

〈論 文〉

# 변단면 기둥의 자유진동 및 최소임계하중 해석

## Free Vibrations and First Critical Loads of Tapered Columns

이 병 구\* · 오 상 진\*\* · 모 정 만\*\*\* · 김 현 상\*\*\*

Byoung Koo Lee, Sang Jin Oh, Jeong Man Mo and Hon Sang Kim

(1992년 7월 27일 접수; 1992년 8월 20일 심사완료)

### ABSTRACT

The main purpose of this paper is to present both the natural frequencies and the first critical loads of tapered columns. The ordinary differential equation governing the free vibration for tapered columns under compressive axial force is derived. Three kinds of cross sectional shape are considered in the governing equation. The Runge-Kutta method and determinant search method are used to perform the integration of the differential equation and to determine the natural frequencies, respectively. Additionally, the bisection method is used to determine the critical loads. In numerical examples, the effects of compressive axial force on the natural frequencies of tapered columns are investigated varying the end conditions. The first critical loads of tapered columns are determined on the basis of dynamic concept. The effects of cross sectional shapes are shown and some typical mode shapes are also presented.

### 1. 서 론

현대 문명의 발달과 더불어 구조물의 형태는 더욱 복잡, 거대해지고 있으며 이에 대한 거동해석을 위해 많은 근사해법들이 제시되고 있다. 그러나 이러한 복잡한 구조물들을 설계함에 있어 보, 기둥, 평판 등과 같은 기본단위구조의 정적, 동적거동을 나타내는 결과들을 이용함으로써 기본단위구조로 형성되는 구조물의 거동결과를 예측하는 등의 사전정보를 얻을 수 있다. 따라서 기본단위구조의 거동을 나타내는 정확한 값들을 결정하는 것은 대단히 중요한 연구과제이다.

기본단위구조 중 기둥요소는 각종 구조공학 관련분

야에서 가장 많이 이용되고 있어 기둥요소에 대한 정적, 동적해석에 관한 연구가 계속되고 있다<sup>(1, 7)</sup>.

축하중을 받는 기둥요소의 자유진동문제는 토목, 기계, 항공산업 등에서 광범위하게 적용되어진다. 예를 들어 구조물 설계시 보요소에 축하방향의 선행하중(preload)이나 프리스트레스를 고려하는 경우 혹은 이미 시공된 보요소에 고려되지 않은 축하방향 하중이 작용하는 경우가 있다. 또한 원자로, 저장탱크 등과 같은 거대한 구조물을 지지하는 기둥 혹은 지중말뚝(pile)에는 내부저장물의 양에 따라 다양한 축하중이 작용한다. 이러한 축하중은 기둥요소의 자유진동에 영향을 미치며 실제로 축하중을 받는 기둥요소의 고유진동수와 진동형을 결정하는 것은 좋은 연구대상이다.

Wilson 등<sup>(2)</sup>은 1970년에 최강기둥(strongest column)에 관한 연구에서 실험을 통하여 기둥의 하중

\* 정회원, 원광대학교 토목공학과

\*\* 정회원, 원광대학교 대학원 토목공학과 박사과정

\*\*\* 원광대학교 대학원 토목공학과 석사과정

-고유진동수 관계를 고찰하였다. Bokaian<sup>(3,4)</sup>은 1988년과 1990년에 각각 축압축력과 축인장력을 받는 등단면 보의 자유진동에 관한 연구를 수행하였다. 이 논문들에서는 다양한 단부조건을 갖는 등단면 보의 자유진동을 지배하는 특성방정식을 유도하고, 그 결과 고찰을 통하여 하중비에 따른 고유진동수비를 Galef 방정식으로 표시하였다. Valsangkar<sup>(5)</sup>은 1987년에 Winkler 지반에 일부분이 묻힌 채 축하중을 받는 말뚝의 자유진동에 관한 연구를 수행하였다.

Howson 등<sup>(6)</sup>은 1973년에 축하중을 받는 Timoshenko부재로 구성된 H형 frame의 자유진동에 관한 연구에서 하중-고유진동수 사이의 관계를 고찰하였다.李大<sup>(8)</sup>은 1990년에 개구부가 있는 직사각형 평판구조의 진동 및 안정해석에서 경계조건 및 내부유공부 크기와 위치변화에 따른 고유진동수-탄성임계하중 사이의 관계를 고찰하였다.

본 연구에서는 진동시 기둥의 미소요소에 작용하는 합응력과 관성력의 동적평형방정식을 이용하여 축압축력을 받는 기둥요소의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고 이를 해석함으로써 축압축력이 작용하는 변단면 기둥의 자유진동특성을 규명한다. 또한 축압축력 증가에 따라 발생하는 또 다른 고유치인 최소임계하중을 결정함으로써 두 고유치 상호간의 관계를 고찰하는 데 연구목적이 있다.

본 연구에서 기둥은 비압축성인 선형탄성 이상기둥으로 가정하고, 미분방정식의 유도는 미소처짐이론에 의한다. 또한 기둥의 자유진동은 비감쇠 조화진동으로 하고 진동변위는 횡방향변위만을 고려한다.

## 2. 단면의 정의

본 연구에서 기둥의 단면은 일반적으로 널리 이용되고 있는 단면의 제원이 직선적으로 변화하는 변단면을 채택한다. 예로써 Fig. 1은 균일폭 변화높이의

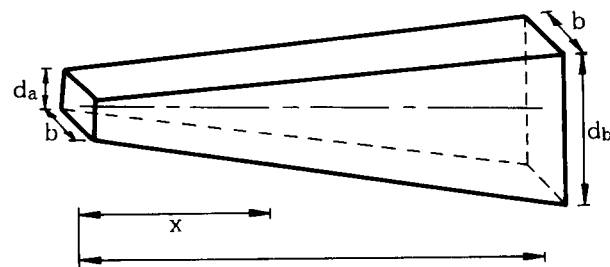


Fig. 1 Example of tapered column(depth taper)

구형단면을 갖는 변단면 기둥을 나타내고 있다. 이 그림에서 기둥의 길이를  $l$ , 좌단의 단면제원, 단면적 및 단면2차모멘트를 각각  $d_a, A_a, I_a$ 라 하고, 우단에서는  $d_b, A_b, I_b$ 라 한다. 이때 기둥의 임의점  $x$ 에서의 변화제원  $d_x$ , 단면적  $A_x$  및 단면2차모멘트  $I_x$ 는 각각 다음 식과 같이 표시된다.

$$d_x = d_a[1 + (k-1)x/l] \quad (1)$$

$$A_x = A_a[1 + (k-1)x/l]^m \quad (2)$$

$$I_x = I_a[1 + (k-1)x/l]^n \quad (3)$$

$$\text{여기서, } k = d_b/d_a \quad (4)$$

식 (1)~(3)에서  $k$ 는 식 (4)에 나타낸 바와 같이 기둥의 우단과 좌단의 단면의 제원을 나타내는  $d_b$ 와  $d_a$ 의 무차원비이며, 이로 부터 변단면의 기하학적 형상이 결정된다. 또한  $m, n$ 은 단면의 형상에 따라 결정되는 단면형상계수로서 식 (1)을 이용하여 좌단의  $A_a, I_a$ , 기둥의 임의점  $x$ 에서의 단면적과 단면2차모멘트 관계로 부터 결정되며 본 연구에서 택한 3가지 단면형상에 대한 값은 각각 다음과 같다<sup>(9)</sup>.

$$\text{변화높이 구형단면: } m=1, n=3 \quad (5)$$

$$\text{변화폭 구형단면: } m=1, n=1 \quad (6)$$

$$\text{정방형단면 / 원형단면: } m=2, n=4 \quad (7)$$

## 3. 수학적 모형

Fig. 2는 축압축력을 받는 기둥의 진동모드를 나타낸 것이다. 본 연구에서 기둥은 조화진동을 한다고 가정하였으므로 횡방향 변위의 조화진동식은 다음 식과 같이 표시된다<sup>(10)</sup>.

$$w(x, t) = w_x \sin(\omega t) \quad (8)$$

윗 식에서  $w_x$ 는 조화진동의 진폭으로  $x$ 만의 함수이며,  $\omega$ 는 고유각진동수,  $t$ 는 시간이다.

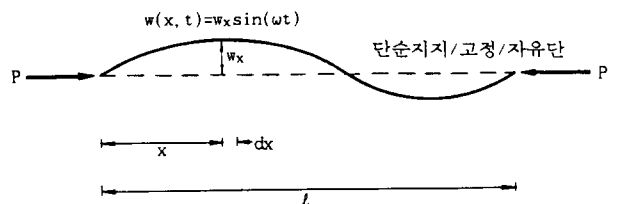


Fig. 2 Vibration mode of column under compressive axial force

축압축력을 받는 기둥이 면내에서 자유진동하게 되면 기둥의 미소요소에는 단부의 축압축력에 의한  $P$ 가 작용하며, 변위에 의한 전단력  $V$  및 휨모멘트  $M$ 이 발생하고, 질량을 갖는 부재의 미소요소가 진동함으로써 관성력  $f_i$ 가 작용하게 된다. 이때 미소요소에 작용하는 힘 사이의 동적평형방정식은 다음과 같다<sup>(11)</sup>.

$$V - P \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} + f_i = 0 \quad (10)$$

기둥요소의 모멘트-곡률관계는 다음 식 (11)과 같으며, 식 (10)의 관성력  $f_i$ 는 다음 식 (12)와 같다.

$$M = EI_x \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (11)$$

$$f_i = \rho A_x \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (12)$$

식 (12)에서  $\rho$ 는 기둥재료의 단위체적당 질량을 나타낸다.

식 (11)로부터  $\partial M/\partial x$ 을 구하여 식 (9)에 대입하고 이로부터  $\partial V/\partial x$ 를 구하면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} = & E \frac{d^2 I_x}{dx^2} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + 2E \frac{dI_x}{dx} \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \\ & + EI_x \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (13)$$

식 (10)에 식 (12), (13)을 대입하면 다음 식을 얻을 수 있으며 이는 축압축력이 작용하는 변단면 기둥의 면내 자유진동을 지배하는 편미분방정식이다.

$$\begin{aligned} E \frac{d^2 I_x}{dx^2} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + 2E \frac{dI_x}{dx} \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \\ + EI_x \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \\ + \rho A_x \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 이용한다.

$$\xi = x/l, \quad \eta = w_x/l \quad (15)$$

식 (3)으로부터  $dI_x/dx$ ,  $d^2 I_x/dx^2$ 를 구하고, 식 (8)로부터  $\partial^2 w/\partial x^2$ ,  $\partial^3 w/\partial x^3$ ,  $\partial^4 w/\partial x^4$ ,  $\partial^2 w/\partial t^2$ 을 각각 구하여 식 (2), (3)과 함께 식 (14)에 대입하고 무차원변수들을 이용하여 정리하면 다음 식 (16)의 축압축력을 받는 변단면 기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned} \eta'''' = & -2n(k-1)[1+(k-1)\xi]^{-1} \eta'''' \\ & - \{n(n-1)(k-1)^2[1+(k-1)\xi]^{-2} \\ & + p[1+(k-1)\xi]^{-n}\} \eta'' \\ & + C_i^2 [1+(k-1)\xi]^{m-n} \eta \end{aligned} \quad (16)$$

식 (16)에서  $(\prime) = d/d\xi$ 이고,  $p$ 는 무차원 축압축력으로 식 (17)과 같으며,  $C_i$ 는 무차원 고유진동수로 식 (18)과 같고,  $i$ 는 모드(mode)수이다.

$$p = \frac{Pl^2}{EI_a} \quad (17)$$

$$C_i = \omega_i l^2 (\rho A_x / EI_x)^{1/2}, \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (18)$$

식 (16)의 경계조건은 다음과 같다. 먼저 단순지단인 경우 횡방향변위  $w$  및 휨모멘트  $M$ 이 "0"이므로 식 (15)의 무차원 변수들을 이용하면 다음의 무차원 경계조건이 유도된다.

$$\eta = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } \xi = 1 \text{ 에서} \quad (19)$$

$$\eta'' = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } \xi = 1 \text{ 에서} \quad (20)$$

고정단에서는 횡방향변위  $w$  및 회전각이 "0"이므로 다음의 경계조건이 유도된다.

$$\eta = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } \xi = 1 \text{ 에서} \quad (21)$$

$$\eta' = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } \xi = 1 \text{ 에서} \quad (22)$$

자유단에서는 휨모멘트  $M$  및 전단력  $V$ 가 "0"이므로 식 (9), (11)로부터 다음의 경계조건이 유도된다.

$$\eta'' = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } \xi = 1 \text{ 에서} \quad (23)$$

$$\eta'''' + p\eta' = 0, \quad \xi = 0 \text{ 에서} \quad (24.1)$$

$$\eta'''' + k^{-1} p\eta' = 0, \quad \xi = 1 \text{ 에서} \quad (24.2)$$

이상에서 축압축력을 받는 변단면 기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식은 식 (16)과 같고, 단부조건별 경계조건식은 식 (19)~(24.1, 2)과 같다.

#### 4. 수치해석방법 및 수치해의 검증

##### 4.1 고유진동수의 결정

미분방정식 식 (16)의 엄밀해는 존재하지 않으므로 수치해석법에 의하여 수치해를 구하여야 한다. 식 (16)의 미분방정식에는 미지의 무차원 고유진동수  $C_1$  값이 포함되어 있으므로 먼저  $C_1$  값을 가정하여 미분방정식의 수치적분을 시행하며 본 연구에서는 정도가 높은 Runge-Kutta 방법<sup>(12)</sup>을 이용한다. 식 (16)의 미분방정식을 수치적분하기 위해서는 4개의 초기치( $\eta, \eta', \eta'', \eta'''$ )를 결정해 주어야만 한다. 그러나 식 (19)~(24)에서 각 단부조건별 경계조건은 2개씩만을 알고 있으므로 나머지 2개를 Table 1과 같이 2쌍을 가정하여 초기치 문제로 형성한다. 초기치문제로 형성한 후 수치적분을 시행하여 우단의 경계조건을 만족하는  $C_1$  값을 찾는 경계조건문제를 해석하게 된다.

Table 1에서의 제 1, 2가정의 초기치를 이용하여  $\xi=0$ 에서  $\xi=1$ 까지 수치적분을 시행하며, 그 결과  $\xi=1$ 에서의  $\eta, \eta', \eta'', \eta'''$ 이 계산된다. 만일 앞서 가정한  $C_1$  값이 자유진동의 고유한 값이라면 다음의 우단의 경계조건 관계를 만족하여야 한다.

단순지지단인 경우 :

$$\eta = \eta(\text{set1}) + a \cdot \eta(\text{set2}) = 0 \quad (25)$$

$$\eta'' = \eta''(\text{set1}) + a \cdot \eta''(\text{set2}) = 0 \quad (26)$$

**Table 1** Assumption of initial values

Hinged end :

Set	$\eta^*$	$\eta'$	$\eta''^*$	$\eta'''$
1	0	1	0	0
2	0	0	0	1

Clamped end :

Set	$\eta^*$	$\eta'^*$	$\eta''$	$\eta'''$
1	0	0	1	0
2	0	0	0	1

Free end :

Set	$\eta$	$\eta'$	$\eta''^*$	$\eta'''$
1	0	1	0	-p
2	0	-1	0	p

\* : Boundary values

고정단인 경우 :

$$\eta = \eta(\text{set1}) + a \cdot \eta(\text{set2}) = 0 \quad (27)$$

$$\eta' = \eta'(\text{set1}) + a \cdot \eta'(\text{set2}) = 0 \quad (28)$$

자유단인 경우 :

$$\eta'' = \eta''(\text{set1}) + \eta''(\text{set2}) = 0 \quad (29)$$

$$\eta''' + k^{-n} p \eta' = \{\eta'''(\text{set1}) + k^{-n} p \eta'(\text{set1})\} + a \cdot \{\eta'''(\text{set2}) + k^{-n} p \eta'(\text{set2})\} = 0 \quad (30)$$

윗 식들에서  $a$ 는 선형결합(linear combination)에 의한 상수이기 때문에 "0"이 아니므로 가정한  $C_1$  값이 고유치라면 우변의 변수들로 구성되는 행렬값(determinant)이 "0"이어야 한다. 그러나  $C_1$  값은 가정한 값이므로 행렬값이 "0"이 되는 정확한 값을 찾을 수 없으며,  $C_1$  값을 가정하여 반복시행하는 과정에서 행렬값의 부호가 바뀌는 구간에서 Regula-Falsi method<sup>(12)</sup>를 이용하여 행렬값이 "0"(수렴한계  $1 \times 10^{-5}$ )인 고유치  $C_1$ 를 찾는다.

##### 4.2 임계하중의 결정

일반적으로 변단면 기둥에서 축압축력이 증가함에 따라 고유진동수는 감소하며 축압축력이 어떠한 값 즉 최소임계하중에 도달하게 되면 이후 고유진동수는 허근의 고유진동수를 갖게 된다. 따라서 계산된 고유진동수는 차수( $i$ 값)가 하나씩 감소하게 되며 이러한 일반적인 관계를 Fig. 3에 나타내었다. Fig. 3에서 critical load는 적당한 방법의 수치해석법으로 찾을 수 있고 이러한 내용은 정적개념이 아닌 동적개념에 의한 임계하중 결정이 가능하다는 것을 의미한다<sup>(11,13)</sup>.

실제로 작용하중이 최소임계하중을 초과하는 경우 주어진 구조물은 좌굴된 형상을 갖게 되어 elastica 아치를 이루며, 따라서 본 연구에서 계산된 최소임계하중 이후의 고유진동수는 무의미하다. 그러나 elastica 아치의 역학적 특성때문에 이에 대한 정적, 동적거동에 관한 연구가 활발히 진행되고 있지만 본 연구에서는 이후의 연구과제로 삼는다.

본 연구에서 최소임계하중 결정방법을 설명하면 다음과 같다. Fig. 3에서 축압축력을  $\Delta b$ 만큼 증가시키며 고유진동수를 구하는 과정에서 제1고유진동수가 오히려 증가하는 구간 즉 이 그림에서 제1고유진동수가  $C_0$ 에서  $C_b$ 로 증가하는 구간  $b_0 \sim b_b$ 를 발견할 수 있다. 이는 이 구간내에 최소임계하중이 존재하

며, 이 값에서 기둥이 좌굴을 일으켜 주어진 기둥의 제1고유진동수가 값을 잃게 됨을 의미한다. 따라서 이 구간에 존재하는 임계하중은 널리 알려진 bisection method<sup>(12)</sup>를 이용하여 구할 수 있다. 이 경우에 수렴한계로  $C_1$  값이  $1 \times 10^{-3}$ 이 되는  $p$  값을 최소임계하중으로 하였다.

Table 2, 3에서 본 연구결과를 비교 검증하기 위해 타문헌의 결과들과 비교하였다. 표에서 알 수 있듯이 본 연구의 결과와 문헌들의 결과는 아주 우수하게 접근하여 본 연구결과와 타당성을 입증할 수 있다. Table 2, 3에서  $H$ 는 단순지지단  $C$ 는 고정단,  $F$ 는 자유단을 의미하며, 이후 동일한 의미를 갖는다.

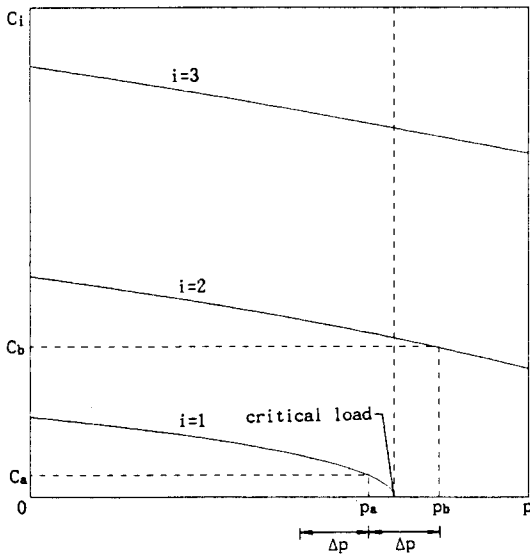


Fig. 3 Dynamic stability of column

Table 2 Comparison of nondimensional natural frequencies( $k=1$ )

Geometry and load*	Reference	Frequency parameter, $C_1$		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$
$H-H$ $p=1.9739$	Present ref.[3]	8.8276 8.8276	38.479 38.479	87.884 87.834
$H-C$ $p=8.0761$	Present ref. [3]	12.001 12.033	46.367 46.313	100.54 100.43
$C-C$ $p=23.687$	Present ref. [3]	14.294 14.357	52.026 53.111	110.78 111.76
$C-F$ $p=1.9739$	Present ref. [3]	1.6247 1.6249	20.526 21.273	60.448 60.764

\*  $H$ : Hinged end,  $C$ : Clamped end,  $F$ : Free end

Table 3 Comparison of critical loads

Geometry	Reference	Critical loads	
		$i=1$	$i=2$
$H-H$ $m=1, n=3$ $k=1,2$	Present ref.[7]	13.009 13.010	52.012 52.011
$H-H$ $m=1, n=1$ $k=1.4$	Present ref.[7]	11.786 11.785	47.068 47.067
$H-H$ $m=2, n=4$ $k=2.$	Present ref.[7]	39.478 39.478	157.91 157.90
$H-C$ $k=1$	Present ref.[14]	20.191 20.191	59.797 59.680
$C-C$ $k=1$	Present ref.[14]	39.478 39.478	80.767 80.763
$F-C$ $m=2, n=4$ $k=1.26$	Present ref.[14]	4.6745 4.6750	35.921 —

Table 4 Equations of first critical load( $1 \leq k \leq 3$ )

Cross sectional shape	End condition	Equation of first critical load
Depth taper ( $m=1, n=3$ )	$C-C$	$p_{cr} = -6.32 + 30.7k + 14.9k^2$
	$H-C$	$p_{cr} = -3.05 + 15.4k + 7.81k^2$
	$H-H$	$p_{cr} = -1.01 + 6.70k + 4.16k^2$
	$F-C$	$p_{cr} = 0.640 - 1.33k + 3.18k^2$
Breadth taper ( $m=1, n=1$ )	$C-C$	$p_{cr} = 19.7 + 20.9k - 1.03k^2$
	$H-C$	$p_{cr} = 10.1 + 10.6k - 0.437k^2$
	$H-H$	$p_{cr} = 4.93 + 5.11k - 0.161k^2$
	$F-C$	$p_{cr} = 0.739 + 1.77k - 0.0399k^2$
Diameter taper ( $m=2, n=4$ )	$C-C$	$p_{cr} = 1.40 - 1.65k + 39.9k^2$
	$H-C$	$p_{cr} = 20.2k^2$
	$H-H$	$p_{cr} = 9.87k^2$
	$F-C$	$p_{cr} = 5.47 - 11.2k + 8.35k^2$

### 5. 수치해석 예 및 고찰

Fig. 4~7은 축압축력  $p$ 가 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 분석하기 위하여( $m=1, n=3$ ),  $k=1.5$ 인 변단면 기둥에 대하여 각 단부조건별로 수치해석한 결과이다. 그림에서 축압축력은 무차원 고유진동수를 감소시키는 요인으로 작용함을 알 수 있으며,

곡선이 횡축과 만나는 점이 이 기둥의 최소임계하중 임을 알 수 있다. 따라서 점선으로 표시된 이후의 하중에 대해서는 기둥이 직선형상을 잃고 좌굴된 곡선형상을 이루며 후좌굴거동을 하게 된다.

Fig. 8은 변단면 기둥에 축압축력이 작용하는 경우 기둥의 단면형상이 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 분석하기 위하여 양단이 단순지지되고,  $I_b/I_n = 2$ 인 경우에 각각의 단면형상에 따른  $C_i$ 와  $p$ 의 관계를 나타낸 것이다. 축압축력이 작용하는 경우 대부

분의 구간에서 무차원 고유진동수는  $(m=1, n=3)$ ,  $(m=2, n=4)$ ,  $(m=1, n=1)$ 의 순서로 크지만 최소임계하중 부근에 도달하면 곡선이 교차하여  $(m=1, n=1)$ ,  $(m=1, n=3)$ ,  $(m=2, n=4)$ 의 순서로 고유진동수가 큼을 알 수 있다. 또한 최소임계하중은  $(m=1, n=1)$ ,  $(m=1, n=3)$ ,  $(m=2, n=4)$ 의 순서로 큼을 알 수 있으며, 이는 문헌 [7]에서의 정적 해석에 의한 결과와 동일한 경향을 나타내고 있음을 알 수 있다.

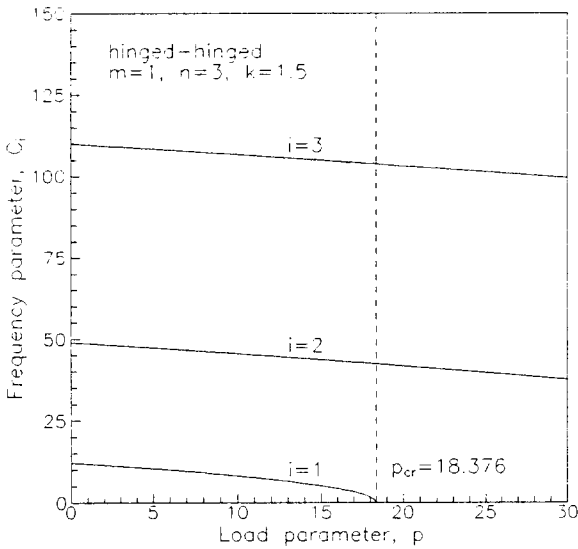


Fig. 4  $C_i$  vs.  $p$  curves(hinged-hinged)

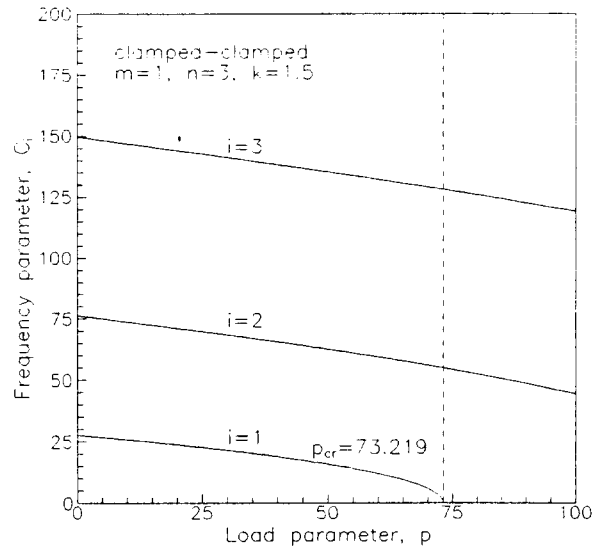


Fig. 6  $C_i$  vs.  $p$  curves(clamped-clamped)

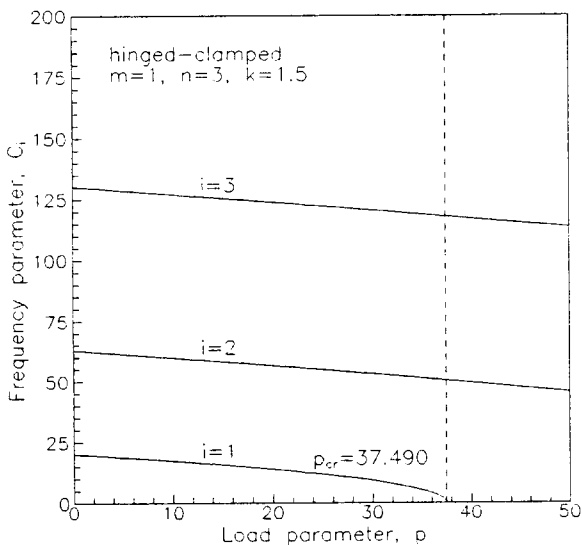


Fig. 5  $C_i$  vs.  $p$  curves(hinged-clamped)

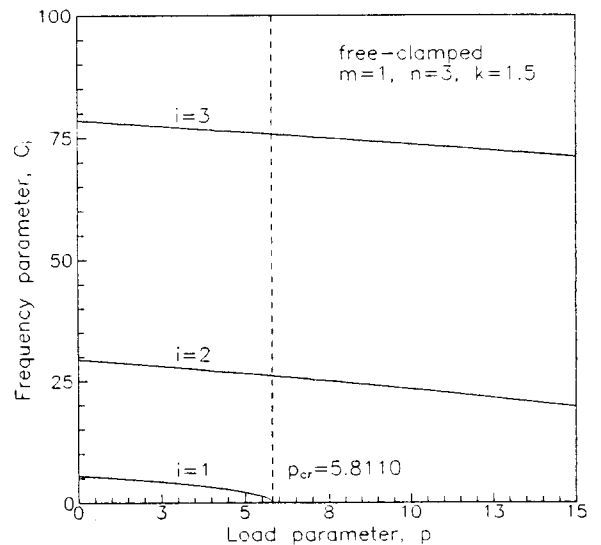


Fig. 7  $C_i$  vs.  $p$  curves(free-clamped)

Fig. 9는 축압축력이 작용하는 변단면 기둥에서 단면비  $k$ 에 따른 무차원 고유진동수의 변화를 고찰하기 위하여 단면비를 1-2까지 변화시키면서 양단이 단순지지되고,  $(m=1, n=3)$ 인 단면형상을 갖는 변단면 기둥에 대해 수치해석한 결과이다. 여기에서 축압축력은 무차원 고유진동수를 감소시키는 요인으로 작용하지만 단면비  $k$ 가 클수록 무차원 고유진동수가 크음을 알 수 있으며, 본 연구에서 채택한 직선변화 변단면 기둥의 경우 단면비가 클수록 임계하중이

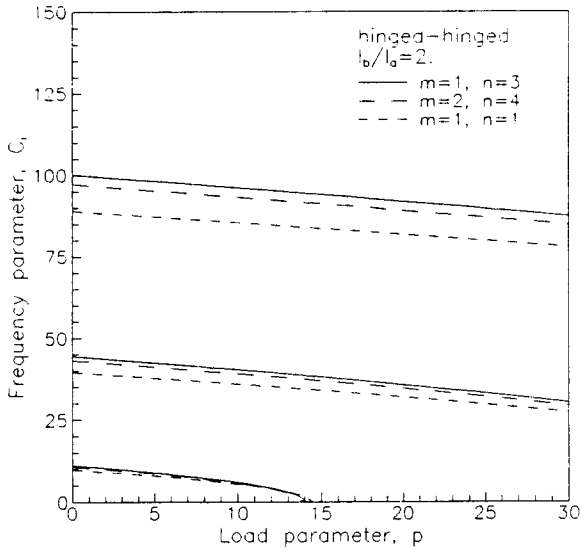


Fig. 8 The effects of cross sectional shape

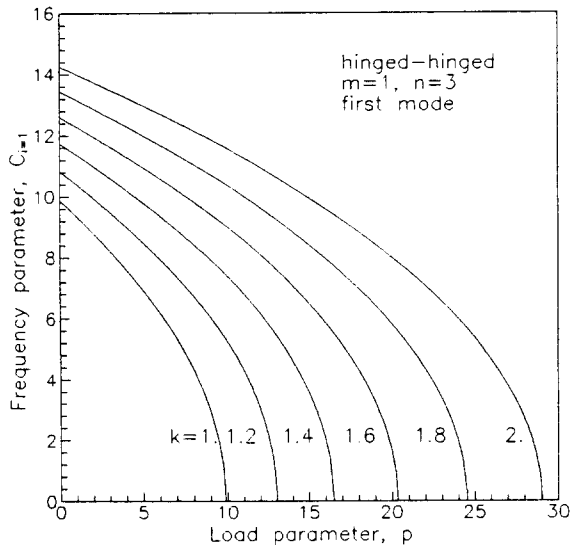


Fig. 9  $C_1$  vs.  $p$  curves for section ratio

더 크음을 알 수 있다.

Fig. 10~12는 단면비  $k$ 를 1에서 3까지 변화시키고,  $(m=1, m=3), (m=1, n=1), (m=2, n=4)$ 의 단면형상을 갖는 변단면 기둥의 최소임계하중을 동적개념을 도입하여 각 단부조건별로 해석한 결과이다. 여기서 □표와 △표로 표시된 값은 각각 문헌[7]과 문헌[14]의 결과들을 나타낸 값으로 이 값들은 정적해석에 의한 결과들이다. 그림에서 볼 수 있듯이 해석결과들은 거의 일치하고 있음을 알 수 있

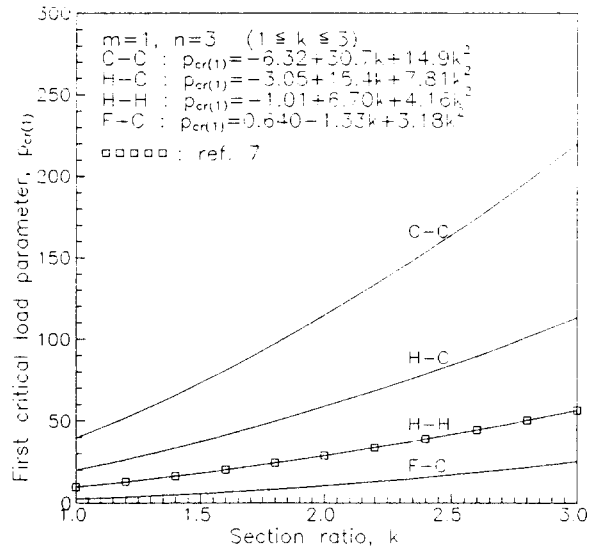


Fig. 10  $p_{cr(1)}$  vs.  $k$  curves using dynamic concept ( $m=1, n=3$ )

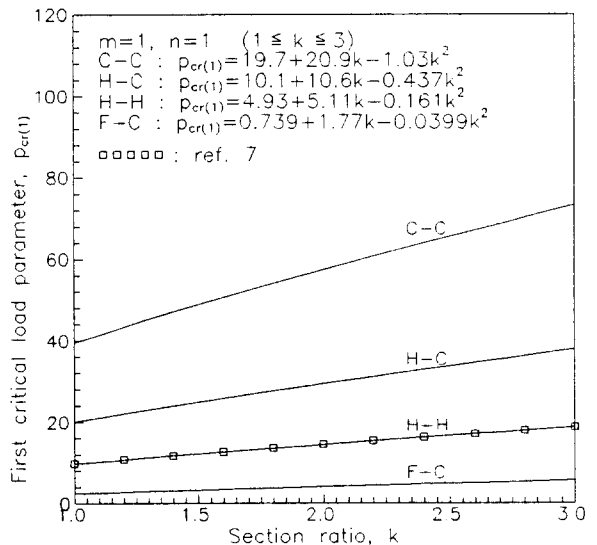


Fig. 11  $p_{cr(1)}$  vs.  $k$  curves using dynamic concept ( $m=1, n=1$ )

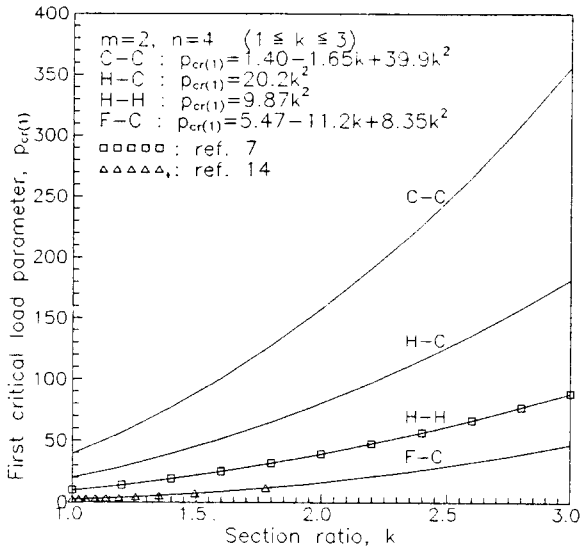


Fig. 12  $P_{cr}(k)$  vs.  $k$  curves using dynamic concept ( $m=2, n=4$ )

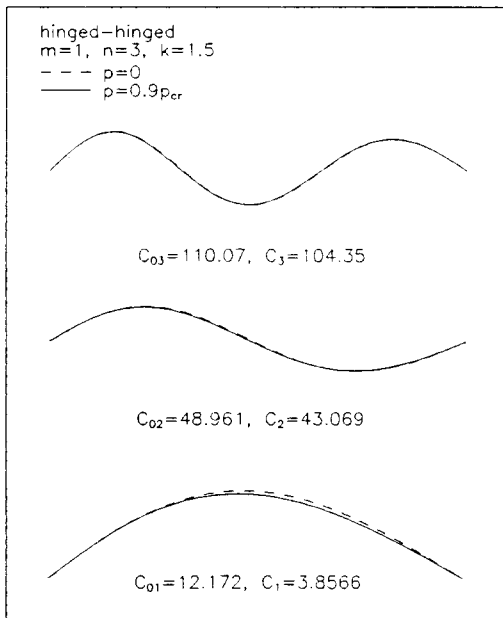


Fig. 13 Examples of mode shapes

다. 또한 본 연구의 수치해석 결과를 회귀분석하여 최소임계하중( $P_{cr}$ )과 단면비( $k$ ) 사이의 관계식 즉 최소임계하중 방정식을 산출하였으며 이를 Table 4에 수록하였다. 이 경우에 모든 상관계수는 0.999 이상을 나타내고 있어 공학적으로 이 최소임계하중 방정식을 이용하여도 전혀 무리가 없다.

참고로 ( $m=1, n=3$ ),  $k=1.5$ 이고 양단이 단순

지지된 변단면 기둥에 축압축력이 작용하지 않는 경우(접선)와 축압축력이 최소임계하중의 90% 즉 상당히 큰 축압축력이 작용하는 경우(실선)에 대한 진동형의 예를 Fig. 13에 나타냈으며, 여기서  $C_0$ 는 축압축력이 작용하지 않는 경우의 무차원 고유진동수이다.

### 6. 결 론

본 연구에서는 축압축력을 받는 변단면 기둥의 면내 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 각종 제원 및 단부조건을 갖는 변단면 기둥을 해석하여 축압축력과 고유진동수 관계, 동적 개념을 도입한 최소임계하중 결정, 단면형상에 따른 고유진동수 및 최소임계하중의 변화 등을 고찰하였다. 또한 동적개념을 도입하여 결정한 최소임계하중의 결과들을 회귀분석하여 최소임계하중 방정식을 제안하였다.

본 연구 이후의 연구과제로는 독특한 역학적 특성을 보이는 좌굴된 변단면 기둥인 elastica아치의 자유진동에 관한 연구가 계속되어야 할 것이다.

### 참 고 문 헌

- (1) S. M. Dickinson, 1980, "The Lateral Vibration of Slightly Bent Slender Beams Subject to Prescribed Axial End Displacement", Journal of Sound and Vibration, Vol. 68, No.4 pp. 507~514.
- (2) J. F. Wilson, D. M. Holloway and S. B. Biggers, 1970, "Stability Experiments on the Strongest Columns and Circular Arches", SESA Fall Meeting, Boston, pp. 18~22.
- (3) A. Bokaian, 1988, "Natural Frequencies of Beams Under Compressive Axial Loads", Journal of Sound and Vibration, Vol. 126, No. 1, pp. 49~65.
- (4) A. Bokaian, 1990, "Natural Frequencies of Beams Under Tensile Axial Loads", Journal of Sound and Vibration, Vol. 142, No. 3, pp. 481~498.
- (5) A. J. Valsangkar and R. B. Pradhanang, 1987, "Free Vibration of Partially Supported Piles", Journal of Engineering Mechanics Division,



ASCE, Vol. 113, No. 8, pp. 1244~1247.

(6) W. P. Howson and F. W. Williams, 1973, "Natural Frequencies of Frames with Axially Loaded Timoshenko Members", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 26, No. 4, pp. 503~515.

(7) 이병구, 오상진, 모정만, 1991, "단순지지 변단면 기둥의 임계하중 및 후좌굴 거동", *대한토목학회 논문집*, 제11권 제4호, pp. 17~26.

(8) 이수곤, 김순철, 박근홍, 1990, "개구부를 가진 직사각형 평판구조의 진동 및 안정성 해석", *한국전산구조공학회지*, 제3권 제2호, pp. 77~88.

(9) 이병구, 오상진, 모정만, 김현상, 1992, "변단면 기둥의 자유진동 해석", *한국소음진동공학회*, '92 춘계학술발표논문집, pp. 101~104.

(10) J. M. Biggs, 1982, *Introduction to Structural Dynamics*, McGraw-Hill, N. Y., pp. 35~37.

(11) R. W. Clough and J. Penzien, 1975, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, N. Y.

(12) B. Carnahan, H. A. Luther and J. O. Wilkes, 1969, *Applied Numerical Methods*, N.Y., John Wily & Sons.

(13) W. F. Chen and T. Atsuta, 1976, *Theory of Beam-Columns*, McGraw-Hill, N.Y., pp. 110~115.

(14) S. P. Timoshenko and J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, N.Y., pp. 126~130.