

# 각스펙트럼 영역에서 모멘트 방법을 이용한 역산란 방법 (Inverse scattering method using the moment method in the angular spectral domain)

이 경 수\*, 김 세 윤\*\*, 나 정 웅\*

(Kyeong Soo Lee, Se Yun Kim, Jung Woong Ra)

## 요 약

본 논문에서는 공간 영역 및 파수 영역의 모멘트 방법을 이용한 역산란 방법을 산란체의 중심에서 일정한 거리의 원주상에서 측정된 산란 전자파를 푸리에 급수로 전개한 각스펙트럼 영역의 역산란 방법으로 확장 적용하여 미지의 산란체에 대한 유전율 분포를 재구성해 보였다. 수치계산에 의해 각스펙트럼 영역의 역산란 방법이 기존의 공간 영역의 역산란 방법에 비해 잡음의 영향에 대해 유리한 방법임을 보였다.

## ABSTRACT

In this paper, A spectral inversion scheme in cylindrical coordinates, applying the moment method procedure is suggested to reconstruct permittivity profiles of inhomogeneous dielectric objects. Angular spectral domain reconstruction is shown to be less sensitive to the ill-posedness due to the noise in the scattered field than the configuration reconstruction

## I. 서 론

전자파의 역산란이란 미지의 물체에 특성을 아는 입사파를 입사시켜 물체에 의해 직진, 반사, 굴절 및 회절을 일으키면서 발생하는 산란 전자파를 측정하여 얻은 정보로부터 미지의 물체의 물리적인 성질인 유전율, 투자율, 도전율 및 반사계수 분포등을 알고

자 하는 문제로 정의할 수 있다. 이러한 역산란 문제의 대표적인 응용 분야는 재료의 비파괴적인 연구, 지하 자원 탐사[1], 원격 탐사[2], 의료 진단용 촬영 기술[3] 및 레이더에 의한 목표물의 탐지[4] 등이 있다.

현재 가장 널리 역산란 방법들은 크게 다음의 두가지의 부류로 구분하여 볼 수 있다.

첫번째의 부류들은 산란체의 내부의 전자파를 송신 신호원에 의해 이미 알고 있는 양으로 근사하여, 근본적으로 비선형인 산란 적분 방정식을 선형으로

\*한국과학기술원 전기및 전자공학과  
\*\*한국과학기술연구원

근사하여 해를 구하는 이른바, 근사 방법(approximation method)들이다. 이러한 방법은 넓은 의미로는 지표면에서의 다중 산란을 무시한 레이다 영상, 망속등에서 전자파의 선형 전파(linear propagation)을 가정한 geophysical tomography, 입사 전자파의 파장이 매우 작아서 물체의 격자 구조보다 적을 경우에 물체의 내부에서의 전파 특성을 감쇄 및 직진으로 근사해도 잘 맞는 X-ray를 사용한 computerized tomography[5]등을 포함 한다. 마이크로웨이브 및 초음파등에서는 wave의 파장이 산란체에 의한 회절 현상이 주로 나타나는 정도의 크기이고 이때는 산란체 내부의 전자파를 입사 전자파로 근사한 Born근사[7], 산란체 내부의 복소 위상 변화를 입사파의 위상 변화로 근사한 Rytov근사[6]등에 기초하고 푸리에 회절 투영 이론을 사용한 diffraction tomography방법[7]을 많이 사용한다. Diffraction tomography방법은 신호 처리시에 푸리에 변환 관계에 의해 빠른 FFT알고리즘을 이용하여 거의 실시간의 역산란을 할 수 있고, 역산란식의 미지수가 산란체의 유전율 및 투자율들의 함수로 표현되므로 입사파의 주파수 및 입사 방향을 바꾸면서 측정된 전자파에 대해 동일한 미지수의 식으로 표현되므로 입사파의 주파수 및 입사 방향을 바꾸면서 측정된 많은 정보를 이용할 수 있어, 잡음의 영향에 강한 장점이 있는 반면, 근본적으로 근사식에서 출발한 관계로 근사가 잘 맞는 경우, 즉 미소 산란체의 경우에 한해서 의미있는 역산란 결과를 주는 제약 조건이 따른다[8].

두번째의 부류들은 수치 계산에 의해 Helmholtz wave equation을 직접 풀어서 산란체 내부의 등가 유기전원을 근사하지 않고 직접 구하고자 하는 이른바 역전원 문제(inverse source problem)[9]로 전환한 방법들이다. 본 논문에서는 이러한 역전원 문제로의 역산란 방법의 일종인 모멘트 방법을 적용한 역산란에 대해서 다루었다.

최근 컴퓨터의 급속한 발전에 힘입어 해석적인 해가 풀려지지 않은 구조의 산란체에 대한 전자파 문제도 수치 해석적인 방법으로 많이 푸는데, moment method를 이용하여 2차원의 유전체 구조에 의한 산란파를 계산하는 방법이 Richmond에 의해 소개된 이후[10] 3차원의 유전체 문제에도 확장 적용되고 있다[11]. 이러한Richmond의 방법을 역으로 적용하여 산란된 전자파로부터 임의의 물체에 대한 유전율의 분포를 계산하는 방법이 과기원에서 계산되었고[18]

[19], 이와는 독립적으로 Utah대학 에서도 개발 되었다[13]. 본 과기원 연구진과 공동연구를 수행하던 S.A.Johnson등에 의해서 유전율의 분포 수치 계산 시에 기저함수를 pulse대신에 sinc함수 형태로 취하여 계산하는 방법이 제안되었다[14]. 또한 이탈리아의 Caorsi등에 의해서 동일한 방법이 소개되었으며, 실험을 통하여 재현된 영상에 대한 논문이 발표된 예도 있다[15][16].

이러한 접근 방법들은 2차원의 산란체에 산란체 내부에서의 전계를 입사전계등으로 근사하지 않고 산란체 내부에 생성되는 등가 유기 전원의 분포를 직접 구해내는 것으로서 유전율의 값이 큰 산란체에 대해서도 고분해능의 역산란을 행할 수 있는 장점이 있는 반면 잡음의 영향에 약한 단점이 있다. 산란체의 유기전원은 주변의 매질과 산란체와의 유전율 및 투자율의 차이와 그 지점에서의 전자파 세기와의 곱으로 표현되므로, 역전원의 문제에서는 입사파의 입사 방향이나 주파수를 바꿀 경우에는 유기 전원의 분포가 다른 문제가 되므로 입사파의 입사 방향이나 주파수를 바꾼 산란 정보를 이용하기가 어려운 문제가 있다. 이 방법은 입사 전자파가 고정되어야 한다는 점에서 diffraction tomography방법에 비해 입사 방향 및 주파수에 대한 산란 정보를 역산란의 입력으로 쓸 수 없으므로 역산란 입력 데이터에 포함된 산란체의 정보가 훨씬 부족할 뿐만 아니라 일반적으로 유기 전류원의 변화가 유전율 분포의 변화에 비해 심하므로 더욱더 고 분해능의 역산란을 행해야하는 문제등으로 인하여 근본적으로 잡음에 약한 ill-posedness의 특성이 나타나는 단점이 있어 비교적 큰 산란체에 대해서는 역산란이 매우 힘들다[12].

이러한 어려움을 개선하고 역산란의 물리적인 메카니즘을 알아보기 위한 방안으로 모멘트 방법을 공간 영역에서 파수 영역으로 바꾸어 적용하면, 산란파의 측정위치, basis의 종류, 소영역의 크기 및 위치등의 영향이 서로 분리되어, 이들 각각이 역산란 계산 과정에 미치는 영향을 살펴 보기가 용이하다. 즉, 파수 영역에서는 등가 유기 전류와 산란파 간의 상호 관계를 나타내는 Green함수가 간단한 지수 함수로 표현되며 이 때 Green 함수의 역할이 마치 필터와 같게 되어 산란파에 더해지는 잡음이 재구성된 등가 유기 전류에 미치는 영향을 잘 기술할 수 있다[20][21]. Moment method를 파수 영역에서 적용한 결과, 산란 전자파에 미약한 잡음이 들어가도 재구성된

비유전율의 분포에 큰 영향을 주는 ill-posedness의 물리적인 원인은, 파장보다 적게 나눈 소영역으로 인하여 역산란의 입력으로 evanescent mode를 쓰지 않을 수 없는데, 이 evanescent mode가 측정시에 지수 함수적으로 감쇄되어 있으므로, 여기에 들어간 잡음이 역산란시에 지수함수적으로 증폭 되는 것으로 설명할 수 있다[17].

산란 전자파를 측정하여 산란파의 파수를 구하기 위해서는 무한 직선상에서 측정한 산란 전자파를 적분 해야 하므로 이론적으로는 무한직선상의 측정 데이터가 필요하다. Nyquist sampling이론에 의하여 산란 파수 대역폭  $10k_0$  정도를 얻기 위해서는 최소한  $0.1\lambda$ 이하의 간격으로 산란파를 측정해야 하는데, 실제로 파수 영역의 역산란을 행하려 할 경우 이러한 간격으로 산란체의 산란 전자파의 세기가 줄어 드는 거리 까지 측정하기 위해서는 측정해야 할 데이터가 굉장히 많게 된다. 또한 산란 전자파의 순방향 산란파나 역방향 산란파 중에서 하나의 경우에 대해서만 스펙트럼 전개가 가능한 관계로 인해 파수 영역의 역산란 방법은 산란체의 산란 데이터를 완전히 이용할 수 없는등의 단점이 있다. 이러한 단점을 보완하고 파수 영역의 역산란 방법의 장점을 살리기 위하여 본 논문에서는 산란체의 주위를 둘러싼 원주상에서 측정한 산란 전자파를 각도 방향의 스펙트럼으로 전개한 새로운 파수 영역의 역산란 방법을 제안하고 수치 계산에 의해 그 특성을 조사하여 보았다.

## II. 산란 전자파의 각스펙트럼 표현식

그림(1)과 같이 2차원의 원통형 유전체에 평면파가 입사할 경우 산란체의 주위에서 측정한 산란 전자파로부터 역산란 관계식을 유도하기 위해 2차원의 전자파의 산란 문제에 대해서 살펴 본다. 원통 좌표계에 대한 산란 적분식을 쓰면 다음과 같다.

$$u(\vec{\rho}) = u^i(\vec{\rho}) + u^s(\vec{\rho}) \quad (1)$$

$$u^s(\vec{\rho}) = -k_0^2 \iint_S d\vec{\rho}' p(\vec{\rho}') G(\vec{\rho}, \vec{\rho}'; k_0) \quad (2)$$

식(2)에서  $p(\vec{\rho}')$ 은 앞에서와 마찬가지로 유전체의 내부에서 유기된 등가 전류이다.

$$p(\vec{\rho}') = [\epsilon(\vec{\rho}') - 1]u(\vec{\rho}') \quad (3)$$

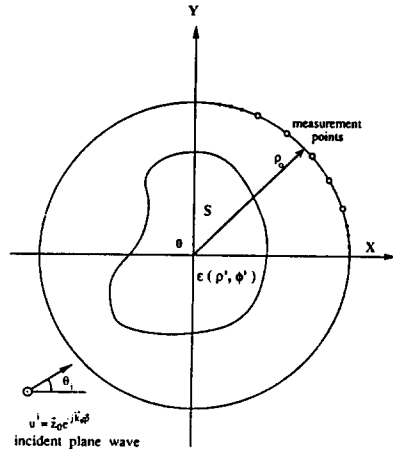


그림 1. 각스펙트럼 영역의 역산란 구조

2차원 자유공간 상의 Green 함수를 원통 좌표계에서 쓰면 다음과 같다.

$$G(\vec{\rho}, \vec{\rho}'; k_0) = \frac{-j}{4} H_0^{(2)}(\sqrt{k_0 |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|}) \quad (4)$$

식(4)의 자유공간 상의 2차원 Green 함수를 Hankel 함수의 addition theorem을  $\vec{\rho}, \vec{\rho}'$  벡터에 적용하면 다음과 같이  $\phi$ 에 대한 급수 형태로 전개된다.

$$\begin{aligned} G(\vec{\rho}, \vec{\rho}'; k_0) &= \frac{-j}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(k_0 \rho) J_n(k_0 \rho') e^{jn(\phi - \phi')}, \rho > \rho' \\ &= \frac{-j}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_3^{(2)}(k_0 \rho') J_n(k_0 \rho) e^{jn(\phi - \phi')}, \rho' > \rho \end{aligned} \quad (5)$$

이것은 2차원 Green 함수를 변수  $\phi$ 에 대하여 푸리에 급수로 전개한 표현식이다. 여기서  $n$ 은 각스펙트럼 영역의 푸리에 급수의 변수를 의미하고, 역산란의 입력 자료로 쓰이는 산란 전자파의 측정은 항상 산란체의 외부에 있는 경우이므로 앞으로는  $\rho > \rho'$  인 윗식을 사용하기로 한다.

식(2)의 적분 방정식에 식(5)로 표현된 Green 함수를 대치하여 정리하면, 식(2)은 원통 좌표계의 적분식으로 다음과 같이 표현된다.

$$u^s(\rho, \phi) = -\frac{jk_0^2}{4} \iint_S p(\rho', \phi') \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} j_n(k_0 \rho') \right]$$

$$\times H_n^{(2)}(k_0, \rho) e^{jm(\phi - \phi')} ] \rho' d\rho' d\phi', \rho > \rho' \quad (6)$$

산란 전자파를 각도  $\phi$ 에 대해서 푸리에 급수로 전개한 표현식은

$$u^s(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U^n(\rho; n) e^{jn\phi}. \quad (7)$$

여기서  $U^n(\rho, n)$ 은 원통 좌표계에서  $\rho$ 인 지점의 산란 전자파를 각도  $\phi$ 에 대해 푸리에 급수로 전개했을 때,  $n$ -th order의 각스펙트럼을 나타낸다. 식(6)와 (7)에서 각스펙트럼 영역에서의 전자파의 산란식을 쓰면 다음과 같다.

$$U^n(\rho, n) = -\frac{jk_0^2}{4} H_n^{(2)}(k_0\rho) \iint_S p(\rho', \phi') j_n(k_0\rho') e^{-jn\phi'} \rho' d\rho' d\phi' \quad (8)$$

여기서  $J_n$ 은  $n$ 차의 Bessel 함수를 나타내고,  $H_n^{(2)}$ 는  $n$ 차의 제 2종 Hankel 함수를 나타낸다.

식 (8)은 유기 전류원  $p(\rho', \phi')$ 이 원점으로부터 거리  $\rho$ 인 원주상의 산란 전자파의  $n$ 번째 각스펙트럼에 미치는 영향을 나타낸다. 위 식은 전원점의 영향과 관측점의 영향이 분리된 형태로 전자파의 산란 메커니즘을 잘 표현하고 있다. 즉, 식 (8)에서  $n$ 번째의 Hankel 함수가 나타내는 것은 산란 전자파의  $n$ 번째 각스펙트럼이 원통 좌표계의  $\rho$ 축상으로의 전파 특성을 나타내고, 적분항 내부의 Bessel 함수와 지수의 위상항은 전원점의 분포가 각스펙트럼에 미치는 영향을 표현하고 있다.

### III. 각스펙트럼을 이용한 역산란 방법

식 (8)의 적분 방정식을 직접 해석적인 방법으로 풀기는 어려우므로, 모멘트 방법을 써서 선형 방정식으로 표현한다. 유전체의 단면  $S$ 를  $M$ 개의 소영역 (cell)으로 잘게 나누어서,  $m$ 번째의 소영역  $S_m$ 의 한 변의 길이가 파장  $\lambda$ 에 비해서 훨씬 작은 2d인 정사각형으로 취하면, 이 소영역 내에서의 전계 분포  $u$ 와 비유전율 분포  $\epsilon_r$ 은 중심점  $(\rho_m, \phi_m)$ 에서의 전계  $u_m$ 과 비유전율  $\epsilon_m$ 으로 근사화시킬 수 있다.

$$u(\rho, \phi) \cong u(\rho_m, \phi_m) = u_m S_m \quad (9)$$

각스펙트럼 영역에서 모멘트 방법을 이용한 역산란 방법

$$\epsilon_r(\rho, \phi) \cong \epsilon_r(\rho_m, \phi_m) = \epsilon_m S_m \quad (10)$$

따라서 소영역  $S_m$ 에서의 유기전류  $p(\rho, \phi)$ 는 다음과 같이 근사시킬 수 있다.

$$p(\rho, \phi) \cong p(\rho_m, \phi_m) = p_m = (\epsilon_m - 1)u_m S_m \quad (11)$$

식 (11)을 (8)에 대입하여 정리하면 산란 전자파의 각스펙트럼은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$U^n(\rho, n) = -\frac{jk_0^2}{4} H_n^{(2)}(k_0\rho) \sum_{m=1}^M p_m \iint_{S_m} J_n(k_0\rho') e^{-jn\phi'} \rho' d\rho' d\phi' \quad (12)$$

식 (12)의 적분을 해석적으로 하기는 어려우므로 수치 계산에 의해 정확하게 할 수도 있으나, 적분영역  $S_m$ 을 동일한 중심과 면적을 갖는 원  $S'_m$ 으로 근사화시켜 해석적인 적분을 해도 큰 오차가 없다.

식 (12)에서 적분항만 쓰면,

$$I = \iint_{S_m} J_n(k_0\rho') e^{-jn\phi'} \rho' d\rho' d\phi' \quad (13)$$

위의 적분을 수행하기 위해서는 Bessel 함수의 integral theorem을 이용한다. Bessel 함수의 integral theorem중에서 Graf의 정리를 쓰면 다음과 같다.

$$B_\nu(w) \frac{\sin v\chi}{\cos v\chi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{\nu+k}(u) J_k(v) \frac{\sin k\alpha}{\cos k\alpha}, \quad (|ve^{\pm i\alpha}| < |u|) \quad (14)$$

위 식에서  $B$ 는 Bessel, Noimamn, Hankel등의 함수를 나타내고, 각각의 변수들 사이에는 다음의 관계식과 괄호 안의 조건을 만족해야 한다.

$$w = \sqrt{(u^2 + v^2 - 2uv \cos \alpha)} \quad (15)$$

$$u - v \cos \alpha = w \cos \chi \quad (16)$$

$$v \sin \alpha = w \sin \chi \quad (17)$$

이러한 관계를 도식적으로 나타내면 그림 (2)와 같이 된다. 또, 괄호안의 조건은 소영역의 중심이 원점에서부터 소영역의 반경 이상 떨어진 경우에는 항상 만족한다.

식 (14)을 지수 함수에 대해 쓰고, 그림 (2)에서 각각의 대응되는 변수를 넣어 본 적분식에서 적용하면 다음 식으로 된다.

$$J_n(k_0\rho')e^{-jn\phi'} = e^{-jn\phi_m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n+k}(k_0\rho_m)J_k(k_0\rho'')e^{-jk(\pi+\phi_m-\phi'')} \quad (18)$$

식 (18)을 식 (13)에 대입하고  $\rho'$  및  $\phi'$ 에 관한 적분을 변수  $\rho''$ ,  $\phi''$  좌표에서 중심이 원점이고 반경이  $a$ 인 영역에 대한 적분으로 다음과 같이 된다.

$$I = e^{-jn\phi_m} \int_0^{2\pi} \int_0^a \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n+k}(k_0\rho_m) J_k(k_0\rho'') e^{jk(\phi''-\pi-\phi_m)} \rho'' d\rho'' d\phi'' \quad (19)$$

식 (19)에서  $\phi''$ 에 관한 적분 함수는  $e^{jk\phi''}$ 로써  $k$ 가 정수인 경우 이므로 각도  $0-2\pi$ 구간에서 모든 다른  $k$ 의 함수가 서로 직교 함수로 된다. 따라서, 식 (19)의 적분을  $\phi''$ 에 대해서 먼저 하면,  $k \neq 0$ 인 모든 경우에 대한 적분이 영으로 되고 다만  $k=0$ 인 경우에 대해서만 지수 함수의 적분은  $2\pi$ 로 되어 이적분의 수행 결과는 다음과 같이 된다.

$$I = 2\pi e^{-ik_0\phi_m} J_n(k_0\rho_m) \int_0^a J_0(k_0\rho'') \rho'' d\rho'' \quad (20)$$

Bessel 함수의 적분 table에 의하면 0에서 제한된 구간까지의 0차의 Bessel 함수의 적분은 1차의 Bessel 함수로 표현된다. Bessel 함수의 적분 table을 이용하여 위의 적분 변수  $k_0\rho''$ 을  $X$ 로 치환하면,

$$I = \frac{2\pi e^{-jk_0\phi_m}}{k_0^2} J_n(k_0\rho_m) \int_0^a J_0(X) X dX \quad (21)$$

Bessel 함수의 적분 table에서  $J_0(X)/X$ 의 구간  $[0-k_0 a]$ 에서의 적분을 행한 결과는 다음과 같다.

$$I = \frac{2\pi a e^{-jn\phi_m}}{k_0} J_n(k_0\rho_m) J_1(k_0 a) \quad (22)$$

위 식을 식 (12)에 대입하면 다음과 같은 선형 방정식이 얻어진다.

$$U^s(\rho, n) = -\frac{j\pi k_0 a m}{2} H_n^{(2)}(k_0\rho) \sum_{m=1}^M \rho_m J_1(k_0 a m) e^{-jn\phi_m} \quad (23)$$

역산란 과정은 산란체의 중심에서  $\rho$  만큼 떨어진 원주상에서 측정된  $M$ 개 이상의 각스펙트럼을 이용하여 위의 선형방정식을 풀어서 산란체 내부의  $M$ 개의 유기 전류원  $p_m$ 을 구하고, 이 유기전류원에 의해 산란체 내부의 전체 전계를 그린함수 및 입사파로부터 계산한다. 마지막으로 소영역 내에서의 유전율값을 다음의 관계식으로 구한다.

$$\epsilon_m = \frac{p_m}{u_m} + 1 \quad (24)$$

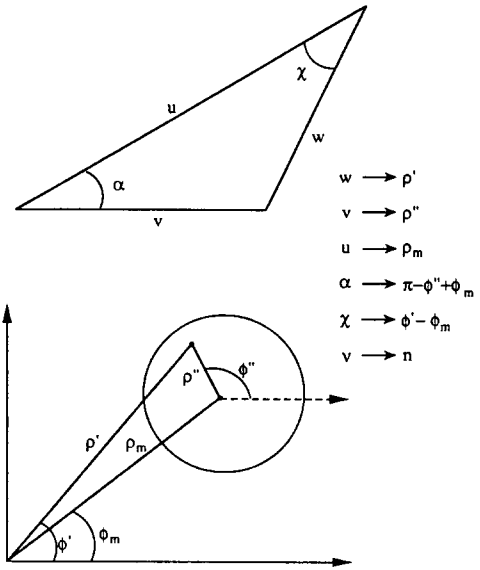


그림 2. 소영역의 분을 위한 Graf정리의 적용

#### IV. 각스펙트럼 역산란의 특징

모멘트 방법을 적용하여 산란 전자과의 각스펙트럼을 이용한 2차원 유전체에 대한 역산란을 행하는 경우 앞에서와 앞의 일차적으로 산란체의 내부에 유기된 등가 유기 전류를 구하는 역전원 문제(inverse source problem)로 볼 수 있다. 각스펙트럼 영역의 역산란식을 통하여 역전원 문제의 특징을 알기 위해서는 등가 유기 전류원의 분포가 역산란의 입력 자료에 미치는 영향을 살펴 보는 것이 중요하다.

소영역의 중심이  $(\rho', \phi')$ 이고, 이 소영역을 동일한 면적과 중심을 가지는 원형 등가 소영역으로 근사했을 때, 근사한 원형 소영역의 반경이  $a$ 이며, 이 소영

역 내에는 일정한 등가 유리 전류 분포  $p$ 가 있을 때, 측정 반경  $\rho$ 에서의 각스펙트럼은 식 (23)에 의해 다음과 같이 된다.

$$U^s(\rho, n) = -\frac{j\pi k_0 a p}{2} J_1(k_0 a) H_n^{(2)}(k_0 \rho) J_n(k_0 \rho') e^{-jn\phi'} \quad (25)$$

식 (25)을 다음의 세 부분으로 나누어 고찰해 보자.

$$C(p, a) = -\frac{j\pi k_0 a p}{2} J_1(k_0 a) \quad (26)$$

$$W(\rho, n) = H_n^{(2)}(k_0 \rho) \quad (27)$$

$$G(\rho', \phi'; n) = J_n(k_0 \rho') e^{-jn\phi'} \quad (28)$$

식 (26)의  $C(p, a)$ 는 소영역내에서 일정한 등가 유리 전류의 값 및 소영역의 크기에 대한 함수이다. 따라서 소영역의 크기가 일정하고 유리 전류의 값이 단위 전류일 경우에는 상수로 된다.

식 (27)의  $W(\rho, n)$ 은 산란 전자파의 측정 위치에 대한 함수로 각각의 각스펙트럼의  $\rho$ 방향의 전파 특성을 나타낸다.  $n$ 차의 각스펙트럼의 전파 특성은  $n$ 차의 Hankel함수가 되는 것을 볼 수 있다.

식 (28)의  $G(\rho', \phi'; n)$ 은 소영역의 위치에 따른 각각의 각스펙트럼의 진폭 및 위상 특성을 나타낸 식이다.

각스펙트럼의 전파 특성  $W(\rho, n)$ 을 살펴 보면, 각스펙트럼의  $\rho$ 방향의 전파 특성은 Hankel함수로, 전파 특성에 의해서는 특별히 전파 모드와 감쇄 모드로 구분되어 나타나지 않음을 알 수 있다. 이것은 모든 각스펙트럼들이 진폭 및 위상이 다르게 변화되면서 전파됨을 의미한다.

이들을 살펴보면 원점 부근에서는 고차의 스펙트럼이 저차의 스펙트럼들에 비하여 훨씬 빨리 감쇄하지만 원점에서 먼 원거리 영역에서는 대부분의 각스펙트럼들은  $1/\sqrt{\rho}$ 로 감쇄하는 특성을 가지는 것을 Hankel 함수의 asymptotic expression으로부터 예상할 수 있다.

$$H_n^{(2)}(k_0 \rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 \rho}} e^{-j(k_0 \rho - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi)} \quad k_0 \rho \gg n \quad (29)$$

식 (28)의  $G(\rho', \phi'; n)$ 은 소영역의 위치에 의해 결정

되는 각스펙트럼의 진폭 및 위상 특성을 나타낸다. 각스펙트럼을 측정하여 하나의 소영역의 위치를 알고자 하는 문제를 생각하면 소영역의 위치 정보중에서  $\rho'$  방향의 위치는 각스펙트럼의 진폭 패턴에,  $\phi'$  방향의 위치는 각스펙트럼의 위상 패턴에 포함되어 있음을 알 수 있다.

흥미 있는 것은 균일한 매질 속에 하나의 점 산란체가 있을 경우, 산란체의 위치에 따라서 각스펙트럼의 진폭 및 위상 패턴이 결정된다는 것을 알 수 있다. 따라서 하나의 점산란체에 대한 각스펙트럼을 측정하여 산란체의 위치를 찾을 경우 고려하는 각스펙트럼의 수에 의하여 일정한 오차 한계가 결정됨을 알 수 있다. 일정한 위치에 있는 점 산란체에 대한 각스펙트럼의 진폭 및 위상 특성을 측정하여 위의 각스펙트럼의 산란 패턴과의 autocorrelation에 의해 psf (point spread function)을 구할 수 있다. 따라서 균일한 매질속에 들어있는 몇개의 산란체의 위치를 구하는 문제에서, 고려하는 각스펙트럼의 수에 의한 psf를 구하여 psf와 측정된 각스펙트럼과의 convolution에 의하여 점산란체들의 위치를 구할 수 있음을 나타낸다.

역산란시에 산란체의 소영역의 갯수가  $M$ 개일 때, 구해야 할 미지수는  $M$ 개의 소영역의 유리 전류 값이다. 이를 구하기 위해서는 최소한  $M$ 개의 역산란 입력, 즉 각스펙트럼이 필요하다. 어떤 산란체로부터 일정한 거리에서 측정된 각스펙트럼을 얼마나 많은 숫자만큼 그 세기가 특별히 감쇄되지 않고 얻을 수 있는가 하는 것은 구해야 할 미지수 갯수 만큼의 선형 방정식을 세울 때, 그 중 몇개의 수식에서 모든항의 계수가 감쇄되지 않는 식으로 할 수 있는가를 결정하는 중요한 문제이다. 산란 각스펙트럼의 far field region에서의 세기를 고려해 볼 때 고차의 각스펙트럼이 감쇄되는 것을 예상할 수 있는데, 식 (25)에서  $W(\rho, n)$ 는 원거리 영역에서도 지수적인 감쇄를 주는항이 아니므로, 원거리 영역에서 소영역에 의한 고차의 각스펙트럼의 세기에 가장 큰 영향을 주는 항은 소영역의 위치에 해당하는  $G(\rho', \phi'; n)$ 항이다. 식 (28)에서 지수 부분은 위상에만 영향을 줄뿐으로 각스펙트럼의 세기에 영향을 주지 않음을 알 수 있고, 각스펙트럼의 세기에 영향을 주는 부분은 Bessel함수임을 알 수 있는데, 이 Bessel 함수의 argument는  $\rho'$  만의 함수 이므로 이것은 소영역의 위치중 각스펙트럼의 세기에 영향을 주는것은  $\rho'$ 의 크기에 의하여

결정됨을 알 수 있다.

산란체로부터 근거리 영역에서 전파 특성에 해당하는 식 (27)이 고차의 스펙트럼에서 발산 하는데, 각스펙트럼의 세기가 발산하지 않는것은 여기에 곱해지는 (28)의 Bessel 함수가 급격히 줄어들기(decay)때문이다. 따라서 (27)의 크기가 발산 하지 않는 원거리 영역에서의 측정 가능한 각스펙트럼의 숫자는 (28)에 위해서 결정됨을 알 수 있다.

$\rho'$ 에 위치한 소영역으로부터 원거리 영역에서 측정 가능한 각스펙트럼의 차수를 근사적으로 알아 보기 위해서 Bessel함수의 고차에 대한 asymptotic expression을 이용한다.

$$J_n(k_0\rho) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{ek_0\rho}{2n}\right)^n, k_0\rho < n \quad (30)$$

여기서  $e$ 는 자연 지수(2.7182...)이다. 위 식의 근사는 원래  $n \rightarrow \infty$ 일 때 맞는 식이지만 정확한 값을 계산하는것이 아니라 전체 값의 크기의 경향에 관심이 있을 때는대략 차수  $n$ 이 argument  $k_0\rho$ 보다 큰 영역에서는 잘 맞는다. 따라서  $\rho'$ 에 위치한 소영역으로부터 far field region에서 측정 가능한 각스펙트럼의 차수를 근사적으로 구해 보면, 식 (30)의 괄호안이 1보다 큰 경우임을 알 수 있다. 식 (30)의 괄호 안이 1보다 큰 경우의 차수  $n$ 의 조건을 풀어 보면 다음과 같다.

$$n \leq \frac{\epsilon\pi\rho'}{\lambda} \quad (31)$$

각스펙트럼 영역의 역산란 문제에서 위의 조건에 들지않는 고차의 각스펙트럼을 evanescent mode라고 정의한다면 propagation mode의 갯수는 산란체의 크기에 의해 결정된다는 사실을 알 수 있다. 따라서 산란체의 소영역 수가  $M$ 개이고, 원점으로부터 가장 먼 소영역의  $\rho$ 좌표의 크기가  $\rho_0$ 일 경우, 식 (31)의  $\rho' = \rho_0$ 를 만족하는 각스펙트럼의 수가  $N$ 개이고,  $N$ 이  $M$ 보다 적은 경우에 원거리에서 측정된  $M$ 개의 각스펙트럼을 이용하여 선형 방정식을 만들면  $M-N$ 개의 식이 모든 계수가 매우 적은 식으로 이루어진다. 따라서 이러한 방정식을 행렬식으로 표현하여 행렬의 역변환으로 풀 경우 역행렬의 성질이 매우 나쁜 ill-posed한 행렬로 된다.

산란체의 반경이 늘어날 경우, 전파 영역의 각스펙트럼은 식 (31)에 의해 산란체의 중심에서 가장 먼

소영역의 위치 즉, 산란체의 반경에 비례하여 늘어남을 보여 준다. 그러나 산란체의 면적은 반경의 제곱에 비례하므로 소영역의 갯수도 제곱에 비례하고 따라서 필요한 각스펙트럼의 갯수도 산란체 반경의 제곱에 비례하게 된다. 이러한 이유로 산란체의 크기가 늘어나 역산란의 입력으로 써야 할 evanescent mode의 수가 늘어나게 되므로 더욱 강한 ill-posedness가 나타남을 알 수 있다.

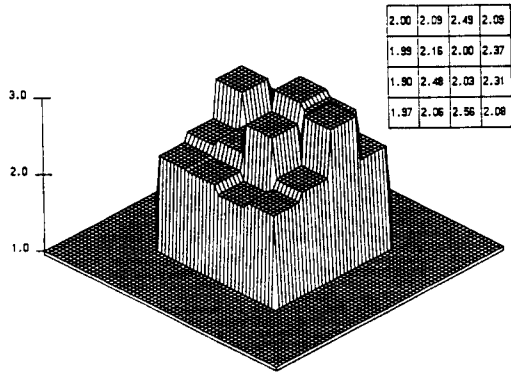
이것은 일정한 크기의 산란체의 원거리 산란 전자파로부터 몇개의 미지수를 구할 수 있는가를 보여주는 중요한 결과이다. 이러한 결과로부터 일정한 반경 영역안에서 몇개의 점산란체의 유기 전류를 원거리의 산란 전자파로부터 구할 수 있는가를 보여주며 또한 ill-posedness가 없는 역산란을 행하기 위해서는 일정한 반경의 산란체에 대하여 구할 미지수를 줄여야 한다는 것을 보여준다.

## V. 수치계산 및 검토

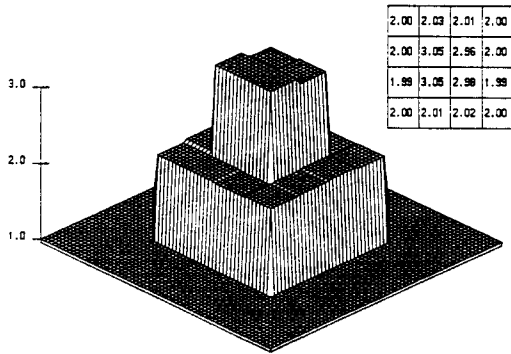
본 논문에서 제시한 각스펙트럼 영역의 역산란 방법의 물리적인 타당성과 효율성을 확인하고 그 한계를 알아보기 위하여 간단한 구조를 갖는 유전체 모형에 대하여 수치계산에 의해 역산란을 해보았다. 실제의 산란 전자파를 측정하여 역산란을 행하는 경우를 가정하면, 측정 장치의 주변에서 나오는 전자파나 측정 장비 자체에 의한 측정 오차 등과 같은 잡음이, 측정하고자 하는 산란 전계의 스펙트럼에 항상 더해져 측정된다. 이와 같은 잡음이 역산란 과정에서 재구성한 유전율의 분포에 미치는 영향을 살펴보기 위해서 수치 계산에 의해 계산된 산란 전자파에 가우스형 랜덤 잡음을 첨가하여 역산란 입력으로 사용하였다.

그림 (3)에서 가로 세로가 각각  $0.4\lambda$ 인 사각 기둥 형태의 유전체를  $0.1\lambda \times 0.1\lambda$  크기의 16개의 소영역으로 나누고, 각 소영역의 유전율 분포는 외곽의 12개의 소영역에서는 2.0이고, 내부의 4개의 소영역에서는 3.0으로 주었다. 유전체의 중심으로부터  $0.3\lambda$ 인 원주상에서 측정된 산란 전자파에 의해 구한 각스펙트럼과, 산란 전자파를 각각 이용하여, 각스펙트럼 영역 및 공간 영역에서의 역산란 과정으로 원래의 유전율 분포를 재구성해 보았다. 계산된 정확한 산란 전자파에, 0.01%의 Gauss형 랜덤 잡음을 첨가하여, 각각의 방법에 의한 역산란 결과를 보여준다. 공간 영역의 역산란 방법이 원래의 유전율 분포에 의해 심한

차이를 보이는 반면, 각스펙트럼의 영역의 역산란은 원래의 유전율 분포를 비교적 잘 재구성한 결과를 준다. 유전체의 구조가 얇은 hollowed cylinder일 경우에는 유전체 내부의 등가의 유효 전류를 각스펙트럼 형태로 전개하여, 측정된 산란 전자파로부터 유전체 내부의 등가 유효 전류의 각스펙트럼을 각각 구한다음, 이 등가 유효전류의 각스펙트럼으로부터 산란체 내부의 등가 유효 전류를 구하는 방법으로 illposedness를 개선한 역산란을 할 수 있다.



(a) 공간 영역



(b) 각스펙트럼 영역

그림 3.  $0.4\lambda \times 0.4\lambda$  유전체의 각스펙트럼 영역과 공간 영역의 역산란의 비교 (잡음수준 : 0.01%Gaussian)

그림 (4)는 중심의 반경이  $1.0\lambda$ 이고, 두께가  $0.1\lambda$ 인 hollowed cylinder에서 이러한 방법으로 역산란한 결과를 보인다.

수치계산시 산란 전자파를 계산하기 위하여 산란체를 64개의 소영역으로 나누어 모멘트 방법을 적용하였다. 각 소영역의 유전율 분포는 1번과 64번째 소

영역에서 최소치 1.1이고 32번째와 33번째 소영역에서 최대치 4.3을 가지는 삼각형 분포로 주었다. 역산란시에 사용하는 각스펙트럼의 수를 64개 및 21개를 사용하여 재구성한 유전율의 분포가 잡음의 영향을 어떻게 받은지를 나타낸다. 64개의 각스펙트럼( $m = -31 \sim 32$ )을 쓸 경우, 잡음의 세기가 신호 세기의 0.001%일 때도 재구성한 유전율 분포가 원래의 분포와 약간의 차이를 보이는 반면 21개의 스펙트럼( $m = -10 \sim 10$ )을 사용한 경우는 잡음이 1.0%첨가 되었을 때도 재구성한 유전율의 분포가 거의 원래의 분포와 거의 같음을 알 수 있다.

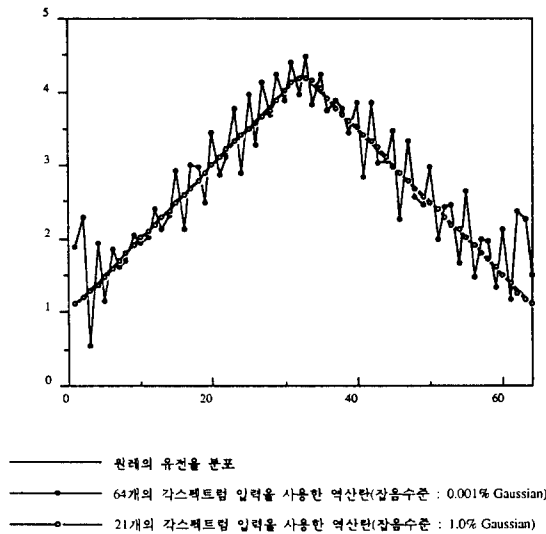


그림 4. 각스펙트럼의 저대역 여파에 의한 Hollow cylinder의 ill-posedness 개선

## VI. 결 론

본 논문에서는 이미 개발된 공간 영역 및 파수 영역에서 모멘트 방법을 이용한 역산란 방법을 새로운 파수 영역의 역산란 방법으로 각스펙트럼 영역의 역산란 방법을 제안 하였으며, 이 각스펙트럼 영역의 역산란 특징을 살펴 보고, 수치 계산에 의해 유전체 내의 비유전율 분포를 재구성하므로써 공간 영역의 역산란에 비하여 잡음의 영향에 훨씬 강한 역산란 결과를 주는 것을 확인 하였다.

산란 전자파의 각스펙트럼의 특징을 조사하여 역산란 문제에서 항상 대두되는 ill-posedness에 대하여 나름대로 그원인을 밝혔으며, 이를 극복하기 위한 연



구를 수행하였고, 역전원 문제의 한계점을 조사해 보았다. 역전원 문제에서 유한한 크기를 가진 산란체에서 측정 가능한 산란 정보의 숫자는 유한하다는 것을 보였다. 또, 원거리 영역에서 측정 가능한 산란 데이터의 숫자는 산란체의 반경에 비례하여 늘어남을 보였다. 이러한 이유로, 사용 전자파의 파장에 비하여 산란체의 크기가 큰 경우에는 역산란이 매우 힘든 문제로 생각된다.

그러나, 모멘트 방법을 사용한 역산란은 다음과 같은 경우에 유용한 결과를 줄 수 있을 것으로 보여진다. 역산란 하고자 하는 산란체가 비교적 그 크기에 비해서 유전율의 변화가 심하지는 않으나 유전율 값은 매우 큰 경우에 산란체의 크기에 비하여 파장이 큰 저주파 전자파를 입사하여 소영역의 갯수를 줄인 문제에서 산란체의 유전율 값을 찾는 경우, 비교적 넓은 영역에 여러개의 균일한 산란체가 있는 경우, 뚜껑이 얇고 길이가 긴 유전체에서 유전율의 변화가 길이 방향으로 있는 경우, 앞의 hollowed cylinder의 경우, 등에서 유전율 값을 정확히 찾는 문제나, 그 위치 및 모양을 찾고자 할 때는 훌륭한 방법임을 알 수 있다. 또한 유전체 기둥속에 쇠막대가 들어 있는 경우와 같이 균일한 매질 내부에 도체나 유전율 값이 매우 큰 물체가 몇개 정도 들어 있을 경우에 그 물체의 위치나 크기 등을 찾는 문제등에서도 유용한 방법이 될수 있다.

### References

1. Spectial isseu on application of electromagnetic theory of geophysical exploration, *Proc.IEEE*, july, 1977.
2. A.V.Ivanov, "On the Synthetic Aperture Radar Imaging of Ocean Surface Waves," *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, vol.OE-7,
3. O.M.Ghandi, et al., "Special Issue on Biological Effects and Medical Applications of Electromagnetic Energy," *Proc.IEEE*, vol.68, no.1, 19-80.
4. D.A.Ausherman, A.Kozma, J.L.Walker, H.M. Jones, and E.C.Poggio, "Developments in Radar Imaging," *IEEE Trans. on Aerospace and Electronics Systems*, vol.AES-20, no.4, pp.363-400, July 1984.

5. G.T.Herman, *Image reconstruction from projections-The fundamentals of computerized tomography*. New York : Academic,1980.
6. A.J.Devaney., "Inverse Scattering Theory Within the Rytov Approximation," *Optics Lett*, 6, 8,1981,pp.374-376.
7. A.J.Devaney, "A filtered backpropagation algorithm for diffraction images," *Ultrasonic Imaging*, vol.4,1982,pp.336-350.
8. M.Slaney, A.C.Kak, and L.E.Larsen, "Limitation of imaging with first-order diffraction tomography," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-32, 1984,pp.860-873.
9. H.P.Baltes, ed., *Inverse source problems in optics*, ch. 4, Springer-Verlag, 1978.
10. J.H.Richmond, "Scattering by a Dielectric Cylinder of Arbitrary Cross Section Shape," *IEEE Trans. Ant. and Prop.*, AP-13, No.5, pp. 334-341, May 1965.
11. D.F.Harrington, *Field Computation by Moment method*, Macmillian, New-York, 1968.
12. W.A.Roots, "Ill-Posedness and Precision in Object Field Reconstruction Problems, *J.Opt. Soc.Am.A*. vol.4, no.1, Jan.1987, pp.171-179.
13. S.A.Johnson, T.H.Yoon, and J.W.Ra, "Inverse Scattering Solutions of the Scalar Helmholtz Wave Equation by a Multiple Source Moment Method" *Electron. Lett.*, Vo. 19, pp.130-132, 1983.
14. S.A.Johnson and M.L.Tracy, "Inverse Scattering by a Sinc Basis, Multiple Source Moment method, Part I : Theory," *Ultrasonic Imaging*, Vol.5, pp.361-375, 1983.
15. S.Caorsi, G.L.Gragnani, and N. Pastorono, "Two-Dimensional Microwave Imaging by a Numerical Inverse Scattering Solution," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol.MTT-38, 1990, pp.981-989.
16. S.Caorsi, G.L.Gragnani, and N. Pastorono, "A Multiview Microwave Imaging System for Two-Dimensional Penetrable Objects," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol.MTT-39, no.5, 1990, pp.845-851.

17. S.Y.Kim, J.M.Lee, and J.W.Ra, "Electromagnetic Imaging of Complex Permittivity Profiles by Moment Method in the Spectral Domain," in *Digest of IEEE AP Symp.*,Syracus, NY,1987,pp.786-789.
18. 김세윤, 이재민, 나정웅, "모멘트 방법을 이용한 새로운 역산란 계산방법,I : 이론," 전자공학회지, 제25권, 제3호,pp.6-14, 1988
19. 김세윤, 윤태훈, 나정웅, "모멘트 방법을 이용한 새로운 역산란 계산방법 II : 잡음의 영향," 전자공학회지, 제25권, 제4호,pp.15-24,1988.
20. 김세윤, 이재민, 나정웅, "파수영역에서 모멘트 방법을 이용한 새로운 역산란 계산방법, I : 이론," 전자공학회지, 제25권, 제10호, pp.1-9.1988.
21. 이재민, 김세윤, 나정웅, "파수영역에서 모멘트 방법을 이용한 새로운 역산란 계산방법, II : 수치 계산," 전자공학회지,제25권, 제10호, pp.10-17, 1988.