$

$$\Delta_z = (X_j - X_i)(Y_k - Y_i) - (X_k - X_i)(Y_j - Y_i)$$

계산을 간단히 표현하기 위해, 다음과 같은 기호를 도입한다.

$$l_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} \quad (37)$$

식(34)~ 식(37)을 이용하면, 식(33)은 다음과 같이 된다.

$$i = \frac{1}{l_{ij}}(X_j - X_i) = \lambda_x e_x + \lambda_y e_y + \lambda_z e_z \quad (38)$$

$$R = \frac{1}{\Delta}(a \times b) = v_x e_x + v_y e_y + v_z e_z \quad (39)$$

$$j = R \times i = \mu_x e_x + \mu_y e_y + \mu_z e_z \quad (40)$$

매트릭스로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} i \\ j \\ R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ \mu_x & \mu_y & \mu_z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{Bmatrix} \quad (41)$$

여기서,

$$\lambda_x = \frac{X_j - X_i}{l_{ij}}, \lambda_y = \frac{Y_j - Y_i}{l_{ij}}, \lambda_z = \frac{Z_j - Z_i}{l_{ij}},$$

$$V_x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, V_y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, V_z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

$$\mu_x = \lambda_z - V_x - \lambda_y - V_z$$

$$\mu_y = \lambda_x - V_z - \lambda_z - V_x$$

$$\mu_z = \lambda_y - V_x - \lambda_x - V_y$$

간략히 표현하면,

$$\{\bar{i}\} = [T_n] \{\bar{e}\} \quad (42)$$

역관계를 구하면 다음과 같다.

$$\{\bar{e}\} = [T_n]^T \{\bar{i}\} \quad (43)$$

전체좌표계에서의 절점력, 불평형력, 절점변위를 다음과 같이 나타낸다.

$$F = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{Bmatrix}, F_{i(j \text{ or } k)} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}_{i(j \text{ or } k)} \quad (44)$$

$$R = \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \\ R_k \end{Bmatrix}, R_{i(j \text{ or } k)} = \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Bmatrix}_{i(j \text{ or } k)} \quad (45)$$

$$D = \begin{Bmatrix} D_i \\ D_j \\ D_k \end{Bmatrix}, D_{i(j \text{ or } k)} = \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix}_{i(j \text{ or } k)} \quad (46)$$

식 (42)를 이용하면

$$f = TF, r = TR, d = TD \quad (47)$$

여기서,

$$T = \begin{bmatrix} T_n & 0 & 0 \\ 0 & T_n & 0 \\ 0 & 0 & T_n \end{bmatrix}$$

$T$ 매트릭스가 박요소의 좌표변환 매트릭스이다. 식(47)을 식(28)에 대입하면

$$T = (F - R) = [k_E + k_G]TD \quad (48)$$

양변에  $T^T$ 을 곱하고,  $T^T T = I$ 관계를 이용하면,

$$F - R = T^T [k_E + k_G] TD$$

$$= [K_E + K_G] D \quad (49)$$

여기서,

$$K_E = T^T k^E T$$

$$K_G = T^T k^G T \quad (50)$$

이상으로 전체좌표계에서의 증분구간에 관한 전체 강성 매트릭스  $K_E$  및 전체 초기응력 매트릭스  $K_G$ 가 구해졌다.

다음은 요소좌표계에서의 절점좌표를 구해본다. 즉,  $x_i, x_j, x_k$ 를  $x_i, x_j, x_k$ 로 표현한다.

원점 0와 절점  $-i$ 를 연결하는 벡터를  $P$ 라고 하면,

$$P = X_i e_x + Y_i e_y + Z_i e_z = x_i \quad (51)$$

따라서, 절점  $-j$ , 절점  $-k$ 에 관한 벡터와 다음과 같다.

$$X_j = P + x_j^i \quad X_k = P + x_k^i + y_{kj} \quad (52)$$

즉,

$$(X_j - X_i, Y_j - Y_i, Z_j - Z_i) \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{Bmatrix} = (x_j, 0, 0) \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} \quad (53)$$

$$(X_k - X_i, Y_k - Y_i, Z_k - Z_i) \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{Bmatrix} = (x_k, y_k, 0) \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} \quad (54)$$

윗 식에 식(43)을 대입하면 다음과 같다.

$$(X_j - X_i)^T T_n^T = (x_j, 0, 0) \quad (55)$$

$$(X_k - X_i)^T T_n^T = (x_k, y_k, 0) \quad (56)$$

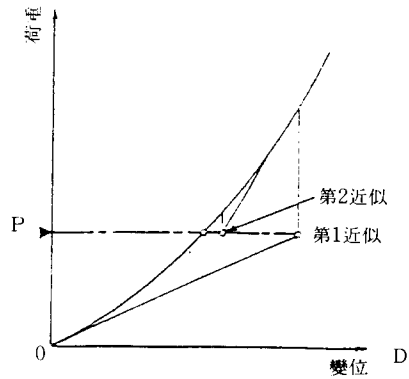
이상으로 요소좌표계에서의 절점좌표  $x_j, x_k, y_k$ 가 구해졌다.

### 2-2 수치해석법

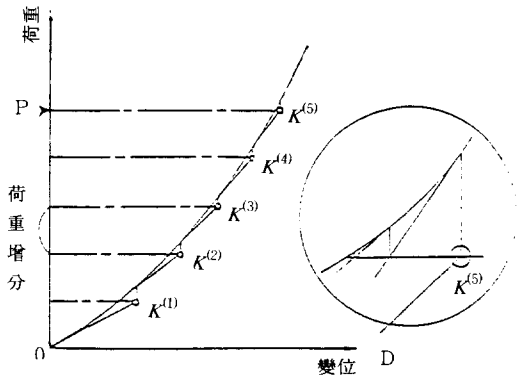
막 및 케이블 구조의 해석에서는 해의 수렴성 향상이 매우 중요한 문제이고, 아직도 많은 연구자들에 의하여 이러한 문제를 해결하기 위하여 많은 연구가 진전되고 있다.

McS에서는 수렴성 향상을 위하여, 그림 3에서와 같이 Newton-Raphson법과 수정하중증분법을 혼용하고 있다. 즉,

- 1) 형상 결정 해석; Newton-Raphson법
- 2) 응력-변형 해석; 수정하중 증분법  
Newton-Raphson법



(a) Newton-Raphson법



(b) 수정하중증분법

그림 3. Newton-Raphson법 및 수정하중 증분법

### 2-3 Wrinkling의 처리

막 및 케이블구조의 해석의 특징으로, 다른 일반적인 구조해석에서는 다루지 않는 Wrinkling 처리가 있다. 즉, 막 및 케이블의 표면에 주름이 잡히

지 않게 만들어야 하고, 이를 해석상에서 어떻게 처리할 것인가는 매우 중요한 과제이다.

McS에서는 다음과 같이 Wrinkling처리를 한다.

먼저 해석결과로부터 얻은 응력( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ )을 이용하여 다음과 같이 주응력( $\sigma_1 > \sigma_2$ )을 구한다.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

윗 식을 Mohr's circle로 나타내면 그림 4와 같다.

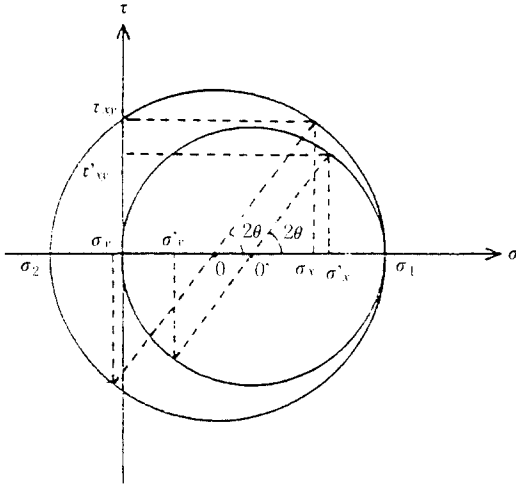


그림 4. Mohr's Circle

주응력이 '-'인 경우, 즉 wrinkling이 발생한 경우에는 다음과 같은 처리를 한다.

i)  $\sigma_2 < 0, \sigma_1 > 0$  인 경우;

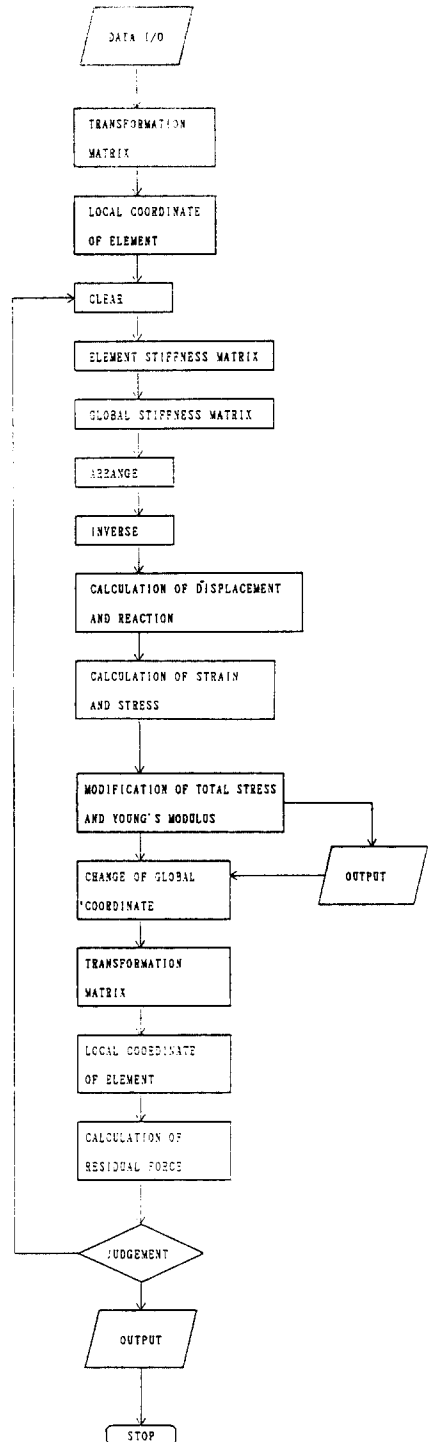
$\sigma_2 = 0$ 이 되도록 Mohr's circle을 그리고, 응력상태를 다음과 같이 수정한다.

$$\sigma_x' = \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_1}{2} \cos 2\theta \quad (57)$$

$$\sigma_y' = \frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_1}{2} \cos 2\theta \quad (58)$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\theta \quad (59)$$

표 1. Flow-Chart



이때 Young's modulus는 다음과 같이 수정한다.

$$E' = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2} E \quad (60)$$

ii)  $\sigma_1 \leq 0$ 인 경우;

$\sigma_1, \sigma_2$ 가 모두 '-'이므로, 다음과 같이 수정한다.

$$\sigma_x' = \sigma_y' = \tau_{xy}' = 0 \quad (61)$$

$$E' = 0 \quad (62)$$

### 3. 맺음말

우리의 경제발전과 함께, 막구조 및 케이블구조를 이용한 특수 대공간 구조물이 더욱 더 늘어날 전망이며, 이들 구조물의 구조해석은 일반적인 범용 구조해석 프로그램으로는 해석이 불가능하다. 즉, 대부분의 범용 구조해석 프로그램이 초기강성을 가진 구조물을 해석할 수 있는데 반해, 막구조 및 케이블 구조는 초기강성이 매우 약한 구조체이

므로, 초기 불안정현상을 나타내고, 따라서 해석이 불가능하게 된다.

이러한 구조적 특징을 가진 막구조 및 케이블구조를 해석하기 위하여, 막, 케이블 및 트러스요소로 구성된 복합구조체를 해석할 수 있는 범용 구조해석 프로그램인 McS(Membrane and Cable / Truss Structures)가 개발되었으며, 그 Flow-chart는 표1에서와 같다.

McS는 현재, 한국에서는 成均館大學校 자연과학캠퍼스의 VAX-11, 1明進鍛造工業株式會社の SUN 워커스테이션에서 작동중이며, 일본에서는 東京大學 生産技術研究所의 M-380 및 T.I.S. & Partners의 IBM 워커스테이션에서 작동중에 있다.

McS는 보다 많은 이용자들로부터 사랑을 받기 위해서는, 보다 넓은 응용 범위, 보다 간편한 접근 방법 등을 추구하고 계속 개발되고, 보완될 것이다.

끝으로 McS의 탄생을 위하여 도움주신 모든분들께 감사드리며, 이만 맺는다.