

독립 일반화 좌표에 의한 차륜 차량의 Hamilton 운동 방정식에 관한 연구

A study on Hamiltonian Motion Equation of Independent Generalized Coordinates for Wheeled Vehicle

양 성 모*, 배 대 성**, 원 용 석**
S. M. Yang, D. S. Bae, Y. S. Won

ABSTRACT

This task is to derive the Hamiltonian equations of motion for BMW 323i vehicle. The kinematic relationships are defined. The cut constraint equations are derived. The Hamiltonian equation of motion are developed. The constant mass matrices are identified. The cut constraint equations are stabilized. The stabilized constraint equations are used to derive the relationships between the independent and dependent coordinates. The Hamiltonian equations of motion are reduced only in terms of the independent generalized coordinates.

1. 서 론

차륜 차량(wheeled vehicle)을 비롯하여 다 물체 동력학 해석은 현재 매우 활동적으로 연구 대상이 되어, 많은 알고리즘이 기구학적 및 동적 개념에 의하여 개발되어 이용되고 있다. 복잡한 구조물의 운동 방정식은 시스템 좌표축의 선택에 의하여 두 종류의 해석 방법이 존재한다.¹⁾ 좌표축의 수는 고려하지 않고, 바디의 직교 좌표와 구속 조건을 최대로 생각하는 방법²⁾과 조인트 좌표를 최소로 선택하여 기준 바디에 대한 상대 위치를 반복적으로 해석하는 방법³⁾이 있다.

첫번째 방법은 상대 운동 방정식을 간단하게 유도할 수 있으나 기구나 차량 같은 구조물

의 최적화에는 어려움이 따른다. 이 알고리즘은 많은 양의 운동 방정식의 해를 구하는데 대부분의 실행 시간이 소요된다. 두번째 방법은 적은 수의 상대 조인트 좌표와 구속 조건을 사용하지만 운동 방정식은 종종 복잡해지는 경우가 존재하며, 최종 운동 방정식의 조합 해를 구하는데 많은 시간이 필요하게 된다.

이와 같이 해를 구하는 시간은 좌표의 설정 방법, 운동 방정식의 유도에 따라서 달라지므로, 실시간(real time) 차량 동력학의 시뮬레이션에 관한 연구가 많이 진행되고 있다.^{4,6)}

따라서 본 연구는 차량의 동적 시뮬레이션에 필요한 컴퓨터 실행 시간을 줄이기 위하여 차륜 차량에서의 일반화 좌표(generalized coordinate)를 독립좌표와 종속좌표로 재정

* 정회원, 전북대학교 공대 정밀기계공학과

** University of Kansas

의하고, 새로운 위치와 속도 관계식을 유도하였다. 구속방정식과 자코비안 행렬을 구하였으며, 안정화된 구속방정식을 독립좌표와 종속좌표의 관계식 유도에 사용하기 위하여 절단 구속방정식 (cut constraint equation)의 안정화를 논하였다. 차량 운동의 해석에 필요한 Hamilton 방정식을 독립 일반화 좌표 (independent generalized coordinate)로만 유도하여 변위와 속도 해석에 적용 검토하였다.

2. 기구학적 해석

2.1 모델링

BMW 323i 차량의 모델링에는 보통 10개의 바디로 나누어 고려하지만⁷⁾, 조향력과 앞쪽 현가장치의 로워 컨트롤 암 및 스트러트의 관성 효과는 무시할 수 있으므로, 이들의 바디를 기구학적 복합 조인트(composite joint)로 취급한다.⁸⁾

Fig. 1은 Table 1과 같이 5개의 바디로 이루어진 BMW 323i 차량의 모델이다.

Fig. 2는 5개의 바디에 대한 도식적 표현을 나타내고 있다. 5개의 바디에 대한 절단 조인트(cut joint)들은 회전-구면 조인트로 가정하고, 앞쪽 현가장치의 서브 시스템은 거

Table 1 Model

Body Number	Body Description
1	Chassis
2	Right Front Spindle
3	Left Front Spindle
4	Right Trailing Arm
5	Left Trailing Arm

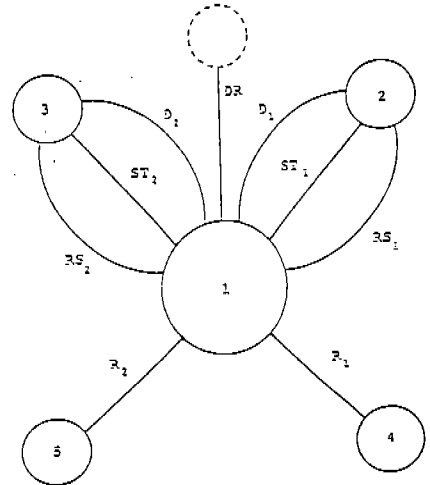


Fig. 2 Graph Representation of the Vehicle

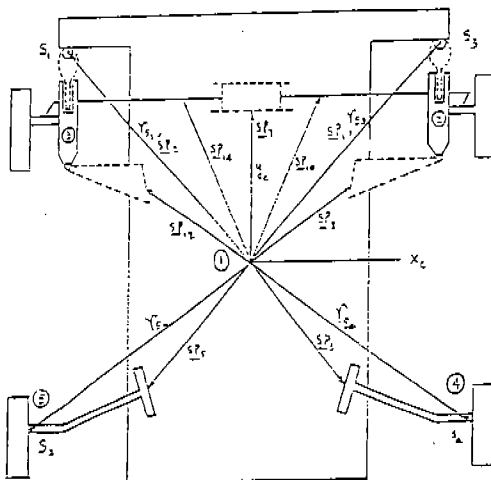


Fig. 1 Chassis

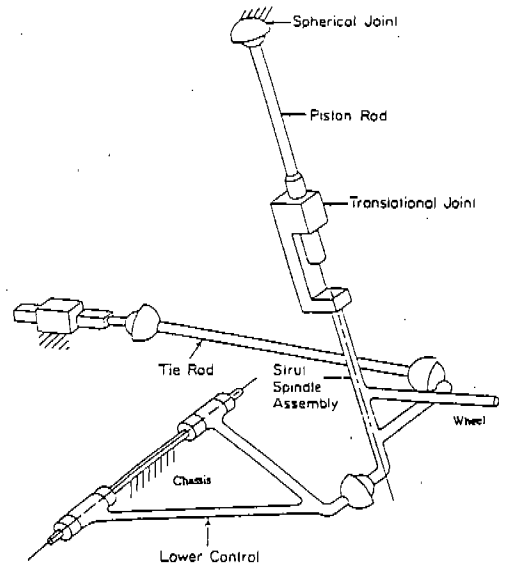


Fig. 3 Front Suspension System

리의 구속조건 (distance constraint)으로 정의를 하며 Fig.3과 같고, 뒷쪽 현가장치는 Fig.4와 같다. Fig.2에 의한 각 바디 사이의 조인트의 구속조건에 의한 자유도는 Table 2와 같이 계산된다.

각 바디 사이의 트리 구조 (tree structure)는 Fig.5와 같다. 앞쪽 우측 스프링들에서 q_1, q_2, q_3 는 회전 조인트에 의한 회전의 일반화 좌표, q_4 는 병진 조인트에 의한 병진의 일반

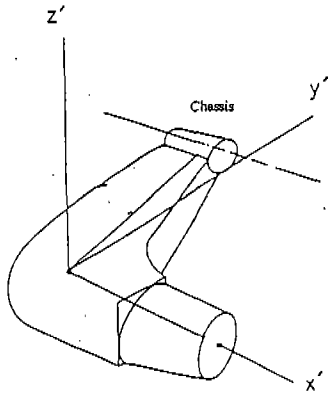


Fig. 4 Rear Trailing Arm

Table 2 Degree of Freedom and Constraints

Constraints		Bodies
Strut Joint (ST 1): 1-2		2
Strut Joint (ST 2): 1-3		2
Revolute-Spherical Joint (RS1): 1-2		2
		Five Bodies
Revolute-Spherical Joint (RS 2): 1-3		2
		$5 \times 7 = 35$
Revolute Joint (R1): 1-4		5
Revolute Joint (R 2): 1-5		5
Distance Constraint (D1): 1-2		1
Distance Constraint (D2): 1-3		1
Driving Constraint (DR):		1
Euler Parameter Normalization		5
Total	26	35
Degree of Freedom	$35 - 26 = 9$	

화 좌표이다. q_6, q_6, q_7 는 회전의 일반화 좌표를 앞쪽 좌측 스프링들에서 나타낸다. q_9, q_{10} 은 뒷쪽의 트레일링 암의 회전의 일반화 좌표이다.

2.2 위치 및 방향

Fig.6과 같은 인접한 바디의 상대적인 일반화 좌표를 조인트 기준 좌표계 (reference frame) $x_{ij}''-y_{ij}''-z_{ij}''$ 으로 정의한다.⁸⁾ 예를들면, 회전 조인트의 상대각은 x_{ij}'' 축을 기준으로 x_{ji}'' 축이 회전한 양으로 측정한다. 기구학적 해석에 대한 계산 조작의 수를 줄이기 위하여 질량 행렬이 일정함을 이용하여 $x_{ij}''-y_{ij}''-z_{ij}''$ 좌표계 대신에 $x_{ji}''-y_{ji}''-z_{ji}''$ 좌표계를 사용하였다.

순차적으로 $x-y'-z''$ 축으로 회전하는 Bryant 각은 사시의 회전하는 일반화 좌표를

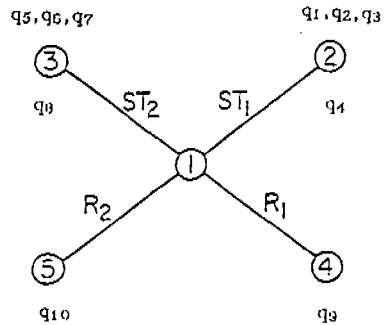


Fig. 5 Spanning Tree of the BMW 323i

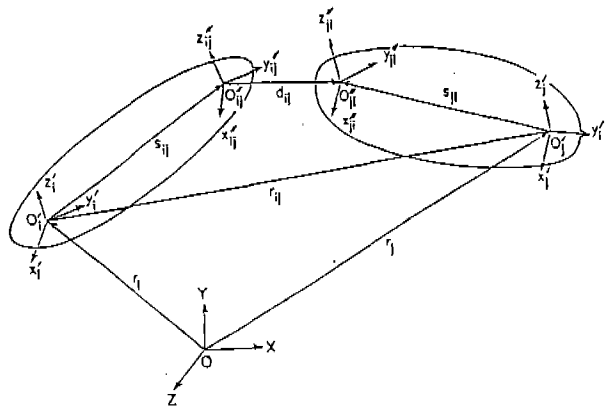


Fig. 6 A pair of Contiguous Bodies

사용하였다. 사시의 방향 행렬 (orientation matrix)은

$$A_1 = A_x(q_{14}) A_y(q_{15}) A_z(q_{16}) \quad (1)$$

로 표시되고, 여기서 A_x, A_y, A_z 는 1 회전에 대한 변환 행렬이고 다음과 같다.

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_x) & -\sin(q_x) \\ 0 & \sin(q_x) & \cos(q_x) \end{pmatrix}$$

$$A_y = \begin{pmatrix} \cos(q_y) & 0 & \sin(q_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(q_y) & 0 & \cos(q_y) \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A_z = \begin{pmatrix} \cos(q_z) & -\sin(q_z) & 0 \\ \sin(q_z) & \cos(q_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fig. 5와 같은 조인트의 두 형태 (스트러트와 회전 조인트)를 사용하고, 회전 조인트는 사시와 뒤쪽 트레일링 암을 연결한다. 트레일링 암의 방향 행렬은

$$A_4 = A_1 C_{14} A_{41}{}^T C_{41}{}^T$$

$$A_5 = A_1 C_{15} A_{51}{}^T C_{51}{}^T \quad (3)$$

이고, 행렬 C_{ij} 및 C_{ji} 는 조인트 기준 좌표계에서 크기가 일정한 행렬이며 주로 거리를 나타낸다. 상대 변환 행렬 (relative transformation matrix)는 부록의 A.1과 같다.

트레일링 암의 위치는 Fig. 6에서 사시 $i = 1$, 트레일링 암 $j = 4$, 거리 $d_{ij} = 0$ 이므로 벡터 다각형에서 다음과 같다.

$$r_4 = r_1 + s_{14} - s_{41}$$

$$r_5 = r_1 + s_{15} - s_{51} \quad (4)$$

사시와 앞쪽 스피ن들은 스트러트 복합 조인

트로 연결되어 있다. $x_{ji}'' - y_{ji}'' - z_{ji}''$ 좌표계로 정의한 상대적 위치의 Bryant 각은 $x_{ji}'' - y_{ji}'' - z_{ji}''$ 와 $x_{ij}'' - y_{ij}'' - z_{ij}''$ 좌표계 사이의 상대적 관계에 있는 일반화 좌표로서 표시하였다. 그 결과, $x_{ji}'' - y_{ji}'' - z_{ji}''$ 좌표계에 대한 $x_{ij}'' - y_{ij}'' - z_{ij}''$ 좌표계의 상대 변환 행렬은 다음과 같다.

$$A_{ji}''(q_i, q_{i+1}, q_{i+2}) = A_x(q_i) A_y(q_{i+1}) A_z(q_{i+2}) \quad (5)$$

스핀들의 방향 행렬은

$$A_2 = A_1 A_{21}{}^T$$

$$A_3 = A_1 A_{31}{}^T \quad (6)$$

이다.

스핀들의 위치벡터는

$$r_2 = r_1 + s_{12,1} - d_{21,1} - s_{21,1}$$

$$r_3 = r_1 + r_{13,4} - d_{31,4} - s_{31,4} \quad (7)$$

이고, 벡터 $d_{21,1}$, $d_{31,4}$ 은

$$d_{21,1} = h_{21} q_4 = A_2 h_{21}' q_4$$

$$d_{31,4} = h_{31} q_8 = A_3 h_{31}' q_8 \quad (8)$$

이며, 벡터 h_{ji} 는 바디 j 에서 병진운동을 하는 축에서의 단위 벡터이다.

2.3 속 도

Bryant 각은 사시의 일반화 좌표에 대한 회전을 나타내므로, 사시의 각속도는 일반화 좌표의 시간에 대한 도함수를 구하면 된다.

$$\omega_1 = D_1 \begin{pmatrix} \dot{q}_{14} \\ \dot{q}_{15} \\ \dot{q}_{16} \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin(q_{15}) \\ 0 & \cos(q_{14}) & -\sin(q_{14}) \cos(q_{15}) \\ 0 & \sin(q_{14}) & \cos(q_{14}) \cos(q_{15}) \end{pmatrix} \quad (9)$$

직교 좌표계에서 속도를 상태 벡터(state vector)로 나타내면

$$\hat{Y}_j = \begin{pmatrix} I & \tilde{r}_i \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r}_j \\ \omega_j \end{pmatrix} \quad (10)$$

이고, \tilde{r}_j 는 외대칭 행렬(skew-symmetric matrix)이다.

그러므로 사시의 상태 속도는

$$\hat{Y}_1 = B_1 [\dot{q}_{11} \dot{q}_{12} \dot{q}_{13} \dot{q}_{14} \dot{q}_{15} \dot{q}_{16}]^T \quad (11)$$

이고, B_1 는 부록의 A. 2와 같다. 트레일링 암의 각 속도는

$$\begin{aligned} \omega_4 &= \omega_1 - u_{41} \dot{q}_9 \\ \omega_5 &= \omega_1 - u_{51} \dot{q}_{10} \end{aligned} \quad (12)$$

이며, 벡터 u_{ji} 는 바다 j 에서의 회전축을 의미한다.

식 (4)를 미분하면 사시와 트레일링 암 사이의 병진 속도 관계를 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{r}_4 &= \dot{r}_1 + \tilde{\omega}_1 s_{14} - \tilde{\omega}_4 s_{41} \\ \dot{r}_5 &= \dot{r}_1 + \tilde{\omega}_1 s_{15} - \tilde{\omega}_5 s_{51} \end{aligned} \quad (13)$$

식 (12)와 식 (13)에서 상태 벡터 관계식은

$$\begin{aligned} \hat{Y}_4 &= \hat{Y}_1 + B_4 \dot{q}_9 \\ \hat{Y}_5 &= \hat{Y}_1 + B_5 \dot{q}_{10} \end{aligned} \quad (14)$$

로 표시된다.

스핀들의 각속도는 사시의 각속도가 ω_1 이므로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \omega_1 - A_2 D_2 [\dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3]^T \\ \omega_3 &= \omega_1 - A_3 D_3 [\dot{q}_5 \dot{q}_6 \dot{q}_7]^T \end{aligned} \quad (15)$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin(q_2) \\ 0 & \cos(q_1) & -\sin(q_1) \cos(q_2) \\ 0 & \sin(q_1) & \cos(q_1) \cos(q_2) \end{pmatrix}$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin(q_6) \\ 0 & \cos(q_5) & -\sin(q_5) \cos(q_6) \\ 0 & \sin(q_5) & \cos(q_5) \cos(q_6) \end{pmatrix}$$

식 (7)의 도함수를 구하면

$$\begin{aligned} \dot{r}_2 &= \dot{r}_1 + \tilde{\omega}_1 s_{12,1} - \tilde{\omega}_2 (h_{21} q_4 + s_{21,1}) - h_{21} \dot{q}_4 \\ \dot{r}_3 &= \dot{r}_1 + \tilde{\omega}_1 s_{13,4} - \tilde{\omega}_3 (h_{31} q_8 + s_{31,4}) - h_{31} \dot{q}_8 \end{aligned} \quad (16)$$

이고, 식 (15)와 식 (16)에서 상태 벡터 관계식은

$$\begin{aligned} \hat{Y}_2 &= \hat{Y}_1 + B_2 [\dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \dot{q}_4]^T \\ \hat{Y}_3 &= \hat{Y}_1 + B_3 [\dot{q}_5 \dot{q}_6 \dot{q}_7 \dot{q}_8]^T \end{aligned} \quad (17)$$

로 표시된다.

차량 시스템의 상태 속도를 상대적 관계의 일반화 좌표에 대한 도함수로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= B \dot{q} \\ \dot{q} &= [\dot{q}_{11}, \dot{q}_{12}, \dot{q}_{13}, \dot{q}_{14}, \dot{q}_{15}, \dot{q}_{16}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4, \\ &\quad \dot{q}_5, \dot{q}_6, \dot{q}_7, \dot{q}_8, \dot{q}_9, \dot{q}_{10}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= [\hat{Y}_1^T \hat{Y}_2^T \hat{Y}_3^T \hat{Y}_4^T \hat{Y}_5^T]^T \\ B &= \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & 0 & B_3 & 0 & 0 \\ B_1 & 0 & 0 & B_4 & 0 \\ B_1 & 0 & 0 & 0 & B_5 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

바다의 상태 변분을 고려하면

$$\delta \hat{Z}_j = \begin{bmatrix} I \tilde{r}_j \\ 0 \ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r_i \\ \delta \pi_i \end{bmatrix} \quad (19)$$

이고, 차시와 외부 바디 사이의 상태 변분은 식 (18)를 도함수 대신에 δ 에 의하여 구하면 된다.

$$\delta \hat{Z} = B \delta q \quad (20)$$

3. 절단 조인트의 구속방정식

3.1 구속 및 자코비안 행렬

Fig. 7과 같은 회전-구면 복합 조인트에 대한 절단 구속방정식은 다음과 같다.⁸⁾

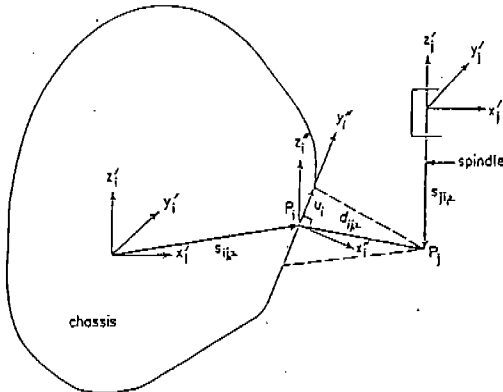


Fig. 7 Revolute-Spherical Composite Joint

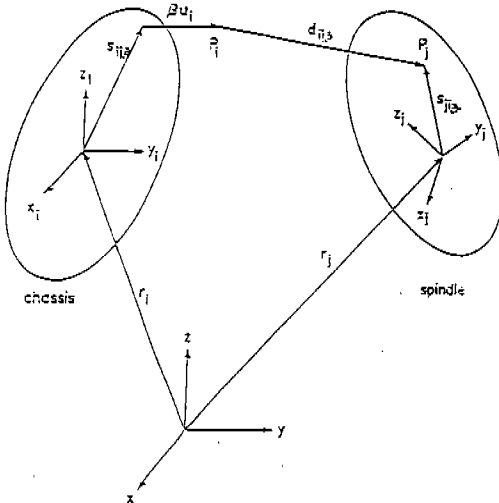


Fig. 8 Distance Constraint between Spindle and Chassis

$$\Phi = u_i^T d_{ij,2} = 0$$

$$\Phi = d_{ij,2}^T d_{ij,2} - c_2^2 = 0 \quad (21)$$

이고, 여기서 벡터 $d_{ij,2}$ 는 다음과 같다.

$$d_{ij,2} = r_j + s_{ji,2} - r_i - s_{ij,2} \quad (22)$$

Fig. 8과 같은 조향 랙과 스피들 사이의 거리 구속방정식은 다음과 같이 표시된다.⁹⁾

$$\Phi = d_{ij,3}^T d_{ij,3} - c_3^2 = 0 \quad (23)$$

여기서 벡터 $d_{ij,3}$ 는

$$d_{ij,3} = r_j + s_{ji,3} - r_i - s_{ij,3} - \beta(t)u_i \quad (24)$$

이다. 벡터 u_i 는 랙의 병진운동 방향축에 평행한 단위 벡터이고, β 는 시간의 함수로서 드라이버(driver)의 구동 입력을 뜻한다. 차량의 상세한 구속방정식은 다음과 같다.

$$\Phi^1 = u_2^T d_{12,2} = 0$$

$$\Phi^2 = d_{12,2}^T d_{12,2} - c_2^2 = 0$$

$$\Phi^3 = d_{12,3}^T d_{12,3} - c_3^2 = 0$$

$$\Phi^4 = u_3^T d_{13,5} = 0$$

$$\Phi^5 = d_{13,5}^T d_{13,5} - c_5^2 = 0$$

$$\Phi^6 = d_{13,6}^T d_{13,6} - c_6^2 = 0$$

(25)

구속방정식을 자코비안 행렬 Φ_q 로 표시하면 다음과 같고, 각각의 바디에 대하여는 부록 A.3에 나타내었다.

$$\delta \Phi = \Phi_q \delta q \quad (26)$$

3.2 구속조건의 안정화

구속방정식은 적분함에 따라 누적 오차가 발생한다. 이 오차는 다음과 같이 안정화 방법을 택함으로써 줄일 수 있다.^{9,10)}

$$\Phi_q \dot{q} + \Phi_t = -\alpha \Phi \quad (27)$$

여기서 α 는 안정 게인 상수 (stabilization gain constant)이며, 시스템에 대한 벡터 Φ_t 는

$$-\Phi_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2d_{12,3}^T u_1 \dot{q}_{17} \\ 0 \\ 0 \\ -2d_{13,6}^T u_1 \dot{q}_{17} \end{pmatrix} \quad (28)$$

이다. Baumgate⁹⁾는 구속 안정화 방법을 선형 피드백 제어 이론에 의하여 다음과 같은 식으로 제안하였다.

$$\ddot{\Phi} + 2\alpha\dot{\Phi} + \beta^2\Phi = 0 \quad (29)$$

여기서 α 와 β 는 안정화 상수이다.

임계감쇠가 일어나면 $\alpha = \beta$ 이고 해가 빨리 안정한 값을 갖으므로 식 (29)는 다음과 같이 변형하여 Φ 의 2차 선형 미분방정식 형태를 만든다.

$$\ddot{\Phi} + \alpha\dot{\Phi} + \alpha\Phi = 0 \quad (30)$$

상수 α 의 최적값을 구하기 위하여 다단계 적분의 안정이론을 적용하고 식 (30)을 다음과 같은 식으로 바꾸면

$$D^2 + \alpha D + \alpha = 0 \quad (31)$$

이 방정식의 해를 구하면

$$D = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \alpha} \quad (32)$$

이고, 이 해가 안정한 값을 가지려면

$$h \left[\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \alpha} \right] < ST_k \quad (33)$$

이다. 여기서 ST_k 는 실수축의 안정 영역에서 최소점의 절대값이고 h 는 적분시간 스텝을 뜻한다. Adams-Bashforth 프레딕터(predictor)에 대한 ST_k 값은 Table 3과 같다. α 에 관하여 식 (33)을 풀면

$$\alpha < \frac{ST_k^2}{(ST_k h - h^2)} \quad (34)$$

h 는 미소량이므로 h^2 의 항을 무시하면

$$\alpha < \frac{ST_k}{h} \quad (35)$$

최적 안정화 상수 α^* 를 식 (35)에서 최대값으로 취하면

$$\alpha^* = \frac{ST_k}{h} \quad (36)$$

이다.

Table 3 ST_k Value for the Adams-Bashforth Methods

order k	1	2	3	4	5	6	7
ST_k	1.6	0.8	0.4	0.2	0.1	0.05	0.005

3차 프레딕터를 적분에 사용하면 Table 3에서 ST_k 는 0.4가 되고 스텝 구간을 $h = 0.001$ 이라면, 최적 상수값은 $0.4/0.001 = 400$ 이다. 최적 상수값을 포함하여 여러 α 값에 대한 동적 시뮬레이션을 수행하여 구속 오차 벡터의 수준(norm)을 살펴보면 Fig. 9에서 다른 값에 대한 수준값은 큰 값을 갖으나 $\alpha = 400$ 에서는 0.005로 비교적 적은 수준값을 갖고 있음을 고찰할 수 있다. 구속조건의 안정화를 위한 최적값은 구속 오차를 제어함으로써 쉽게 해결할 수 있다.

3.3 독립좌표와 종속좌표 사이의 기구학적 관계

일반화 좌표는 $q = [a^T W^T]^T$ 처럼 독립 좌

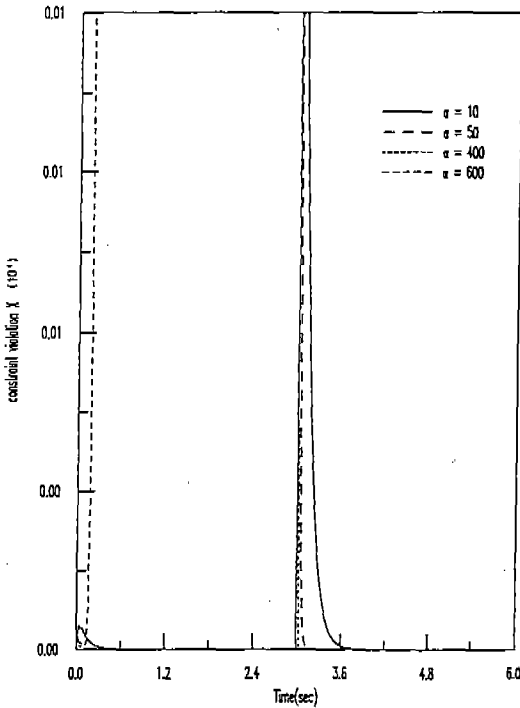


Fig. 9 Norms of Constraint Violations of the Vehicle

표와 종속 좌표로 분리하여 생각할 수 있다. 독립 좌표는 다시 $Z = [Z^T V^T]^T$ 처럼 사시와 현가장치의 독립 좌표로 분리할 수 있다. 주어진 차량 장치에서 현가장치의 독립좌표를 스피ن들의 병진운동과 트레일링 압의 회전운동으로 표시하면 $V = [q_4 q_8 q_9 q_{10}]^T$, 종속운동은 스피ن들의 회전운동으로 표시하면 $W = [q_1 q_2 q_3 q_5 q_6 q_7]^T$ 이다. 사시의 독립좌표는 위치와 회전운동에 의하여 $Z = [q_{11} q_{12} q_{13} q_{14} q_{15} q_{16}]^T$ 이다. 절단 구속조건은 사시의 일반화 좌표의 함수가 아니므로, 식 (27)에서 속도 구속방정식은 다음과 같이 분리할 수 있다.

$$\Phi_v \dot{V} + \Phi_w \dot{W} = -\Phi_t - \alpha \Phi \quad (37)$$

종속속도 \dot{W} 는 독립속도 \dot{V} 로 표현할 수 있으므로

$$\begin{aligned} \dot{W} &= -\Phi_w^{-1} (\Phi_v \dot{V} + \Phi_t + \alpha \Phi) \\ &= H \dot{V} + X \end{aligned} \quad (38)$$

이고, 여기서 행렬 H 와 X 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H &= -\Phi_w^{-1} \Phi_v \\ X &= -\Phi_w^{-1} (\Phi_t + \alpha \Phi) \end{aligned} \quad (39)$$

일반 속도들은 독립 현가장치와 사시 속도로 표시된다.

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{Z} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{bmatrix} = \underline{H} \dot{a} + \underline{X} \quad (40)$$

여기서 행렬 \underline{H} 와 \underline{X} 는

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_1' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_2' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ X_1' \\ X_2' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

이다.

차량시스템의 상태와 상태속도의 관계는 식 (18)을 식 (40)에 대입하여 구한다.

$$\hat{Y} = B (\underline{H} \dot{a} + \underline{X}) \quad (42)$$

여기서 행렬 $B\underline{H}$ 와 $B\underline{X}$ 는 다음과 같다.

$$B\underline{H} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 H_1' & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & 0 & B_3 H_2' & 0 & 0 \\ B_1 & 0 & 0 & B_4 & 0 \\ B_1 & 0 & 0 & 0 & B_5 \end{bmatrix}$$

$$B\underline{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 X_1' \\ B_3 X_2' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$H_1' = \begin{pmatrix} H_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad H_2' = \begin{pmatrix} H_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_1' = \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_2' = \begin{pmatrix} X_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

비슷한 방법으로 가상 변위 관계식은

$$\begin{aligned} \delta q &= \underline{H} \delta a \\ \delta \hat{Z} &= B \underline{H} \delta a \end{aligned} \quad (44)$$

이고, 식 (39)에서 H 를 시간에 대하여 미분하면

$$\dot{H} = -\frac{d}{dt}(\Phi_w^{-1})\Phi_w - \Phi_w^{-1} \frac{d}{dt}(\Phi_v) \quad (45)$$

이고, $\Phi_w \Phi_w^{-1} - I = 0$ 이므로

$$\frac{d}{dt}(\Phi_w^{-1}) = -\Phi_w^{-1} \frac{d}{dt}(\Phi_w) \Phi_w^{-1} \quad (46)$$

식 (45)를 다시쓰면

$$\dot{H} = \Phi_w^{-1} \left(\frac{d}{dt}(\Phi_w) \Phi_w^{-1} \Phi_v - \frac{d}{dt}(\Phi_v) \right) \quad (47)$$

으로 정리된다.

4. 운동의 Hamilton 방정식

Hamilton 법칙은 다음과 같이 쓸 수 있으며¹¹⁾,

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} (\delta L + Q_n^{*T} \delta q) dt = 0 \quad (48)$$

Lagrangian L 은 $T(q(a), \dot{q}(a, \dot{a})) - V(q(a))$ 이고, Q_n^* 는 조인트 공간에서 비보존력 벡터를 나타낸다. 가상변위 δq 는 절단된 조인트에 대하여 기구학적으로 가능한 여러 조건들로 나누어 생각할 수 있다. 식 (48)을 다시쓰면

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \{ \delta T + (Q_c^* + Q_n^*)^T \delta q \} dt = 0 \quad (49)$$

이고, 벡터 Q_c^* 는 보존력을 나타내며

$$Q_c^{*T} = -\left(\frac{\partial v}{\partial q} \right) \quad (50)$$

로 표시된다. 식 (44)의 독립 및 종속 좌표 사이의 가상 변위 관계를 식 (49)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} \{ \delta T(q(a), \dot{q}(a)) \\ &\quad + Q^{*T} \underline{H} \delta a \} dt = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

이고, $Q^* = Q_c^* + Q_n^*$ 이다. 식 (51)을 다음과 같이 고치면

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial T}{\partial a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}} \right) + \underline{H} Q^* \right\}^T \delta a dt = 0 \quad (52)$$

가 되고, δa 는 임의의 값을 가져야 하므로 그의 계수는 0이 되어야 한다.

$$\begin{aligned} \dot{P}_a &= \left(\frac{\partial T}{\partial a} \right)^T + (\underline{H}^T Q^*)^T \\ &= (B \underline{H})^T \hat{Q} + \left(\frac{\partial T}{\partial a} \right)^T \end{aligned} \quad (53)$$

독립된 조인트 공간에서 일반적인 모우멘트는 연쇄법칙에 의하여

$$P_a = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}} \right)^T = \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{a}} \right)^T \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right)^T \quad (54)$$

이고, 여기서 상태 공간에서 일반력 \hat{Q} 는 직교 좌표 공간에서 가상일의 원리에 의하여

$$\hat{Q} = D I^T Q \quad (55)$$

로 표시된다.

Q^* 와 \hat{Q} 는 조인트와 상태 벡터 공간에서의 일반력 (generalized forces)이다. 차량 장치에서 운동에너지는

$$T = \frac{\dot{q}^T}{2} M^* \dot{q} \quad (56)$$

이고, M^* 는 부록 A.4와 같다. 만약 식 (56)의 운동에너지가 \dot{q} 에 관하여 미분 가능하면, 식 (54)에 의하여 다음과 같은 운동량 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} P_a &= \underline{H}^T M^* \dot{q} \\ &= \underline{H}^T M^* (\underline{H}\dot{a} + \underline{X}) \\ &= (\underline{BH})^T \hat{M}(\underline{BH})\dot{a} + (\underline{BH})^T \hat{M}\underline{B}\underline{X} \end{aligned} \quad (57)$$

식 (57)을 \dot{a} 대하여 풀기 위하여 정리하면

$$\begin{aligned} M^{**} \dot{a} &= P_a^{**} \\ &= P_a - X^{**} \end{aligned} \quad (58)$$

여기서 M^{**} , X^{**} 는 다음과 같으며 자세한 내용은 부록 A.5와 같다.

$$\begin{aligned} M^{**} &= \underline{H}^T M^* \underline{X} \\ &= (\underline{BH})^T \hat{M}(\underline{BH}) \\ X^{**} &= (\underline{BH})^T \hat{M}(\underline{B}\underline{X}) \end{aligned} \quad (59)$$

5. $(\partial T/\partial a)^T$ 계산

직교 좌표계에서 BMW 323i의 운동방정식에 대한 변분 형태는¹²⁾

$$\sum_{i=1}^5 \{ \delta r_i^T (m_i \ddot{r}_i - f_i) + \delta \pi_i^T (J_i \dot{\omega}_i + \bar{\omega}_i J_i \omega_i - n_i) \} = 0 \quad (60)$$

이고, $[\delta r_i^T \delta \pi_i^T]^T$ 은 시스템에 존재하는 모든 구속방정식으로 구성된다. 방정식을 행렬 형태로 고쳐 쓰면

$$\begin{aligned} \delta Z^T (M\dot{Y} + \dot{M}Y - Q) \\ = \delta Z^T \left(\frac{d}{dt} (MY) - Q \right) = 0 \end{aligned} \quad (61)$$

이고, $M, \dot{M}Y, Q$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_5 \end{pmatrix} \\ \dot{M}Y &= \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\omega}_1 J_1 \omega_1 \\ 0 \\ \bar{\omega}_2 J_2 \omega_2 \\ 0 \\ \bar{\omega}_3 J_3 \omega_3 \\ 0 \\ \bar{\omega}_4 J_4 \omega_4 \\ 0 \\ \bar{\omega}_5 J_5 \omega_5 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} f_1 \\ n_1 \\ f_2 \\ n_2 \\ f_3 \\ n_3 \\ f_4 \\ n_4 \\ f_5 \\ n_5 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (62)$$

직교 좌표와 독립 조인트 좌표 사이의 가상 변위와 가속도 관계는 다음과 같이 표시되며

$$\delta Z = DI \underline{BH} \delta a \quad (63)$$

식 (63)에 의하여 운동방정식은 직교 공간에서 독립 조인트 공간으로 변환된다.

$$\delta a^T (DI \underline{BH}) \left(\frac{d}{dt} (MY) - Q \right) = 0 \quad (64)$$

δa 의 임의값에 대하여 성립하여야 하므로 독립 조인트 공간에서의 차량 운동방정식은 다음 조건을 만족하여야 한다.

$$(DI \underline{BH}) \left(\frac{d}{dt} (MY) - Q \right) = 0 \quad (65)$$

독립 조인트 공간에서 BMW 323i 차량에 대한 운동의 Lagrange 방정식은

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}} \right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial a} \right)^T &= (DI \underline{BH})^T Q \\ &= \underline{H}^T Q^* \end{aligned} \quad (66)$$

식 (66)의 오른쪽은 가상일의 원리에 의하여 구할 수 있다.

$(\partial T / \partial a)^T$ 는 식 (54), (57)에서 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)^T &= \underline{H}^T M^* \dot{q} \\ &= (DI \underline{B} \underline{H})^T MY \end{aligned} \quad (67)$$

식 (67)을 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)^T &= \frac{d}{dt} (DI \underline{B} \underline{H})^T MY \\ &+ (DI \underline{B} \underline{H})^T \frac{d}{dt} (MY) \end{aligned} \quad (68)$$

식 (65)를 식 (68)에 대입하면

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)^T = \frac{d}{dt} (DI \underline{B} \underline{H})^T MY + (DI \underline{B} \underline{H})^T Q \quad (69)$$

식 (69)를 식 (66)에 대입하여 정리하면

$$\left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)^T = \frac{d}{dt} (DI \underline{B} \underline{H})^T MY \quad (70)$$

이고,

$$\dot{P}_a = (\underline{B} \underline{H})^T \hat{Q} + \frac{d}{dt} (DI \underline{B} \underline{H})^T MY \quad (71)$$

이며, 이 식을 적분하여 운동량 P_a 를 구한다.

6. 수치계산

6.1 블 록

차륜 차량에서 Hamilton 운동방정식의 해를 구하는 유동도 구조는 Fig. 10과 같다. 프로그램은 Initial Process Block, Momenta Block, Integration Block, Velocity Block으로 구성되어 있으며, 각 블록의 설명은 아래와 같다.

(1) Initial Process Block

1) 초기위치 $q(0)$ 와 초기속도 $\dot{q}(0)$ 를 읽는다.

2) 초기 구동 토크와 조향 상태를 결정한다.

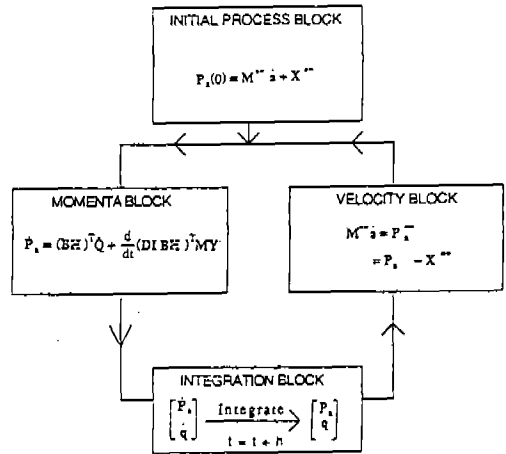


Fig. 10 Computational Flow of the Program

3) 바디들의 위치와 방향을 계산한다.

4) 질량 행렬과 자코비안 행렬을 계산한다. 초기 구속방정식 오차를 교정하기 위하여 Newton-Raphson 방법을 사용한다.

5) 초기 운동량 $P_a(0)$ 를 계산한다.

(2) Momenta Block

1) $t = 0.0$ 에서 다음 스텝으로 넘어간다. 그렇지 않으면 식 (68)로부터 현가장치의 독립 및 종속 속도를 구한다.

2) 타이어, 스프링, 중력, 일반력 등을 계산한다.

3) $d(DI \underline{B} \underline{H}) / dt^T MY$ 를 계산한다.

4) \dot{P}_a 를 계산한다.

(3) Integration Block

1) 다음 시간 스텝에서 q 를 얻기 위하여 \dot{q} 를 적분한다.

2) 다음 시간 스텝에서 P_a 를 얻기 위하여 \dot{P}_a 를 적분한다.

(4) Velocity Block

1) 구동 토크와 조향 입력을 받아 들인다.

2) 바디들의 위치와 방향을 계산한다.

3) 질량 행렬과 자코비안 행렬을 계산한다.

4) 차시 속도의 향으로만 식 (68)의 운동

량 방정식을 변형한다.

5) 차시 속도에 대하여 변형된 운동량 방정식을 푼다.

6.2 시뮬레이션 결과

차량의 동적 시뮬레이션은 정지상태에서 출발하여 15초 동안의 거동에 대하여 해석하였으며, 타이어의 모델은 타이어가 슬립과 구름 작용만 한다고 가정하여 시뮬레이션 하였다. Fig.11과 Fig.12는 차시의 횡방향 변위와 속도를 나타내고, Fig.13과 Fig.14는 차시의 수직방향 위치와 속도를 나타내고 있다.

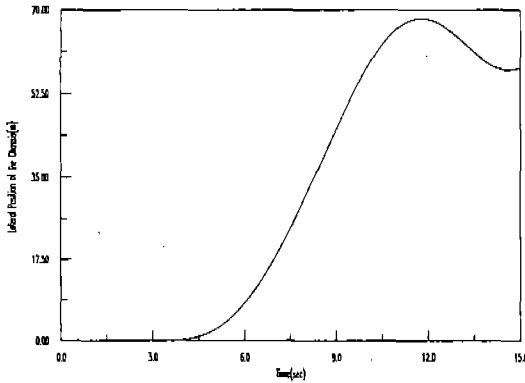


Fig.11 Lateral Position of the Chassis

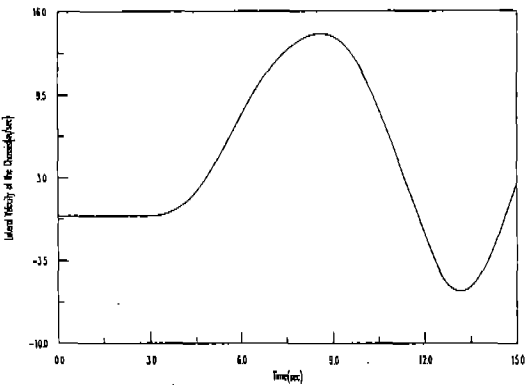


Fig.12 Lateral Velocity of the Chassis

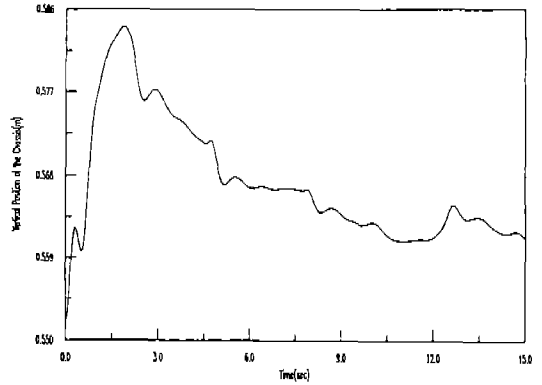


Fig.13 Vertical Position of the Chassis

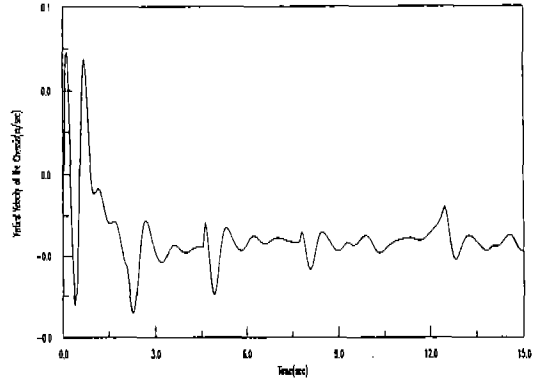


Fig.14 Vertical Velocity of the Chassis

7. 결 론

차량 차량에 대한 동적 거동을 해석하기 위하여 절단 구속방정식의 개념을 도입하고, 해의 오차를 작게 하기 위하여 구속방정식에 대한 안정화 기법을 논하였다. 차량을 일반화 좌표로만 운동방정식의 해를 구하지 않고, 독립좌표와 계산 반복 횟수를 줄이기 위하여 일반화 좌표를 독립좌표와 종속좌표로 분리하였다. 종속좌표를 안정된 구속방정식을 이용하여 독립좌표로 상관관계를 표시하고, 이를 이용하여 Hamilton 운동방정식을 독립된 일반화 좌표로서만 유도하여 패럴렐 프로세서(parallel processor)에 이용 가능한 기틀을 마련하였다.

참 고 문 헌

1. Haug, E.J., "Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics," Springer-Verlag, Heidelberg, 1984.
2. Orlandea, N., Chace, M., and Calahan, D., "A Sparsity-Oriented Approach to the Dynamic Analysis and Design of Mechanical System-Part 1 and 2," J. of Engineering for Industry, pp.773-784, 1977.
3. Hooker, W. and Margulies, G., "The Dynamical Attitude Equations for an n-body Satellite," J. Astroaut. Sci. 12, pp.123-128, 1965.
4. Nordmark, S., "VTI Driving Simulator - Mathematical Model of a Four-wheeled Vehicle for Simulation in Real Time," VTI Report Nr 267A 1984, Statens vag-och trafikinstitut, Lin-loping, Sweden, 1984.
5. Drosdol, J. and Panik, F., "The Daimler-Benz Driving Simulator : a Tool for Vehicle Development," SAE 850334, 1985.
6. Hahn, S., and Kalb, E., "The Daimler-Benz Simulator Set-Up and Results of First Experiments, In Summer Computer Simulation Conference Proceedings," Simulation Councils, Inc., San Diego, pp.993-998, 1987.
7. Haug, E.J., Kuhl, J.G., Wilson, M.A. Bae, D.S., and Lee, W.S., "Real Time Vehicle Simulator Dynamics Problem Definition and Feasibility Study-Final Report," CCAD, 1987.
8. Hwang, R.S., Tasi, F.F., and Haug, E.J., "A New Model for BMW 323i Using Composite Joints and Constraints," CCAD Report, 88-9-D-1-2, Iowa City, 1988.
9. Baumgarte, J.W., "A New Method of Stabilization for Holonomic Constraints," J. of Applied Mechanics, Vol. 50, pp.869-870, 1983.
10. Bae, D.S. and Yang, S.M., "A Stabilization Method for Kinematic and Kinetic Constraint Equations", Proceeding to NATO Advanced Research Workshop - Real Time Integration

Methods for Mechanical System Simulation, Salt Lake City, 1989.

11. Goldstein, H., "Classical Mechanics," Addison - Wesley, 1980.
12. Haug, E.J., "Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical System," Allyn and Bacon, pp.440-445, 1989.

Appendix

(A.1) Relative Transformation matrices

$$A_{21}''(q_1, q_2, q_3) = A_x(q_1)A_y(q_2)A_z(q_3)$$

$$A_{31}''(q_5, q_6, q_7) = A_x(q_5)A_y(q_6)A_z(q_7)$$

$$A_{41}''(q_9) = \begin{bmatrix} \cos(q_9) & -\sin(q_9) & 0 \\ \sin(q_9) & \cos(q_9) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{51}''(q_{10}) = \begin{bmatrix} \cos(q_{10}) & -\sin(q_{10}) & 0 \\ \sin(q_{10}) & \cos(q_{10}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(A.2) Defintion of B matrices

$$B_1 = \begin{bmatrix} I & \widetilde{r_1} D_1 \\ 0 & D_1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -(\widetilde{r_1} + \widetilde{s_{12,1}})A_2 D_2 & -h_{21} \\ -A_2 D_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} -(\widetilde{r_1} + \widetilde{s_{13,4}})A_3 D_3 & -h_{31} \\ -A_3 D_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} -(\widetilde{r_4} + \widetilde{s_{41}})u_{41} \\ -u_{41} \end{bmatrix}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} -(\widetilde{r_5} + \widetilde{s_{51}})u_{51} \\ -u_{51} \end{bmatrix}$$

(A.3) Constraint Jacobian matrix

$$\begin{aligned}
\Phi_{q_1 234}^1 &= u_2^T [(\bar{r}_2 + \bar{s}_{21,2} - \bar{r}_1 - \bar{s}_{12,1}) A_2 D_2] & -h_{21}] \\
\Phi_{q_1 234}^2 &= 2d_{12,2}^T [(\bar{r}_2 + \bar{s}_{21,2} - \bar{r}_1 - \bar{s}_{12,1}) A_2 D_2] & -h_{21}] \\
\Phi_{q_1 234}^3 &= 2d_{12,3}^T [(\bar{r}_2 + \bar{s}_{21,3} - \bar{r}_1 - \bar{s}_{12,1}) A_2 D_2] & -h_{21}] \\
\Phi_{q_5 678}^4 &= u_3^T [(\bar{r}_3 + \bar{s}_{31,5} - \bar{r}_1 - \bar{s}_{13,4}) A_3 D_3] & -h_{31}] \\
\Phi_{q_5 678}^5 &= 2d_{13,5}^T [(\bar{r}_3 + \bar{s}_{31,5} - \bar{r}_1 - \bar{s}_{13,4}) A_3 D_3] & -h_{31}] \\
\Phi_{q_5 678}^6 &= 2d_{13,6}^T [(\bar{r}_3 + \bar{s}_{31,6} - \bar{r}_1 - \bar{s}_{13,4}) A_3 D_3] & -h_{31}]
\end{aligned}$$

(A.4) Definition of M* matrix

$$M^* = \begin{bmatrix} B_1^T (\hat{M}_1 + \hat{M}_2 + \hat{M}_3 + \hat{M}_4 + \hat{M}_5) B_1 & B_1^T \hat{M}_2 B_2 & B_1^T \hat{M}_3 B_3 & B_1^T \hat{M}_4 B_4 & B_1^T \hat{M}_5 B_5 \\ B_1^T \hat{M}_2 B_2 & B_2^T \hat{M}_2 B_2 & 0 & 0 & 0 \\ B_1^T \hat{M}_3 B_3 & 0 & B_3^T \hat{M}_3 B_3 & 0 & 0 \\ B_1^T \hat{M}_4 B_4 & 0 & 0 & B_4^T \hat{M}_4 B_4 & 0 \\ B_1^T \hat{M}_5 B_5 & 0 & 0 & 0 & B_5^T \hat{M}_5 B_5 \end{bmatrix}$$

(A.5) Definition of mass matrix M** and the X** Vector

$$M^{**} = \begin{bmatrix} B_1^T (\hat{M}_1 + \hat{M}_2 + \hat{M}_3 + \hat{M}_4 + \hat{M}_5) B_1 & B_1^T \hat{M}_2 B_2 H_1' & B_1^T \hat{M}_3 B_3 H_2' & B_1^T \hat{M}_4 B_4 & B_1^T \hat{M}_5 B_5 \\ B_1^T \hat{M}_2 B_2 H_1' & H_1^T B_2^T \hat{M}_2 B_2 H_1' & 0 & 0 & 0 \\ B_1^T \hat{M}_3 B_3 H_2' & 0 & H_2^T B_3^T \hat{M}_3 B_3 H_2' & 0 & 0 \\ B_1^T \hat{M}_4 B_4 & 0 & 0 & B_4^T \hat{M}_4 B_4 & 0 \\ B_1^T \hat{M}_5 B_5 & 0 & 0 & 0 & B_5^T \hat{M}_5 B_5 \end{bmatrix}$$

$$X^{**} = \begin{bmatrix} B_1^T (\hat{M}_2 B_2 X_1' + \hat{M}_3 B_3 X_2') \\ H_1^T B_2^T \hat{M}_2 B_2 X_1' \\ H_2^T B_3^T \hat{M}_3 B_3 X_2' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$