

〈 論 文 〉

전달율 측정에 의한 점탄성재료의 복소탄성계수 추출시의 민감도 분석

Sensitivity Analysis in the Estimation of Complex Elastic Modulus of Viscoelastic Materials by Transmissibility Measurements

안태길* · 허진욱** · 김광준*

Tae-Kil Ahn, Jin-Wook Huh and Kwang-Joon Kim

(1992년 3월 6일 접수; 1992년 4월 22일 심사완료)

ABSTRACT

The complex Young's modulus of a viscoelastic material can be obtained as a function of frequency from the measurements of relative motion between the two ends of a bar-type specimen. Non-resonance method is usually used to obtain the complex Young's modulus over wide range of frequency including resonance points, while in resonance method information at resonance frequencies only is used. However, the complex Young's modulus obtained by the non-resonance method is often unreliable in the anti-resonance frequency regions because of the measurement noise problems. In this study, the effects of the random measurement errors on estimating the complex Young's modulus are studied in the aspect of sensitivity, and how to obtain the reliable frequency region for a given measurement error level is shown. The usable frequency regions in determining the complex Young's modulus are represented by a non-dimensional parameter formed with the wave length and specimen length.

기 호 설 명

A : 시편의 단면적
 d : 시편의 직경
 L : 시편의 길이
 R : 시편의 질량에 대한 부가질량의 비
 E^* : 복소탄성계수
 E : 탄성계수(storage modulus)
 η : 손실계수(loss factor)
 T^* : 복소전달율

T : 전달율의 크기
 ϕ : 전달율의 위상
 λ : 파장
 ρ : 밀도
 ω : 가진 주파수
 n_d : 평균 횡수
 γ_{xy}^2 기여도(coherence)

1. 서 론

일반적으로 점탄성 재료는 강제진동시의 진동 저감 및 충격에 따른 자유진동의 감쇠에 널리 사용된다. 이러한 진동저감과 관련된 점탄성재료의 주요 물적

* 한국과학기술원 기계공학과

** 현대자동차

특성치는 탄성계수와 손실계수로서, 이들에 대한 보다 정확한 정보는 점탄성재료를 이용한 방진, 완충설계를 위해 필수적이라 할 수 있다.

점탄성재료의 동적 물성치인 탄성계수와 손실계수를 실험적으로 구하는 방법중에는 공진법⁽¹⁾과 비공진법^(2~5)이 있다. 공진법은 시편의 공진주파수에서만 물성치를 추출하는 방법으로서 신뢰도면에서의 장점 등으로 인해 많은 실험실에서 사용되고 있고, 특히 비선형 동특성 연구에 사용되고 있지만 물성치의 추출이 공진주파수에 국한된다는 단점이 있다. 한편 비공진법은 전체 가진 주파수에서 물성치를 추출하는 방법으로서, 재료의 물성치가 주파수에 따른 변화가 심한 경우에 유용하다. 또한 비공진법은 임피던스(impedance) 측정법과 전달율 측정법으로 구분될 수 있는데, 전자는 가진력을 강제적으로 공급하기 때문에 신호/잡음비등을 고려한 측정의 정확성면에서 후자보다 유리한 면이 많지만 실험장치가 복잡하게 되고, 그에 따른 비용, 시간등의 문제가 있게 된다.

본 연구에서는 비공진법중 전달율 측정법을 이용하고자 할때, 이 방법론 자체의 필연적 문제점인 측정단계에서의 잡음에 의한 램덤(random)오차가 점탄성재료의 동적 물성치 추출에 어떠한 영향을 미치는가에 대하여 살펴보고자 한다. 이를 위하여 점탄성재료의 막대형 시편의 한쪽 끝에 부가질량을 부착하고, 다른 한쪽을 가진하는 경우에 대하여 종방향으로만 변형을 가정하는 기초적 모형(elementary theory)을 적용하였다.

2. 막대형 시편의 전달율 측정에 의한 복소탄성계수 산출

2.1 종방향 진동만을 고려한 기초 연속체 모형

막대형 시편의 종방향 진동을 연속체로 모형화하는 방법중에서 가장 간단한 것은 변형전 축에 수직인 평면단면은 변형후에도 평면을 유지하고, 축방향으로의 변형만이 존재하며, 단면에서의 응력이 균일하게 분포한다는 가정하에서 운동방정식을 유도하는 것이다. Fig. 1에 보인 계에서 점탄성 시편의 복소탄성계수를 E^* 라고 하면, 동적 변형율이 작은 경우, 막대형 시편의 축방향 운동에 대한 지배방정식은 다음과 같다.

$$E^* \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

여기서 ρ 는 재료의 밀도이다. 한편 Fig. 1에 보인 계는 식 (1)과 함께 아래와 같은 경계조건을 만족시

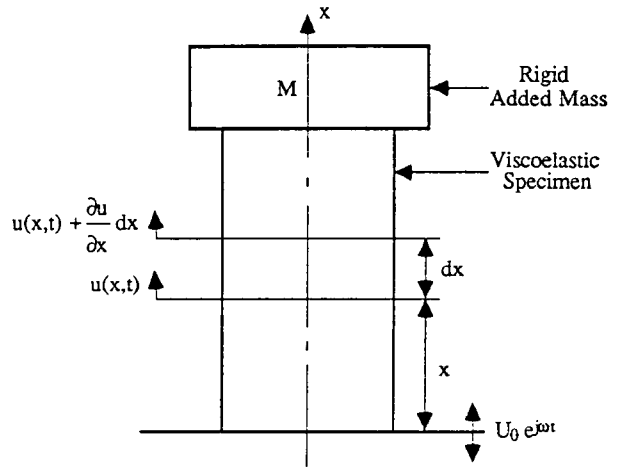


Fig. 1 Transmissibility model of a rod type specimen

켜야 한다.

$$u(x, t) |_{x=0} = U_0 \exp(j\omega t) \quad (2)$$

$$-AE^* \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = M \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \Big|_{x=L} \quad (3)$$

여기서 M 은 시편의 한쪽 끝에 부착된 강체의 질량이고, A 는 시편의 단면적이다. 이 경우 시편 양단의 상대변위의 비인 진동전달율 T^* 는 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$T^* = T e^{j\phi} = \frac{u(x, t) |_{x=L}}{u(x, t) |_{x=L}} = \frac{1}{\cos p^* L - \gamma \sin p^* L} \quad (4)$$

$$\gamma = \frac{M\omega^2}{AE^* p^*} \quad (5)$$

$$p^{*2} = \frac{\rho \omega^2}{E^*} \quad (6)$$

2.2 복소탄성계수의 산출절차

Fig. 1에 보인 바와 같이 막대형 점탄성 시편과 강체 부가 질량으로 구성되는 계의 전달율 측정에 의한 복소탄성계수 산출과정을 요약하면 아래와 같다⁽⁶⁾. 즉 식 (4)를 바꾸어 표현하면 다음과 같다.

$$T = T e^{j\phi} = \frac{1}{\cos \zeta^* - R \zeta^* \sin \zeta^*} \quad (7)$$

여기서

$$\begin{aligned} \zeta^* &= p^* L = \xi - j\beta, \\ j &= \sqrt{-1}, R = \frac{M}{\rho AL}. \end{aligned} \quad (8)$$

위의 식은 복소수식으로서 실수부와 허수부로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_1 &= \cosh\beta (\cos\xi - R\xi \sin\xi) \\ &\quad + R\beta \cos\xi \sinh\beta - T^{-1} \cos\phi = 0 \\ f_2 &= \sinh\beta (\sin\xi + R\xi \cos\xi) \\ &\quad + R\beta \sin\xi \cosh\beta + T^{-1} \sin\phi = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

위의 식은 각 주파수에서 측정된 전달율의 크기 T 와 위상 ϕ 가 주어질 경우 식 (8)에 나타난 ξ 와 β 에 대한 초월함수 연립방정식으로서, 반복계산을 통하여 수치적으로 구해질 수 있다. 여기서 구해진 ξ 와 β 값으로부터 복소탄성계수 E^* 를 구할 수 있다. 한편 복소탄성계수 E^* 는 일반적으로 아래식과 같이

$$E^* = E(1 + j\eta) \quad (10)$$

탄성계수 E 와 손실계수 η 로 표현되는데, 식 (6), (8)로부터 E 와 η 를 ξ 와 β 로 표현하면 아래 식과 같이 얻어진다.

$$E = \rho \omega^2 L^2 \left[\frac{(\xi^2 - \beta^2)}{(\xi^2 + \beta^2)^2} \right]. \quad (11)$$

$$\eta = \frac{2\xi\beta}{\xi^2 - \beta^2}. \quad (12)$$

2.3 전달율 측정시의 랜덤오차에 대한 민감도 분석

복소탄성계수의 추출을 위하여, 막대형 시편의 종방향 진동을 이용한 전달율법을 사용할 때 직접적인 영향을 미치는 인자는 앞서 보인 바와 같이 시편의 질량과 부가질량의 질량비 (R), 전달율의 크기 (T)와 위상 (ϕ)을 들 수 있다. 이들중 부가질량과 시편의 질량, 크기등은 정적인 특성으로서 가진 실험전에 측정할 수 있으므로 측정오차가 적다고 판단된다. 그러나 동적 특성인 전달율의 크기와 위상은 시편을 가진하며 주파수에 따라 측정하여야 하는데, 이때 측정 잡음등에 의한 오차가 클 수 있으므로 복소탄성계수의 추출에서 가장 중요한 인자이다.

복소탄성계수는 측정된 전달율의 크기와 위상으로

부터 직접적으로 구하지 못하고, 앞절의 설명과 같이 우선 수치적으로 중간단계의 매개변수 ξ 와 β 를 구하고 식 (11), (12)로부터 구하게 된다. 이러한 단계에서 전달율 측정시 잡음에 의한 오차는 ξ 와 β 값에 영향을 주게 된다. 마찬가지로 이러한 ξ 와 β 로부터 구한 복소탄성계수는 필히 오차를 갖게 된다.

복소탄성계수의 탄성계수 및 손실계수와 매개변수, 매개변수와 전달율의 함수관계는 식 (9), (11) 및 (12)로부터 유도될 수 있는데, 이를 일반화하면 다음과 같다.

$$E = E(\xi, \beta), \eta = \eta(\xi, \beta) \quad (13)$$

$$\xi = \xi(T, \phi), \beta = \beta(T, \phi) \quad (14)$$

식 (13)과 (14)의 관계로 부터 전달율의 측정오차에 대한 탄성계수와 손실인자의 오차는 다음과 같이 근사화할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta E \\ \Delta \eta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial \xi} & \frac{\partial E}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \xi} & \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial \xi} & \frac{\partial E}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \xi} & \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial T} & \frac{\partial \xi}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \beta}{\partial T} & \frac{\partial \beta}{\partial \phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T \\ \Delta \phi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

E 와 η 의 ξ 와 β 에 대한 미분계수는 식 (11), (12)에서 구하고, ξ 와 β 의 T 와 ϕ 에 대한 미분계수는 식 (9)를 이용하여 구할 수 있다. 이 결과를 식 (15)에 대입하면 그 결과식은 무차원 변수 L/λ 과 손실계수 η , 질량비 R 의 함수로 표현된다(부록 참조). 여기서 λ 는 파장으로서 다음식에 의해 주어진다.

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (16)$$

2.4 전달율 측정오차의 결정

실험으로 전달율을 측정할 때 수반되는 오차는 바이어스 오차(bias error)와 랜덤오차(random error)가 있다. 본 논문에서는 바이어스 오차는 없고 랜덤 오차만 있다고 가정하고, 전달율 및 위상의 랜덤 오차는 편의상 정규분포(normal distribution)를 갖는다고 가정하였다. 이러한 경우 전달율 크기의 95%

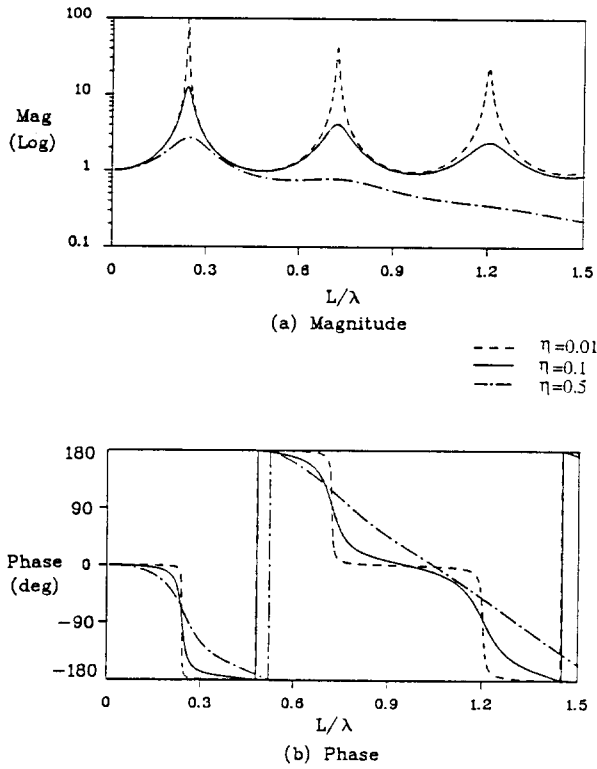


Fig. 2 Transfer function($R=0.04$)

의 신뢰구간 오차는 다음과 같다⁽⁷⁾.

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\varepsilon_t \quad (17)$$

여기서

$$\varepsilon_t = \frac{\sqrt{1-\gamma_{xy}^2}}{|\gamma_{xy}| \sqrt{2n_d}} \quad (18)$$

이며, n_d 는 평균횟수이며, γ_{xy}^2 는 입력과 출력사이의 기여도이다. 비슷한 방법으로 전달율 위상의 95% 신뢰구간 오차 $\Delta\phi$ 는 다음식으로 주어진다.

$$\Delta\phi = 2\varepsilon_t \quad (19)$$

3. 시뮬레이션

측정오차에 따른 복소탄성계수의 민감도는 식

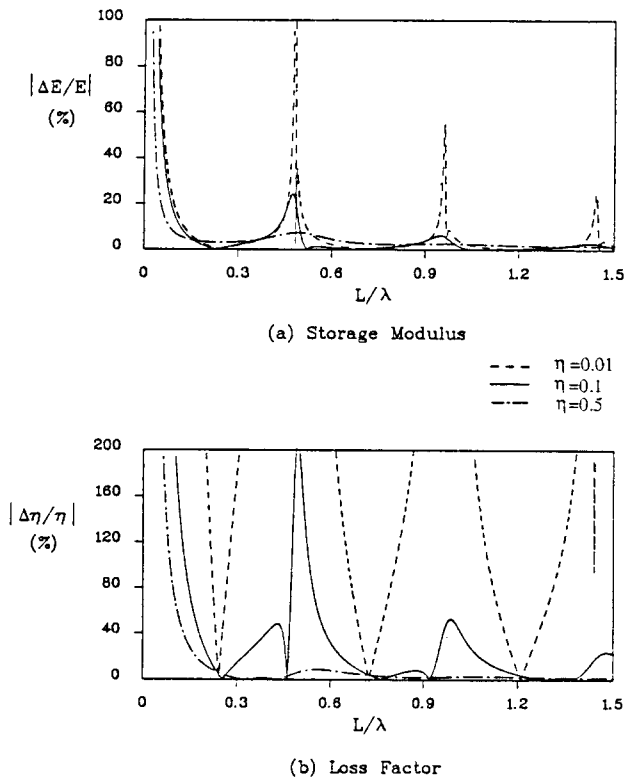
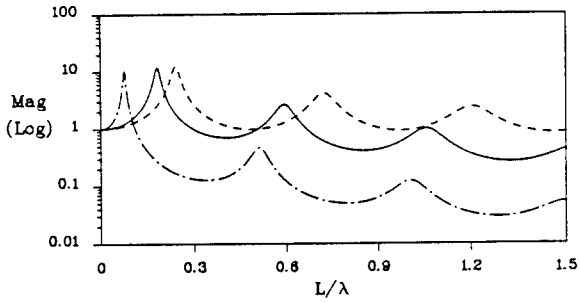


Fig. 3 Error bound of estimated complex modulus($R=0.04$)

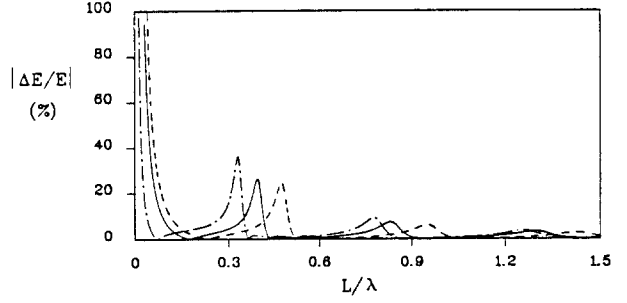
(15)에서와 같이 무차원 변수 L/λ 와 손실계수 η , 질량비 R 의 함수이다. 본 장에서는 이러한 인자들에 대한 복소탄성계수 오차의 민감도를 살펴보기로 한다. 시뮬레이션에서의 랜덤측정오차는 기여도 $\gamma_{xy}^2 = 0.99$, 평균횟수 $n_d = 10$, 그리고 95% 신뢰구간 오차로 정하였다.

손실계수가 복소탄성계수 계산 오차의 민감도에 미치는 영향을 관찰하기 위해 질량비를 0.04로 일정하게 하고, 손실계수가 0.01, 0.1, 0.5로 주파수에 관계없이 일정한 경우, 전달율 함수와 복소탄성계수의 오차를 L/λ 에 대하여 계산하였다(Fig. 2와 3). 그 결과를 살펴보면 손실계수와 작을수록 전달율의 측정오차가 복소탄성계수의 오차에 크게 영향을 주며, 크게 영향을 주는 영역은 L/λ 이 첫번째 공진점보다 매우 낮은 ($L/\lambda < 1.5$) 저주파 영역과 공진점 사이의 반공진 영역이다. 또한 L/λ 이 증가함에 따라 그 영향은 감소함을 알 수 있다. 반공진 영역에서 측정오차에 대한 복소탄성계수의 민감도가 큰 이유는 부록의 식 (B4)의 값이 0에 근접하기 때문에 측정오차에 대한 계수, 즉 식 (B3)의 값이 커지기 때문이다.



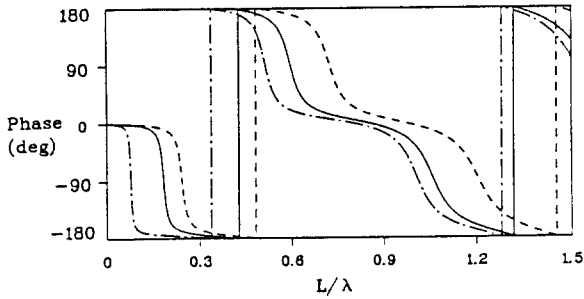
(a) Magnitude

--- R=0.04
 — R=0.4
 - · - R=4

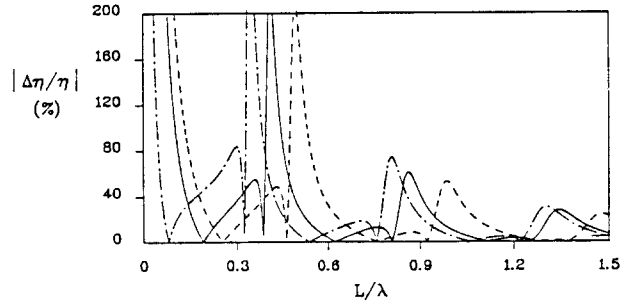


(a) Stroage Modulus

--- R=0.04
 — R=0.4
 - · - R=4



(b) Phase



(b) Loss Factor

Fig. 4 Transfer function($\eta = 0.1$)

Fig. 5 Error bound of estimated complex modulus($\eta = 0.1$)

Fig. 4와 5는 질량비가 복소탄성계수 계산오차의 민감도에 미치는 영향을 보기 위해 손실계수를 0.1로 일정하게 하고, 질량비가 0.04, 0.4, 4인 경우의 계산 결과이다. 질량비가 커지면 전달율 함수의 공진주파수가 저주파수 영역으로 내려가지만, 측정오차에 의한 복소탄성계수 계산값의 오차 경향은 앞의 경우(Fig. 2와 3)와 비슷한 것을 알 수 있다. 따라서 실제 실험시 질량비를 달리하여 전달율을 측정하면, 측정오차에 민감한 영역이 서로 다르므로 각 실험결과로부터 측정오차에 민감하지 않은 주파수영역에서만 시편의 복소탄성계수를 구하여, 그 값들을 종합하면 실험한 전 주파수 영역에서 신뢰성있는 시편의 복소탄성계수를 구할 수 있다. 그러나 질량비가 커지면 고주파수 영역에서 측정신호가 작아지기 때문에 잡음에 의한 영향을 고려하여야 한다.

4. 실험

4.1 실험장치 및 방법

실험장치의 구성도는 Fig. 6이다. 실험에 사용된

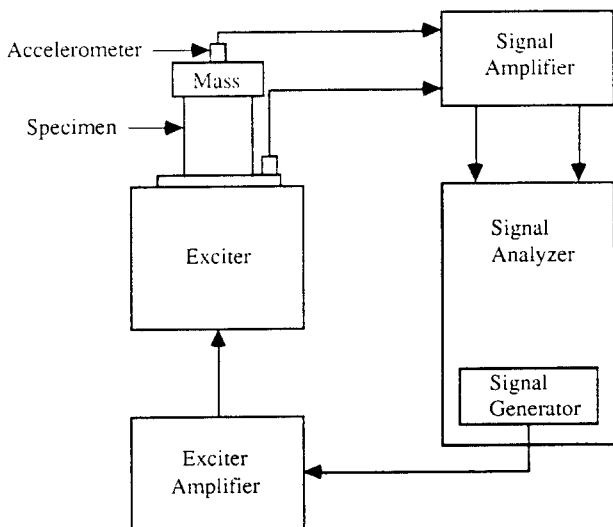


Fig. 6 Schematic diagram of experiment

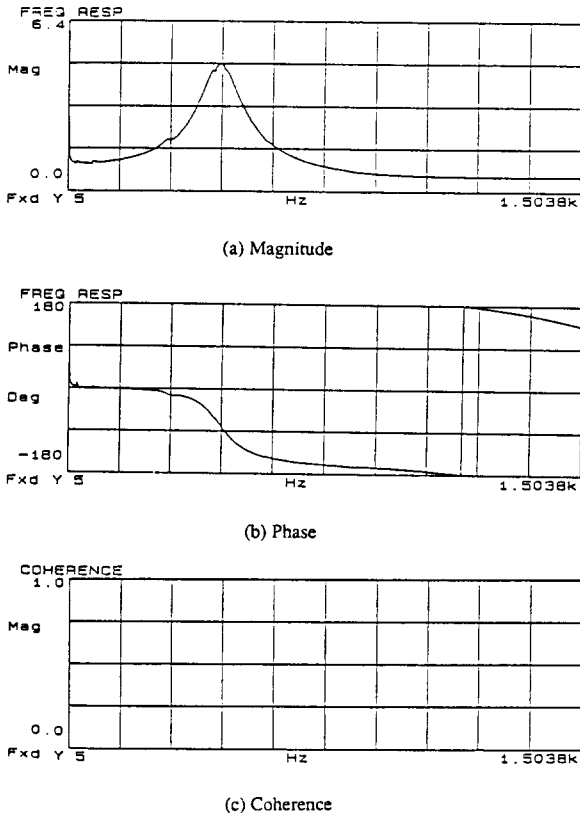


Fig. 7 Transfer function of experiment

고무 시편은 네오프렌(Neoprene)이며, 경도 (DU RO) 60, 밀도 $1335(\text{kg}/\text{m}^3)$, 직경 25(mm), 길이 40(mm), 부가 질량은 16(g)이다($R=0.61$). 가진신호는 신호분석기에 내장되어 있는 신호발생기를 이용하여 sine sweep하였으며, 주파수 해상도는 1.8735Hz 이고 각 측정점마다 데이터를 10번 평균하였다. 실험시의 온도는 15°C 였다. 시편의 양단은 순간접착제를 사용하여 부착시켰고, 측정 신호는 가속도를 측정하였으며, 주파수에 대한 전달율의 실수값과 허수값을 가지고 복소탄성계수를 구하였다.

4.2 실험결과

전달율법에 의하여 실험한 전달율 함수와 기여도는 Fig. 7과 같다. 첫번째 공진주파수는 450Hz 이며, 위상이 -180 도를 지나는 주파수는 1157Hz 이고, 실험 결과의 기여도는 0.99정도이다. 기초이론 모형을 이용하여 구한 복소탄성계수는 Fig. 8(실선)과 같다. 그 결과를 보면 첫번째 공진주파수보다 낮은 저주파

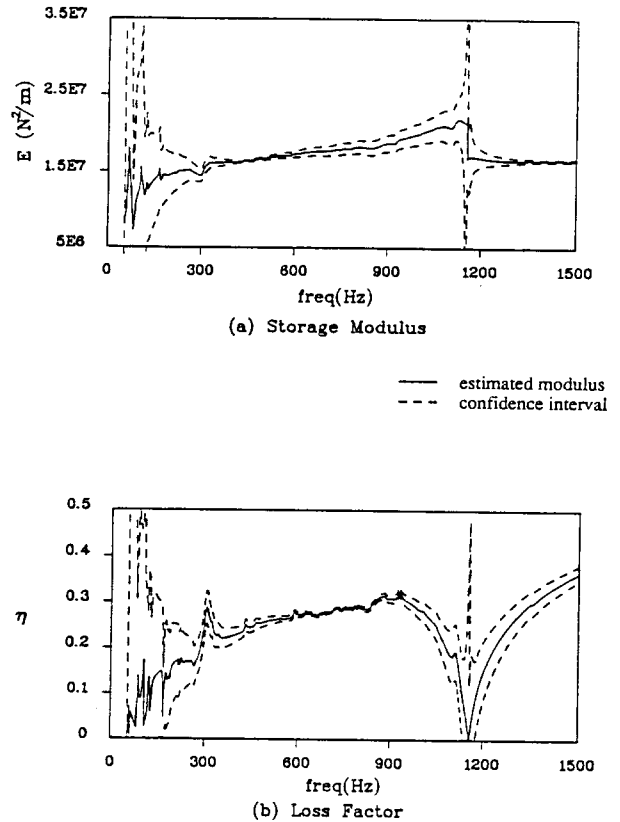


Fig. 8 Estimated complex modulus and confidence interval(95%)

수 영역(200Hz 이하)에서 계산된 복소탄성계수의 값이 불규칙하게 나타나고 있는데, 이것은 3장의 Fig. 3에서 주파수가 영부근의 저주파일때 측정오차에 대한 복소탄성계수의 민감도가 매우 큰 것과 일치하는 현상이다. 또한 반공진 영역(1150Hz 부근)에서는 복소탄성계수의 값이 불연속성을 보이고 있는데, 이러한 현상도 측정오차가 복소탄성계수의 계산값에 영향을 주어서 나타난 현상이며, Fig. 3에서 고찰한 바와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 95%의 신뢰구간 측정오차로부터 산출된 복소탄성계수의 신뢰구간은 Fig. 8(점선)과 같다. 손실계수의 신뢰구간을 살펴보면 공진주파수보다 약간 높은 주파수 범위에서 신뢰도가 가장 좋은 것으로 나타나는데, 이것은 Fig. 3(b)에서 관찰할 수 있듯이 손실계수가 커지면 손실계수의 측정오차에 대한 민감도가 급격히 감소함에 따른 현상이라고 판단된다. Fig. 9는 측정오차에 대한 복소탄성계수의 계산오차가 10%이내의 주파수 영역 및 해당영역에서의 물성치를 나타냈다.

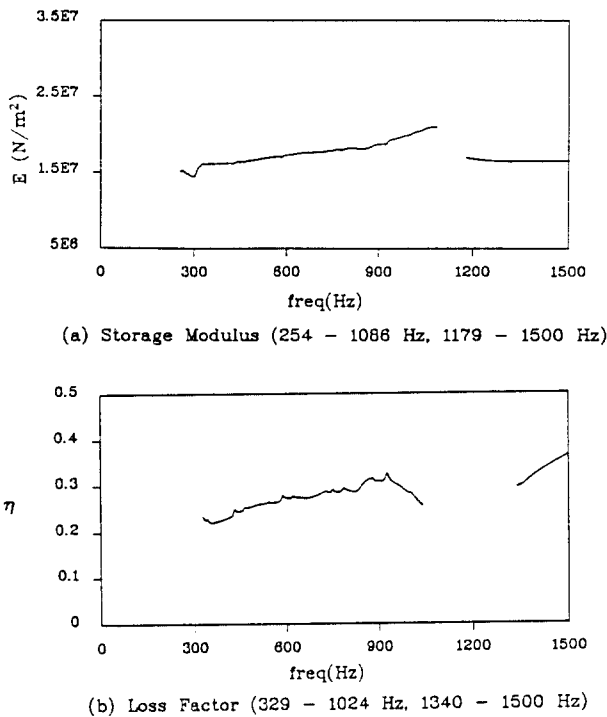


Fig. 9 Estimated complex modulus and frequency range(10% confidence level)

5. 결 론

막대형 점탄성재료 시편에 대하여 종방향 전달율을 측정하고, 이에 대하여 종방향 진동의 기초적 연속체 이론 모형을 적용함으로써 복소탄성계수를 구하고자 할 때, 실험단계에서 발생할 수 있는 전달율의 측정 오차가 복소탄성계수 추정에 미치는 영향을 조사하였다.

시뮬레이션(Fig. 3, 5) 및 실험결과(Fig. 8)에 의하면 주파수가 0에 가까워지는 영역 및 반공진 주파수 주위에서는 조그만 오차에 의해서도 복소탄성계수의 추정이 매우 부정확해질 수 있음을 보였는데, 이는 해당주파수 영역에서는 시편의 변형이 거의 없기 때문이다. 한편 부가질량과 시편질량의 비를 변화시키면 전달율의 크기와 함께 반공진점 주파수의 위치도 변화하기 때문에, 질량비의 적절한 조정으로 관심 주파수 영역에서 측정오차에 의한 영향을 감소시킬 수 있다. 손실계수는 반공진점주파수 위치의 변화와는 무관하지만 전달율 위상의 굴곡도와 관련되어, 그 크기의 증가에 따라 측정오차의 영향이 감소하는 것을 알 수 있다. 랜덤측정오차와 관련하여서는 산출된 복소탄성계수가 설정된 오차범위내에 있게되는 주파

수범위도 쉽게 구할 수 있음도 보였다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 첨단요소기술연구사업과 국방과학연구소 장기기초연구사업에 의해 부분적으로 지원받아 수행되었으며, 또한 유니슨산업(주)으로부터도 도움을 받았음을 밝힙니다. 관계되는 분들께 감사를 포함합니다.

참 고 문 헌

- (1) Walter M. M. Madigosky and Gilbert F. Lee, "Improved Resonance Technique for Materials Characterization", J. Acoust. Soc. Am., 73(4), April, 1983.
- (2) T. Pritz, "Apparent Complex Young's Modulus of a Longitudinally Vibrating Viscoelastic Rod", J. of Sound and Vibration, 77(1), pp.93~100, 1981.
- (3) T. Pritz, "Transfer Function Method for Investigating the Complex Modulus of Acoustic Materials: Rod-like Specimen", J. of Sound and Vibration, 81(3), pp.359~376, 1982.
- (4) 심 송, "점탄성재료의 복소영계수 및 유한요소법의 응용을 위한 포아송비 추출방법", 한국과학기술원 생산공학과 박사학위 논문, 1991.
- (5) 강기호, 심 송, 김광준, "집중질량 모형화에 의한 점탄성재료의 복소탄성계수 산출을 위한 시편 크기의 결정", 한국소음진동공학회지, 제1권 제2호, 1991.
- (6) Buchanan, J. L., "Numerical Solution for the Dynamic Moduli of a Viscoelastic bar", J. of Acoust. Soc. Am., Vol. 81, pp.1775~1786, 1987.
- (7) J. S. Bendat and A. G. Piersol, "Random Data", 2nd ed., John Willey & Sons, 1986.

부 록

A. 식 (4), (7)의 유도 과정

식 (1)을 만족하는 해를 아래와 같이 가정한다.

$$u(x, t) = [C_1 \sin p^* x + C_2 \cos p^* x] \exp(j\omega t) \quad (A1)$$

식 (2), (3)의 경계조건으로부터 C_1 과 C_2 를 구하면,

진동전달을 T^* 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 T &= T e^{j\phi} = \frac{u(x, t) |_{x=L}}{u(x, t) |_{x=0}} \\
 &= \left[U_0 \frac{AE^* p^* \sin p^* L + M \omega^2 \cos p^* L}{AE^* p^* \cos p^* L - M \omega^2 \sin p^* L} \sin p^* L \right. \\
 &\quad \left. + U_0 \cos p^* L \right] / U_0 \\
 &= \left[\sin p^* L + \frac{M \omega^2}{AE^* p^*} \cos p^* L \right] / \\
 &\quad \left[\cos p^* L - \frac{M \omega^2}{AE^* p^*} \sin p^* L \right] \sin p^* L \\
 &\quad + \cos p^* L \\
 &= \left[\sin p^* L (\sin p^* L + \gamma \cos p^* L) \right. \\
 &\quad \left. + \cos p^* L (\cos p^* L - \gamma \sin p^* L) \right] / \\
 &\quad (\cos p^* L - \gamma \sin p^* L) \\
 &= \frac{1}{\cos p^* L - \gamma \sin p^* L} \tag{A2}
 \end{aligned}$$

위에서

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \frac{M \omega^2}{AE^* p^*} = \frac{M}{AE^* p^*} \frac{E^*}{\rho} p^{*2} \\
 &= \frac{M}{\rho AL} p^* L = R p^* L \tag{A3}
 \end{aligned}$$

B. 식 (15)의 유도 과정

식 (15)의 자세한 유도 과정은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial T} & \frac{\partial \xi}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \beta}{\partial T} & \frac{\partial \beta}{\partial \phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T \\ \Delta \phi \end{bmatrix} \tag{B1}$$

식 (9)에서 다음과 같은 관계식이 유도된다.

$$\frac{\partial f_1}{\partial T} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial T} + \frac{\partial f_1}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial T} + \frac{\partial f_1}{\partial T} = 0 \tag{B2}$$

마찬가지 방법으로 아래의 관계가 유도된다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial T} \\ \frac{\partial \beta}{\partial T} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial T} \\ \frac{\partial f_2}{\partial T} \end{bmatrix} \tag{B3}$$

$$\text{단 } \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta} \end{bmatrix} \neq 0 \tag{B4}$$

따라서 식 (11), (12)와 (B3)를 이용하면 식 (15)를 계산할 수 있다. 또한 식 (15)는 ξ, β, η, R, E 의 함수이다.

C. 식 (15)와 L/λ 과의 관계

$$\zeta^* = p^* L = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega L = 2\pi \frac{1}{\sqrt{1+j\eta}} \frac{L}{\lambda} \tag{C1}$$

$$\xi = \left[\frac{\sqrt{1+\eta^2} + 1}{2(1+\eta^2)} \right]^{1/2} (2\pi) \left(\frac{L}{\lambda} \right) \tag{C2}$$

$$\beta = \left[\frac{\sqrt{1+\eta^2} - 1}{2(1+\eta^2)} \right]^{1/2} (2\pi) \left(\frac{L}{\lambda} \right) \tag{C3}$$

$$\rho \omega^2 L^2 = (2\pi)^2 E \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2 \tag{C4}$$

위의 관계들로부터 식 (15)는 η 와 R, E 가 일정하다면, L/λ 만의 함수이다.