

(論 文)

調和集中荷重을 받는 無限보에서의 音響放射

Sound Radiation From Infinite Beams Under the Action of Harmonic Point Forces

김 병 삼* · 홍 동 표**

Byoung Sam Kim and Dong Pyo Hong

(1991년 11월 6일 접수 ; 1992년 2월 24일 심사완료)

ABSTRACT

The problem of sound radiation from infinite elastic beams under the action of harmonic point forces is studied. The reaction due to fluid loading on the vibratory response of the beam is taken into account. The beam is assumed to occupy the plane $z=0$ and to be axially infinite. The beam material and the elastic foundation are assumed to be lossless and Bernoulli-Euler beam theory including a tension force (T), damping coefficient (C) and stiffness of foundation (k_s) will be employed. The non-dimensional sound power is derived through integration of the surface intensity distribution over the entire beam. The expression for sound power is integrated numerically and the results are examined as a function of wavenumber ratio (γ) and stiffness factor (Ψ). Here, our purpose is to explain the response of sound power over a number of non-dimensional parameters describing tension, stiffness, damping and foundation stiffness.

기 호 설 명

C : 기초 감쇠 계수
 C_0 : 음향 매질의 음속
 C_1 : 보의 종방향 파동 속도
 D : 보의 굽힘 강성
 F_0 : 입력 하중 진폭
 K_0 : 음향 파수 (ω/C_0)
 K_b : 굽힘 파수
 k_s : 기초 강성 계수
 $P(x)$: 표면 압력
 $p(x, z=0, t)$: 보 표면에서의 압력
 T : 보에 작용하는 축 장력
 T_1 : 축 인장 계수

$u(x, t)$: 보의 횡변위
 $V^*(x)$: 공액 표면 속도
 Z_a : 음향 임피던스
 Z_b : 보의 임피던스
 α_0 : 유체 하중 계수
 β : 무차원 기초 감쇠 계수
 $\delta(x)$: Dirac delta 함수
 ρ_0 : 음향 매질의 비중
 $\rho_s A$: 보의 단위 길이당 질량
 γ : 波數 比
 ω : 구동 주파수
 Ψ : 무차원 기초 강성 계수

1. 서 론

구조물의 진동에 의해 발생하는 음향 방사에 관한

*全北大學校 大學院 精密機械工學科

**全北大學校 工科大學 精密機械工學科

연구가 최근 중요시 되고 있다. 대기나 수중에서 구조물의 진동에 의해 발생하는 음향 방사에 관한 연구는 기계적인 시스템의 해석과 설계에 응용되고 있으며, 상대적인 음향파위의 계산으로 비행기나 선박, 잠수함, 레일위를 달리는 기차, 승용차 타이어의 트레드 밴드등에서 발생하는 소음문제를 해결할 수 있게 되었다.

M.I. Mogilevskii⁽¹⁾는 지지 기반을 고려하지 않은 무한 판에 일정한 속도의 조화 집중 하중이 가해질 때의 음향 방사에 관하여 연구 하였고, Keltie와 Peng^(2,3,4,5)은 구조감쇠가 있는 무한보에 조화 집중 하중과 분포 하중등이 작용할 때, 하중길이와 기초 강성, 하중의 이동속도의 영향에 대하여 연구하였다.

본 연구에서는 조화 집중 하중을 받는 무한 보에 기초강성, 기초감쇠, 인장력 등을 고려하여 음향 파위를 해석하고자 하였다. 음향파위는 수치적으로 적분하고 몇 가지 인자들의 함수로써 적분인자를 표시하였다. 음향 매질은 가벼운 유체와 무거운 유체로 분리하여 고려하였고, 보의 전 범위에 대한 표면 음향 세기를 적분하여 조화 집중 하중을 받는 무한보에서 방사된 음향파위를 해석하고, 이것을 무차원화하여 무차원 인자들의 변화가 음향파위 응답에 미치는 효과를 구하고자 하였다.

2. 음향 파워 이론식

Fig. 1에서 보는 것처럼 집중 하중에 의해서 가진 되는 보에서 방출하는 음향파위를 예측하고자 한다. 보의 표면을 $Z=0$ 으로 놓고 보의 길이 방향이 무한하며, 조화적으로 진동하는 집중하중에 의해 보가 가진된다고 가정한다.

$Z>0$ 공간에 음향매질이 존재한다. 그리고 Fig. 1에서 보는 것처럼 기초 위에 스프링과 감쇠를 갖고 장력을 받는 무한 길이의 보로 고려한다. 이 무한 탄성 보에 대한 운동 방정식은

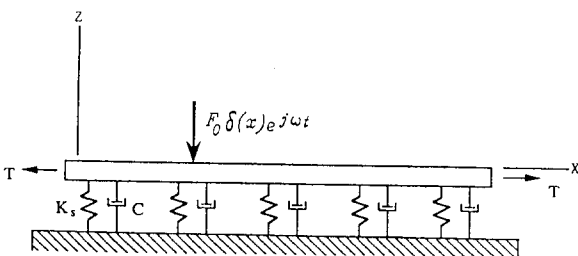


Fig. 1 Beam on the elastic foundation with point force.

$$D \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho_s A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C \frac{\partial u}{\partial t} + k_s u = -F_0 \delta(x) e^{j\omega t} - p(x, z=0, t) \quad (1)$$

여기서,

$u(x, t)$: 보의 횡변위

ω : 구동 주파수

D : 보의 굽힘강성

$p(x, z=0, t)$: 보 표면에서의 압력

$\rho_s A$: 보의 단위 길이당 질량

T : 보에 작용하는 축 장력

C : 기초 감쇠 계수

k_s : 기초 강성

F_0 : 입력 하중 진폭

$\delta(x)$: Dirac delta 함수

진동하는 보에 의해 음향매질에서 발생하는 압력 분포를 $p(x, z, t)$ 로 표시하면 다음과 같이 이차원 공간상에서 음파 방정식을 만족한다.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] p(x, z, t) = 0 \quad (2)$$

여기서 c_0 는 음향매질의 음속이고 음압은 선형 방정식을 만족할 정도로 충분히 작으며, $z>0$ 공간에 음원은 존재하지 않는 것으로 가정한다. $Z=0$ 인 보의 표면에서는 보의 운동과 매개체의 운동이 같아야 하므로 경계 조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad (3)$$

여기서 ρ_0 는 음향매질의 질량 밀도이다. 일차원 또는 이차원 표면에서의 공간좌표의 후리에 변환 (Fourier transform)을 이용하여 음향파위를 구할 수 있으며, 공간좌표의 후리에 변환을 다음과 같이 정의하고

$$FT(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{j\xi x} dx,$$

이것을 적용하여 다시 식을 유도해 본다. 여기서 ξ 는 파수 변수이다. 파수 영역에서의 힘 함수를 구하면

$$F(\xi, t) = F_0 e^{j\omega t}$$

파동 방정식 (2)와 경계 조건 (3)을 대입하여 파수 영역에서의 음압을 계산하면

$$p(\xi, z=0) = Z_a U(\xi)$$

그리고 이 식을 보의 운동 방정식 (1)에 대입하면

$$U(\xi) = \frac{F_0}{Z_b + Z_a}$$

여기서,

Z_b 는 보의 임피던스,

Z_a 는 음향 임피던스이고,

$$Z_b = [D\xi^4 - \rho_s A \omega^2 + T\xi^2 + k_s] + j[\omega C]$$

$$Z_a = \frac{j\rho_0 \omega^2}{\sqrt{K_0^2 - \xi^2}}$$

또, K_0 는 음향 파수(ω/c_0)이며, $K_0^2 - \xi^2 \geq 0$ 일 때는 관성 또는 질량으로 작용하고, $K_0^2 - \xi^2 < 0$ 일 때는 감쇠로 작용한다⁽⁶⁾.

전체적인 음향 파워를 구하기 위해, 표면 음향세기 분포가 보의 무한 길이에 대하여 적분되어야 한다.

음향 세기(Intensity)를 구하면

$$I(x) = \frac{1}{2} \text{Re}\{P(x) V^*(x)\}$$

여기서, $P(x)$ = 표면 음압

$V^*(x)$ = 공액 표면 속도

음향 파워를 계산하면

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} P(x) V^*(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\xi_1) e^{-j\xi_1 x} d\xi_1 \right] \right. \\ &\quad \cdot \left. \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V^*(\xi_2) e^{j\xi_2 x} d\xi_2 \right] dx \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \text{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} P(\xi) V^*(\xi) d\xi \right] \end{aligned}$$

이 음향 파워를 다시 쓰면

$$W = \frac{\rho_0}{4\pi} \text{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{\sqrt{K_0^2 - \xi^2}} |U(\xi)|^2 d\xi \right]$$

적분값이 실수이기 위한 적분 구간은

$$K_0^2 - \xi^2 \geq 0, \quad -K_0 \leq \xi \leq K_0$$

이 음향 파워를 무차원화 하기 위하여 $\xi \rightarrow K_0 \zeta$ 로 치환하면

$$W = \frac{\rho_0 F_0^2}{4\pi (\rho_s A)^2 \omega} \Pi$$

그러므로

$$\Pi = \int_{-1}^1 \frac{d\zeta}{\left[\left[(\gamma^4 \zeta^4 + 2T_1 \gamma^2 \Psi \zeta^2 - 1^2 + \Psi^2) \right]^2 + [2\beta \Psi + \alpha_0 / (\gamma^2 \sqrt{1 - \zeta^2})]^2 \right] \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (4)$$

무차원화한 식 (4)에서 $\gamma = K_0/K_b$ 는 굽힘파수(Bending wavenumber)에 대한 음향파수(Acoustic wavenumber)의 비이고, $k_b = (\rho_s A \omega^2 / D)^{1/4}$ 은 자유 굽힘파수(Free bending wavenumber), $\alpha_0 = \rho_0 c_0 / \rho_s A c_0 \sqrt{12}$ 는 유체하중계수(Fluid loading factor), ρ_0 는 유체의 체적밀도, c_0 는 보의 종방향 파동속도이며, Ψ 는 기초 강성 계수, $T_1 = T / (2\sqrt{k_s D})$ 는 축인장 계수, 그리고 $\beta = C / (2\sqrt{\rho_s A k_s})$ 는 기초 감쇠계수이다.

$\gamma \ll 1$ 인 경우의 근사해

저주파수의 영역에서 무차원 음향 파워는

$$\Pi \sim \int_{-1}^1 \frac{d\zeta}{\left[(\Psi^2 - 1)^2 + [2\beta \Psi + \alpha_0 / (\gamma^2 \sqrt{1 - \zeta^2})]^2 \right] \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

(1) 저주파 영역에서의 가벼운 유체 하중을 받는 경우($\alpha_0 / \gamma^2 \ll 1$)

$$\Pi \sim \frac{1}{\left[(\Psi^2 - 1)^2 + (2\beta \Psi)^2 \right]} \int_{-1}^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (5)$$

$\zeta = \sin \theta$ 로 치환하면

$$\int_{-1}^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \pi$$

이므로

$$\Pi \sim \frac{\pi}{\left[(\Psi^2 - 1)^2 + (2\beta \Psi)^2 \right]}$$

이때 $\beta = 0, \Psi \ll 1$ 인 경우

$$\Pi \sim \pi$$

(2) 무거운 유체 하중을 받는 경우($\alpha_0 / \gamma^2 \gg 1$)

이때 β 와 $\Psi \ll 1$ 이라고 하면

$$\Pi \sim \frac{\gamma^4}{\alpha_0^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \zeta^2} d\zeta = \frac{\gamma^4}{\alpha_0^2} \pi \quad (6)$$

식 (5)와 식 (6)는 가벼운 유체 하중(예: 공기)와 무거운 유체 하중(예: 물)을 받는 보의 음향 파워이다.

3. 수치 해석 결과와 논의

식 (4)의 무차원 음향파워 적분을 대기 또는 물속에서 진동하는 강철의 경우에 대하여 여러가지 무차원 변수들을 가지고 수치적분 하였다.

강철은 $E = 2 \times 10^{11} (N/M^2)$ 그리고 $\rho_s = 7800 (kg/M^3)$ 이고, 물속인 경우에 $c_0 = 1460 (M/S)$, $\rho_0 = 1000 (kg/M^3)$; 대기인 경우에 $c_0 = 343 (M/S)$, $\rho_0 =$

1.24(kg/M³)이다.

저주파수에서 구한 근사해를 수치적분의 결과와 비교해 보면, 식 (6)의 저주파수 영역에서의 무거운 유체하중을 받는 보에서 방사하는 음향파위의 값 (γ^4/α_0^2) π 는 Fig. 2에서 보이는 값들과 잘 일치한다.

여기서, $\gamma = k_0/k_b$ 는 굽힘파수에 대한 음향파수의 비이고, $k_b = (\rho_s A \omega^2 / D)^{1/4}$ 은 자유굽힘파수, $\alpha_0 = \rho_0 c_1 / \rho_s A c_0 \sqrt{12}$ 는 유체하중계수이다.

음향파위에 대한 강성계수와 파수 비의 효과를 연구하기 위해 x 축을 파수 비, y 축을 강성계수 그리고

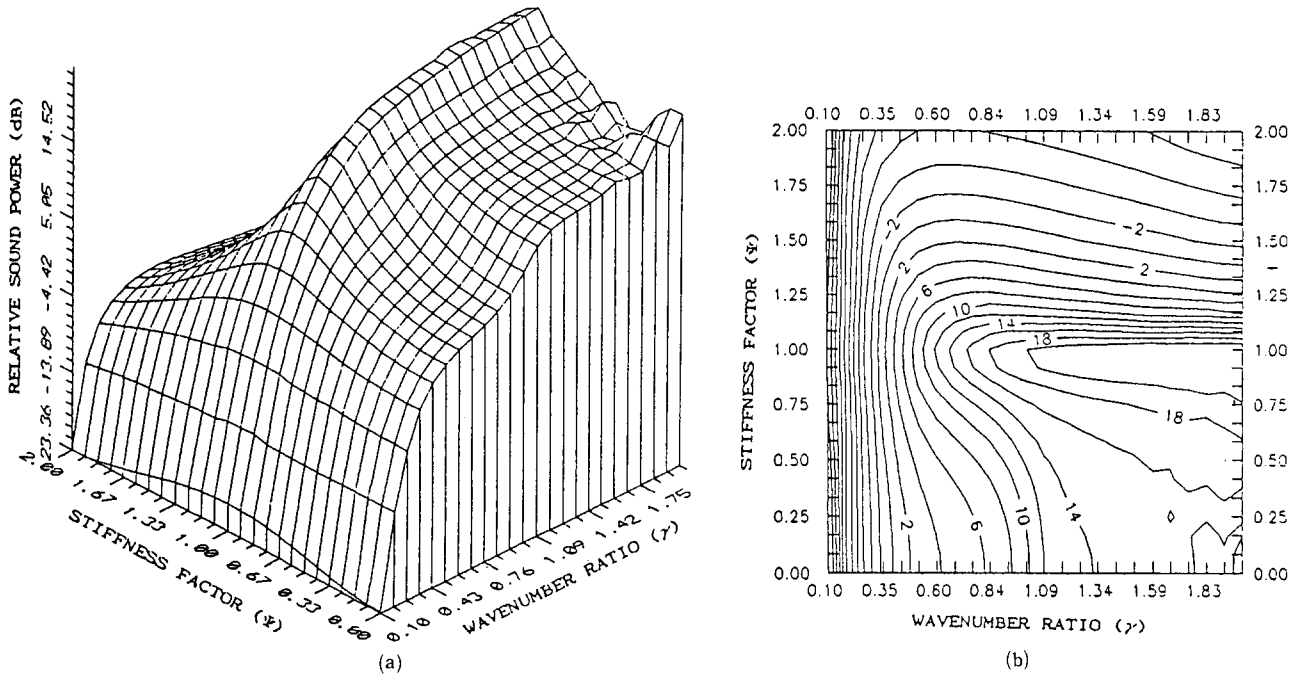


Fig. 2 (a) Relative sound power versus stiffness factor and wavenumber ratio for water loading.
(b) Contour Line : $T_1=0, \beta=0$

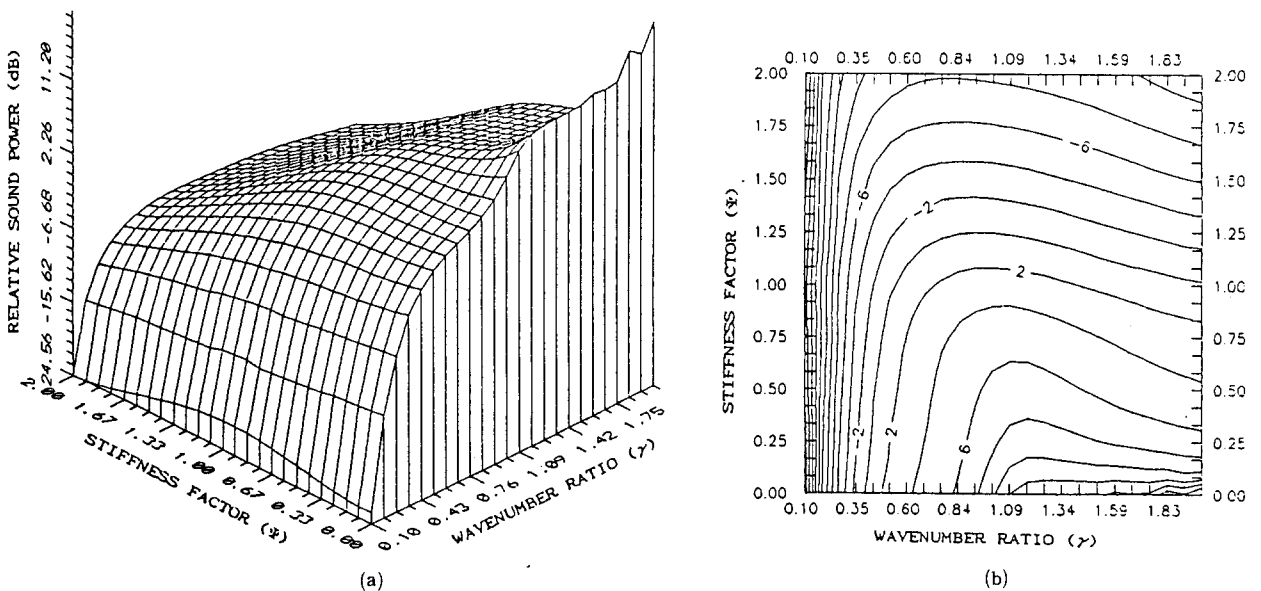


Fig. 3 (a) Relative sound power versus stiffness factor and wavenumber ratio for water loading.
(b) Contour Line : $T_1=0, \beta=0.5$

z축을 상대적인 음향파워로 3차원으로 나타내었다.

Fig. 2와 같은 물 하중이 작용하는 경우에 보에서 방사하는 음향파워 레벨은 파수비(γ) > 0.3 그리고 강성계수(Ψ) = 1인 경우에 Peak가 발생하는데 이것을 공진 방사(Resonance Radiation)이라고 부른다.

이 경우는 구동 주파수가 보진동의 고유 진동수에 접근되어 발생한다. Fig. 2(b)의 등고선(Contour Line)을 보면 $\Psi < 1$ 에서는 파수비가 증가하면 음향파워레벨이 증가하지만, $\Psi > 1$ 에서는 고주파수 부근에서 음향파워 레벨이 감소한다는 것을 알 수 있다.

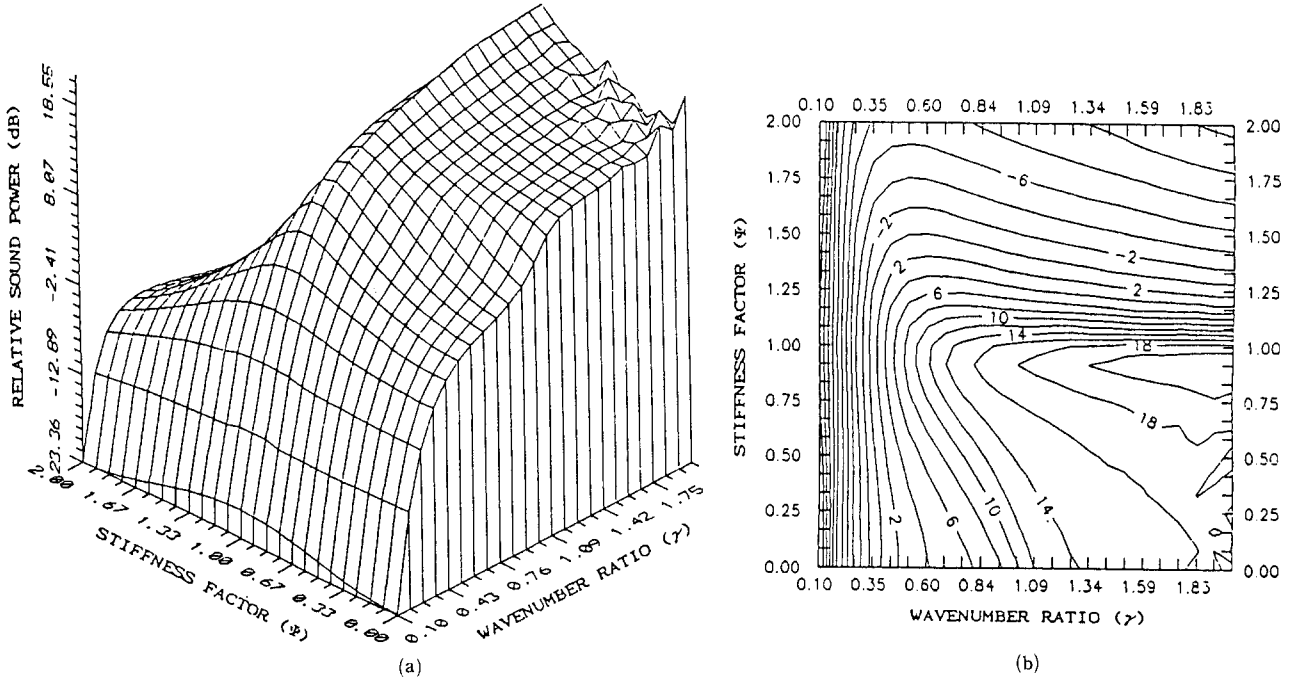


Fig. 4 (a) Relative sound power versus stiffness factor and wavenumber ratio for Water loading.
(b) Contour Line : $T_1=0.8$, $\beta=0$

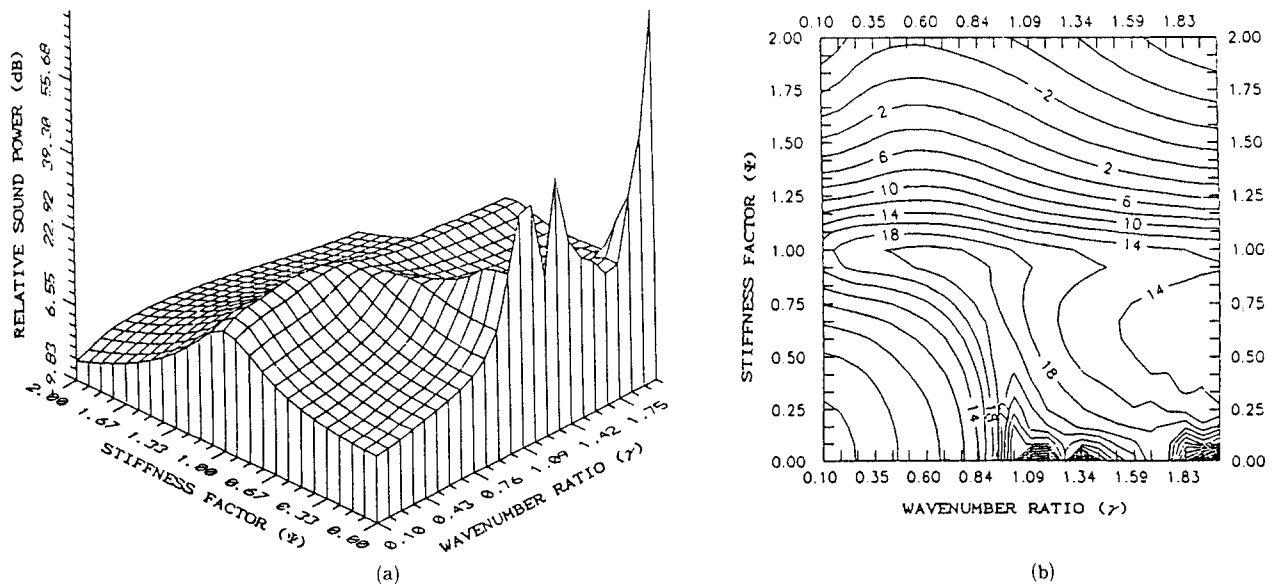


Fig. 5 (a) Relative sound power versus stiffness factor and wavenumber ratio for air loading.
(b) Contour Line : $T_1=0$, $\beta=0.1$

그러나 Fig. 3에서 보는 것처럼 보에 감쇠가 작용하는 경우에는 $\Psi=1$ 부근에서의 음향파워 레벨이 감소된다는 것을 알 수 있다.

Fig. 4에서는 인장력이 보에 작용하는 경우로, $\Psi=1$ 인 점에서의 상대적인 음향 파워의 Peak 값이 $\Psi < 1$ 근처에서 Peak가 발생하고, 압축력이 작용하는 경우에는 $\Psi > 1$ 근처에서 Peak가 발생한다는 것

을 알았다.

Fig. 5는 공기 하중을 작용하는 경우에 보에서 방사하는 상대적인 음향파워로, 물 하중에서의 상대적인 음향파워보다 높다는 것을 알 수 있다. 또한, $\gamma > 1$ 부근에서 일치 효과(Coincidence Effect)가 발생한다는 것을 알 수 있고, 1, 2차 일치 효과값은 거의 같고, 3차 일치 효과값은 상당히 커졌다. 이것은 Ψ

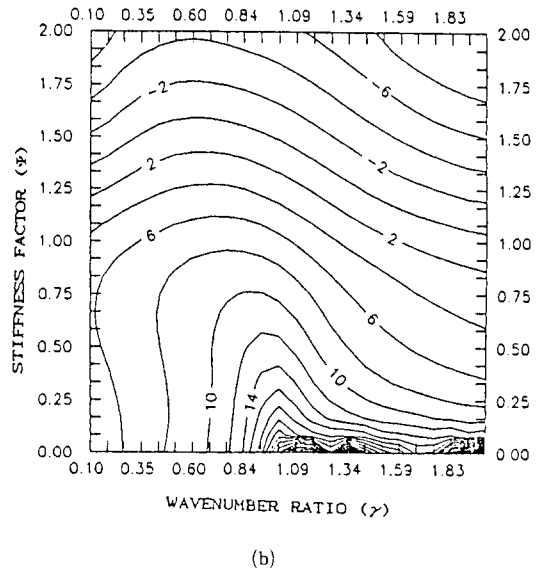
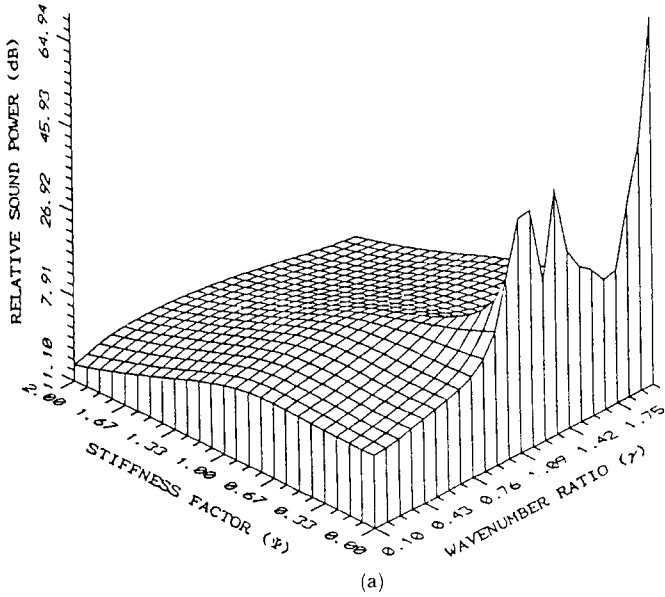


Fig. 6 (a) Relative sound power versus stiffness factor and wavenumber ratio for air loading.
(b) Contour Line : $T1=0, \beta=0.5$

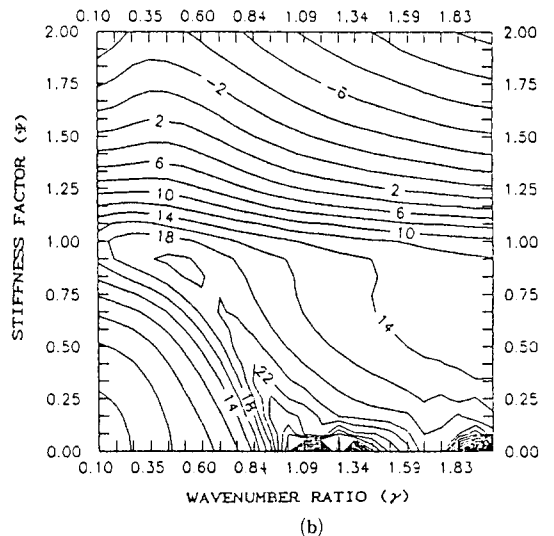
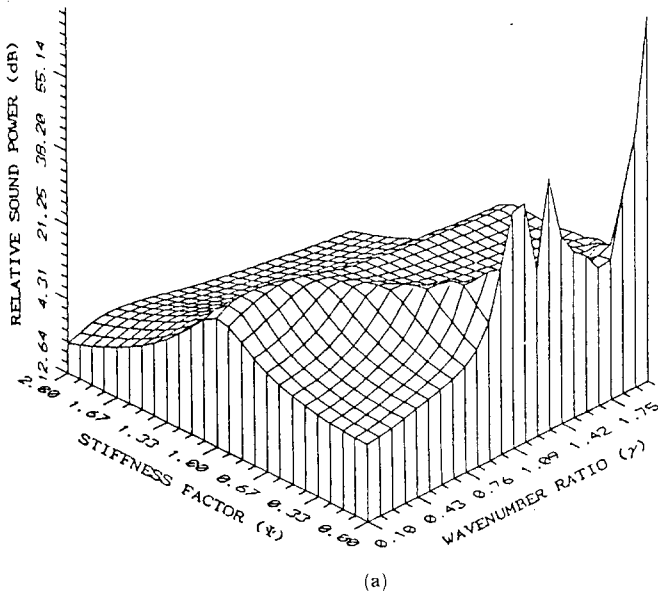


Fig. 7 (a) Relative sound power versus stiffness factor and wavenumber ratio for air loading.
(b) Contour Line : $T1=0.8, \beta=0.1$

=0인 경우이며, $\psi > 0$ 일 때 일치 효과값은 감소 하였다.

Fig. 6은 공기 하중을 받는 보에 감쇠를 가한 경우로 상대적인 음향파워 레벨이 감소하게 되며, 이 결과로부터 공기 하중을 받는 보라도 큰 감쇠가 작용하는 경우에는 물 하중을 받는 보의 경우와 같은 결과를 예측 할 수 있다.

Fig. 7는 공기 하중을 받는 보에 인장력을 받는 경우로, $\psi < 1$, $\gamma > 1$ 인 부근에서 상대적인 음향파워 레벨이 커지고, 압축력을 받을 때는 $\psi > 1$, $\gamma > 1$ 인 부근에서 상대적인 음향파워 레벨이 커지는 것을 알 수 있다.

물 하중이 작용하는 경우 보에서 음향파워 방사의 경우, 일치 효과가 발생하지 않는 이유는 구조물의 파장당 구조적 에너지가 음파 에너지로의 변환되는 비율이 공기에 비하여 상당히 크므로 구조물로부터 에너지가 빠르게 방사되고, 이 결과로 구조 감쇠 효과가 커진다. 반면, 공기 하중이 작용하는 경우 보에서는 이 비율이 작기 때문에 감쇠 효과가 적어 일치 효과(Coincidence Effect)가 발생한다.

4. 결 론

무한 보에 조화 집중 하중이 가해질 때의 음향 방사에 관한 연구로, 본 논문에서는 무한 보에 굽힘강성, 장력, 기초강성, 감쇠등의 영향을 고려하여 다 음과 같은 결론을 구할 수 있었다.

(1) $\psi = 1$ 인 경우에는 고유진동수와 구동 진동수가 일치하는 것으로, 공진 방사(Resonance Radiation)에 의해 Peak값이 발생한다.

(2) 보에 감쇠가 작용하는 경우에는 유체하중에 관계없이 상대적인 음향 파워의 레벨이 감소한다.

(3) 보에 인장력이 작용하는 경우에는 상대적인 음향파워의 레벨이 증가하여 $\psi < 1$ 근처에서 Peak가 발생하고, 압축력이 작용하는 경우에는 상대적인 음향파워 레벨이 감소하고 $\psi > 1$ 근처에서 Peak가

발생한다.

(4) 무거운 유체하중을 받는 보의 구조 감쇠 효과가 가벼운 유체하중을 받는 보의 구조 감쇠 효과 보다 상당히 커 상대적인 음향파워 레벨이 작으며, 가벼운 유체하중을 받는 보의 작은 감쇠 효과에 의해 일치 효과(Coincidence Effect) 현상이 발생한다.

참고문헌

1. M.I. Mogilevskii, "Sound Radiation from a Plate under the Action of Moving Harmonic Forces", *Sov. Phys. Acoust.*, 27(3), pp. 250~251, 1981.
2. R.F. Keltie, "A Note on the Acoustic Radiation from Point-Force Elastic Beams", *J. Sound Vib.*, 92(2), pp. 253~260, 1984.
3. R.F. Keltie and H. Peng, "On the Acoustic Power Radiated by Line Force on Elastic Beams", *J. Acoust. Soc. Am.*, 77(6), pp. 2033~2038, 1985.
4. R.F. Keltie and H. Peng, "Sound Radiation From Beams Under the Action of Moving Line Forces", *J. App. Mech.*, 55, pp. 849~854, 1988.
5. R.F. Keltie and H. Peng, "Effects of Source Motion and Foundation Stiffness on the Acoustic Radiation from Submerged Structures", *proceedings NOISE-CON 88*, (Purdue University, 1988) pp. 199~204.
6. R.G. White and J.G. Walker, *Noise and Vibration*, John Wiley & Sons, pp. 247~249, 1982.
7. K.F. Graff, *Wave Motion in elastic Solids*, Ohio State University Press, pp. 170~180, 1975.
8. M.C. Junger and D. Feit, *Sound, Structure and Their Interactions*, The MIT press, pp. 235~178, 1972.
9. F. Fahy, *Sound and Structural Vibration (Radiation, Transmission and Response)*, Academic Press, pp. 90~98, 1985.