

動的概念에 의한 變斷面 기둥의 挫屈荷重

Buckling Loads of Tapered Columns due to Dynamic Concept

李 炳 求* · 牟 正 萬**
Lee, Byoung Koo · Mo, Jeong Man

Summary

The main purpose of this paper is to present the buckling loads of tapered columns due to dynamic concept. The ordinary differential equation governing the buckling loads for tapered columns is derived on the basis of dynamic concept. Three kinds of cross sectional shape are considered in the governing equation. The Improved Euler method and Determinant Search method are used to perform the integration of the differential equation and to determine the buckling loads, respectively.

The hinged-hinged, hinged-clamped, clamped-clamped and free-clamped end constraints are applied in numerical examples. The buckling loads are reported as the function of section ratio, and the effects of cross-sectional shapes are investigated. The buckling load equation, which are fitted by numerical data, are proposed as a function of section ratio. It is expected that these equations can be utilized in structural engineering field.

I. 緒 論

기둥은 보와 더불어 構造工學 분야에서 가장 기본이 되는 구조단위이다. 기둥의 단면을 변 단면으로 하는 경우에 재료가 節約되는 경제적 이점이 있을 뿐만 아니라 미적감각 등으로 인 하여 變斷面을 더욱 많이 이용할 전망이다.

기둥의 좌굴하중은 2차이론과 3차이론에 의한 방법으로 결정할 수 있다. 2차이론은 기둥의 彈性曲線의 미분방정식을 미소변형이론에 의하여 유도하고 이를 경계조건에 적용시켜 좌굴하중을 구하는 방법이다. 3차이론은 大變形理論에 의하여 유도된 후좌굴기둥의 正確彈性曲線(elastica)을 수치해석하여 기둥의 平衡經路(equili-

* 圓光大學校 工科大學

** 裡里農林高等學校 農業土木科

키워드: 變斷面 기둥, 面內 自由振動, 動的概念, 固有角振動數, 挫屈荷重, 挫屈荷重方程式, 挫屈荷重曲線, 臨界應力

brium path)를 산출하고 평형경로에서 좌굴하중을 결정하는 방법이다. 이상에서 2차이론과 3차이론에 의한 좌굴하중의 결정방법은 구조의 靜的概念에 의한 결정방법이다.

기둥에 축압축력이 작용되면 기둥의 고유각진동수는 감소하고 축압축력이 계속 증가하여 좌굴하중에 도달하면 기둥은 불안정 상태로 되어 고유각진동수를 잃게 된다. 이 연구에서는 이러한 구조공학의 일반적 원리를 이용하여 동적개념에 의한 변단면 기둥의 좌굴하중을 산출하는 데 연구목적이 있다. 이를 위하여 변단면 기둥의 자유진동을 지배하는 微分方程式에 동적개념을 도입하여 변단면 기둥의 좌굴하중을 지배하는 미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 좌굴하중을 결정한다.

기둥의 좌굴하중에 대한 연구는 많은 文獻에 발표되고 있으며 이들 문헌을 고찰하면 다음과 같다.

劉¹⁾은 1984년에 일단고정 타단자유인 변단면 기둥의 임계좌굴하중에 관한 논문을 발표하였다. 이 논문에서는 2차이론에 의하여 이론을 展開하고 이를 Bessel함수에 의한 해와 유한요소에 의한 近似解로 임계하중을 산출하였다.

Sakiyama²⁾는 1986년에 truncated-cone 변단면 기둥을 2차이론에 의하여 미분방정식을 유도하고 이를 數值積分하여 임계하중을 산출하였다.

Kounadis 등³⁾은 1987년에 단순지지된 등단면 구형단면 기둥에 대하여 재료의 非線形성을 고려한 임계하중을 산출하였다. 이 논문에서는 하중-변위사이의 관계식은 2차이론을 이용하였고, 挫屈形은 정현곡선으로 가정하여 임계하중을 산출하였다.

Wang 등⁴⁾은 1988년에 횡방향 補強材를 갖는 기둥의 좌굴내력에 관한 논문을 발표하였다. 이 논문에서는 Rayleigh-Ritz 에너지법을 이용하여 횡방향으로 보강된 기둥의 挫屈耐力를 산출하

였다.

李 등⁵⁾은 1991년에 단순지지 변단면 기둥의 臨界荷重 및 後挫屈 舉動을 해석하였다. 이 논문에서는 3차이론을 이용하여 후좌굴 기둥의 正確彈性曲線을 지배하는 미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 靜的概念에 의한 좌굴하중을 산출하였다.

본 연구에서 動的概念에 의한 變斷面 기둥의 挫屈荷重을 산출하기 위해 사용한 基本假定은 다음과 같다.

- ① 기둥은 線形彈性 理想기둥이다.
- ② 미분방정식의 유도는 미소처짐이론에 의한다.
- ③ 축하중작용시 기둥의 축은 非壓縮性이다.

II. 기둥의 變斷面

본 연구에서 기둥의 변단면은 일반적으로 널리 이용되고 있는 Fig. 1과 같이 단면의 제원이 직선적으로 변화하는 변단면을 채택한다. 이 그림에서 기둥의 길이를 l , 左端의 斷面積과 斷面2次 모멘트를 A_a, I_a , 右端의 단면적과 단면 2차모멘트를 각각 A_b, I_b 라 한다. 이때 기둥의 임의점 x 에서 단면적 A_x 및 단면2차모멘트 I_x 는 각각 다음과 같이 표시된다.⁶⁾

$$A_x = A_b [k + (1-k)x/l]^m \dots\dots\dots (1)$$

$$I_x = I_b [k + (1-k)x/l]^n \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{여기서, } k = d_a/d_b \dots\dots\dots (3)$$

(1), (2)식에서는 k 는 (3)식에 나타난 바와

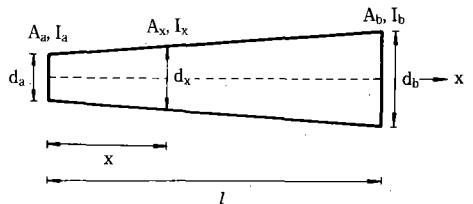


Fig. 1. Tapered column

같이 기둥의 좌단과 우단의 단면제원을 나타내는 d_a 와 d_b 의 無次元比이다.

또한 m , n 은 단면의 형상에 따라 결정되는 斷面形狀係數이다. (1), (2)식의 변단면식은 어떠한 단면형상에도 적용할 수 있으나 본 연구에서는 변화높이 구형단면, 변화폭 구형단면과 정방향단면의 3가지 단면형상에 대하여 적용시키며, 이들 단면형상에 대한 단면형상계수 m , n 값은 다음과 같다.⁷⁾

① 변화높이 구형단면(depth taper)

$$m=1 \dots\dots\dots(4)$$

$$n=3 \dots\dots\dots(5)$$

② 변화폭 구형단면(breadth taper)

$$m=1 \dots\dots\dots(6)$$

$$n=1 \dots\dots\dots(7)$$

③ 정방향단면(square taper)

$$m=2 \dots\dots\dots(8)$$

$$n=4 \dots\dots\dots(9)$$

III. 數學的 模型

Fig. 2는 축압축력을 받는 기둥의 自由振動 모드를 나타낸 것이다. 기둥의 자유진동은 調和振動을 하며 이때 調和振動式은 다음과 같이 표시된다.⁸⁾

$$w(x, t) = w_x \sin(\omega t) \dots\dots\dots(10)$$

윗 식에서 w_x 는 조화진동의 진폭이며, ω 는 固

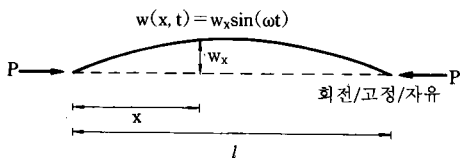


Fig. 2. Vibration mode of column under compressive load

有角振動數, t 는 時間이다.

Fig. 2와 같이 축압축력이 작용하는 변단면 기둥의 자유진동을 지배하는 偏微分方程式은 다음과 같다.⁹⁾

$$E \frac{d^2 I_x}{dx^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2E \frac{dI_x}{dx} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + EI_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A_x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots(11)$$

文獻[9]에서는 축인장력을 “+”로 하였으나, 기둥문제에서는 압축력을 “+”로 하는 것이 타당하므로 위의 (11)식은 文獻[9]의 편미분방정식에서 軸方向力項의 부호를 “-”에서 “+”로 바꾼 결과이다.

(2)식에서 dI_x/dx , $d^2 I_x/dx^2$ 를 구하면 다음과 같다.

$$dI_x/dx = n(1-k)I_b^{-1} [k + (1-k)x/l]^{n-1} \dots\dots(12)$$

$$d^2 I_x/dx^2 = n(n-1)(1-k)^2 I_b^{-2} [k + (1-k)x/l]^{n-2} \dots\dots(13)$$

微分方程式을 무차원으로 誘導하기 위하여 횡방향 좌표 x 및 調和振動의 진폭 w_x 를 기둥의 길이 l 로 다음 식들과 같이 정규화한다.

$$\zeta = x/l \dots\dots\dots(14)$$

$$\eta = w_x/l \dots\dots\dots(15)$$

위의 (11)식의 편미분방정식에 (1), (2), (12), (13) 식 및 (10)식으로 부터 $\partial^2 w/\partial x^2$, $\partial^3 w/\partial x^3$, $\partial^4 w/\partial x^4$, $\partial^2 w/\partial t^2$ 를 구하여 대입한 후에 양변을 $\sin(\omega t)$ 로 나누고 (14), (15)식의 無次元 變數를 이용하면, 다음과 같이 축압축력을 받는 變斷面 기둥의 自由振動을 지배하는 무차원 미분방정식이 유도된다.

$$\eta'''' = -\frac{2n(1-k)}{[k+(1-k)\zeta]} \eta'''' - \left\{ \frac{n(n-1)(1-k)^2}{[k+(1-k)\zeta]^2} + \frac{\pi^2 p}{[k+(1-k)\zeta]^n} \right\} \eta'' + \frac{\omega^2 I^4 \rho A_b / EI_b}{[k+(1-k)\zeta]^{n-m}} \eta \quad \dots\dots\dots(16)$$

위의 (16)식에서 p는 (17)식과 같이 정의되는 무차원 축압축력이다.

$$p = \frac{Pl^2}{\pi^2 EI_b} \quad \dots\dots\dots(17)$$

이상에서 (16)식이 기둥에 축압축력이 작용할 때 기둥의 面内 自由振動을 지배하는 미분방정식이다.

기둥에 축압축력이 작용할 때 축압축력과 固有角振動數 ω 와의 관계는 Fig. 3과 같이 축압축력이 증가함에 따라서 고유각진동수 ω 는 減少하게 되며, 축압축력이 기둥의 挫屈荷重에 도달하면 기둥은 不安定狀態로 되어 고유각진동수는 "0"이 된다. 이때 ω 가 "0"되는 즉 Fig. 3에서 □표로 표시된 하중이 기둥의 좌굴하중이 된다. 10, 11)

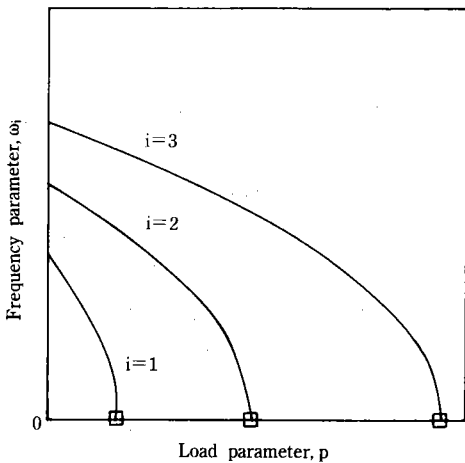


Fig. 3. Example of dynamic stability of column

따라서 (16)식에 $\omega=0$ 을 대입하고 $p=p_{cr}$ 을 대입하면 다음 (18)식과 같은 변단면 기둥의 無次元 挫屈荷重을 支配하는 微分方程式이 유도된다.

$$\eta'''' = -\frac{2n(1-k)}{[k+(1-k)\zeta]} \eta'''' - \left\{ \frac{n(n-1)(1-k)^2}{[k+(1-k)\zeta]^2} + \frac{\pi^2 p_{cr}}{[k+(1-k)\zeta]^n} \right\} \eta'' \quad \dots\dots\dots(18)$$

(18)식의 p_{cr} 은 (17)식에서 $P=P_{cr}$ 인 다음 (19)식과 같이 표시되는 無次元 挫屈荷重(buckling load parameter)이다.

$$p_{cr} = \frac{P_{cr}^2}{\pi^2 EI_b} \quad \dots\dots\dots(19)$$

(18)식이 미분방정식을 수치해석하기 위한 境界條件은 다음과 같다. 먼저 回轉端에서는 w와 휨모멘트 $M(=EI_x d^2w/dx^2)$ 이 "0"이므로 (14), (15)식의 무차원 변수를 이용하면 다음과 같은 境界條件式이 誘導된다.

$$\eta=0, \zeta=0 \text{ 또는 } \zeta=1 \text{에서} \quad \dots\dots\dots(20)$$

$$\eta''=0, \zeta=0 \text{ 또는 } \zeta=1 \text{에서} \quad \dots\dots\dots(21)$$

다음으로 固定端에서는 w 및 回轉角(w')이 "0"이므로 (14) (15)식의 무차원 변수를 이용하면 다음의 境界條件式이 유도된다.

$$\eta=0, \zeta=0 \text{ 또는 } \zeta=1 \text{에서} \quad \dots\dots\dots(22)$$

$$\eta'=0, \zeta=0 \text{ 또는 } \zeta=1 \text{에서} \quad \dots\dots\dots(23)$$

마지막으로 自由端에서는 휨모멘트 $M(=EI_x d^2w/dx^2)$ 과 剪斷力 $V(=Pdw/dx + dM/dx)$ 가 "0"이므로 (14), (15)식의 무차원 변수들을 이용하면 다음의 境界條件式이 誘導된다.

$$\eta''=0, \zeta=0 \text{ 또는 } \zeta=1 \text{에서} \quad \dots\dots\dots(24)$$

$$\eta'''' + \pi^2 p_{cr} k^{-n} \eta' = 0, \zeta=0 \text{에서} \quad \dots\dots\dots(25)$$

$$\eta''' + \pi^2 p_{cr} \eta' = 0, \zeta = 1 \text{에서} \dots\dots\dots (26)$$

이상에서 (18)식이 변단면 기둥의 無次元 挫屈荷重을 지배하는 미분방정식이며 回轉端의 境界條件式은 (20), (21)식, 固定端의 境界條件式은 (22), (23)식, 自由端의 境界條件式은 (24)~(26)식과 같다.

IV. 數值解析 方法 및 數值解의 檢證

변단면 기둥의 挫屈에 대한 미분방정식 (18)식의 嚴密解는 존재하지 않으므로 數值解析法에 의하여 數值解를 구하여야 한다. (18)식의 미분방정식에는 未知의 無次元 挫屈荷重 p_{cr} 項이 포함되어 있으므로 먼저 p_{cr} 값을 가정하여 미분방정식에 대입한 후에 기둥좌단($\zeta=0$)의 경계조건을 이용하여 미분방정식의 數值積分을 施行한다. 假定한 p_{cr} 값이 대상기둥의 좌굴에 대한 固有值인지는 기둥우단($\zeta=1$)의 境界條件의 滿足與否로 判斷한다.

本 研究에서 미분방정식의 수치적분은 알고리즘이 간단하면서도 精度가 높아 工學問題에 많이 이용되는 Improved Euler method를 이용하였고, 固有值를 p_{cr} 값은 行列값 探查法을 이용하여 찾았다.^{12,13)} 이상의 數值解析 過程을 기둥의 端部條件, 斷面比, 단면형상계수 m , n 을 入力하면 무차원 좌굴하중 p_{cr} 값이 결정되도록 프로그램하였다.

기둥의 실제문제에서 解析하고자 하는 대상 기둥에 대한 斷面比 I_a/I_b 를 주는 경우가 實用의이므로 다음의 단면비를 도입하여 실제 數值解析에 이용한다.

$$e = I_a/I_b \dots\dots\dots (27)$$

이 때 $e=k^n$ 의 관계가 있으므로 $k=e^{1/n}$ 로 표시되기 때문에 (18)식의 지배 미분방정식을 수정없이 사용할 수 있다. 따라서 본 연구에서

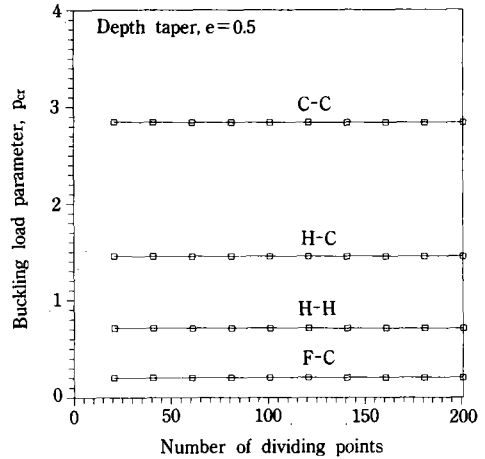


Fig. 4. Convergency analysis

이후의 모든 數值解析은 단면비로 (3)식의 k 대신에 (27)식의 e 값을 사용하였다.

실제의 數值適用 例를 施行하기 전에 收斂解析을 施行하여 미분방정식의 數值積分을 위한 단계길이(step size) $\Delta\zeta$ 를 산정하여야 한다. Fig. 4는 $e=0.5$ 인 변화높이 구형단면 기둥에 대하여 각 端部條件別로 挫屈荷重과 $1/\Delta\zeta$ 즉, 기둥지간길이의 분할갯수와의 관계를 나타낸 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 분할갯수가 20 이상이면 p_{cr} 값은 충분한 精度로 收斂이 된다. 그러나 本 研究에서는 數值解의 精度를 強化하기 위하여 분할갯수를 100으로 즉, 단계길이 $\Delta\zeta$ 를 0.01로 하여 수치해석하였다.

Table-1은 본 연구에서 動的概念을 導入하여 결정된 좌굴하중과 文獻^{14,15)}의 結果를 비교한 것이다. 文獻^{14,15)}의 값들은 靜的解析에 의한 결과들로 표에서 알 수 있듯이 본 연구결과와 아주 우수하게 접근하여 本 研究結果의 妥當性을 立證할 수 있다.

V. 數值解析 例 및 考察

Fig. 5, 6, 7은 각각 변화높이 구형단면, 변화폭 구형단면 및 정방형단면의 斷面形狀을 갖

Table-1. Comparison of results

幾何學的 形 狀	比較文獻	挫屈荷重 P_{cr}
H-H* m=1, n=3 e=0.3	本 研究	0.5555
	文獻[14]	0.5554
H-H m=1, n=1 e=0.4	本 研究	0.6772
	文獻[14]	0.6773
H-H m=2, n=4 e=0.5	本 研究	0.7075
	文獻[14]	0.7074
H-C e=1.	本 研究	2.046
	文獻[15]	2.046
C-C e=1.	本 研究	4.000
	文獻[15]	4.000
F-C m=2, n=4 e=0.6	本 研究	0.2144
	文獻[15]	0.2144

*H: 回轉端 C: 固定端 F: 自由端

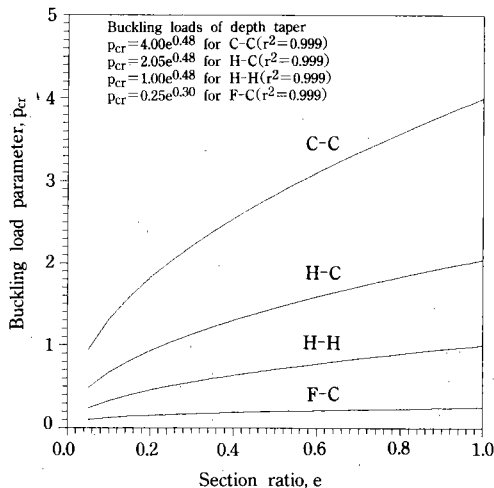


Fig. 5. p_{cr} vs. e curves(depth taper)

는 變斷面 기둥에 대하여 단면비(e)를 變化시키면서 각 端部條件別로 좌굴하중 p_{cr} 을 결정하여 그림으로 나타낸 것이다. 이 그림들에서 斷面比 e가 增加함에 따라 挫屈荷重은 增加함을 알 수 있으며, 固定-固定, 回轉-固定, 回轉-回

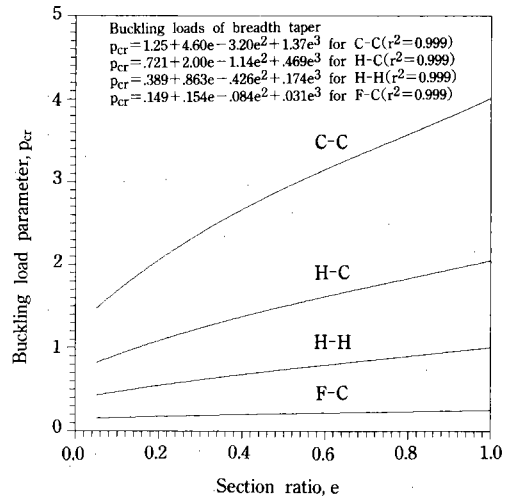


Fig. 6. p_{cr} vs. e curves(breadth taper)

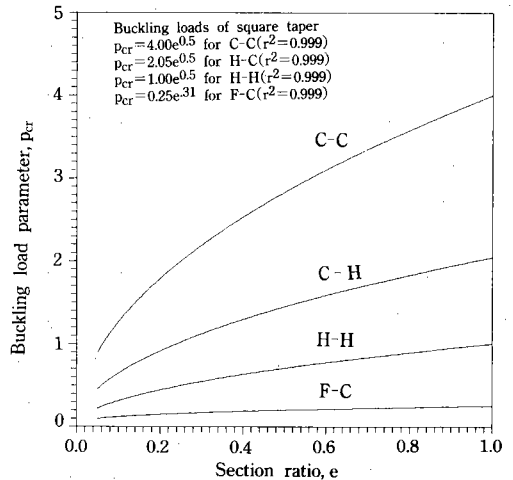


Fig. 7. p_{cr} vs. e curves(square taper)

轉, 自由-固定的 端部條件 順序로 그 增加率이 커짐을 알 수 있다.

本 研究에서 數值解析 結果로 얻어진 (p_{cr} , e)값들을 回歸分析하여 變斷面 기둥의 挫屈荷重方程式을 Table-2에 提案하였다. 이 표에서 r은 相關係數이며, r^2 이 모두 1에 가까와 거의 完全相關關係를 보이고 있다. 본 연구에서 제안된 좌굴하중방정식을 이용하는 경우에 수치 해석 값과 平均 0.25%, 最大 0.5%의 差異를 보였으며, 따라서 제안된 좌굴하중방정식은 工

Table-2. Buckling load equations of tapered column

斷面形狀	端部條件	挫屈荷重方程式
Depth taper	C-C	$p_{cr} = 4.00e^{0.48} \quad (r^2 = 0.999)$
	H-C	$p_{cr} = 2.05e^{0.48} \quad (r^2 = 0.999)$
	H-H	$p_{cr} = 1.00e^{0.48} \quad (r^2 = 0.999)$
	F-C	$p_{cr} = 0.25e^{0.30} \quad (r^2 = 0.999)$
Breadth taper	C-C	$p_{cr} = 1.25 + 4.60e - 3.20e^2 + 1.37e^3 \quad (r^2 = 0.999)$
	H-C	$p_{cr} = 0.721 + 2.00e - 1.14e^2 + 0.469e^3 \quad (r^2 = 0.999)$
	H-H	$p_{cr} = 0.389 + 0.863e - 0.426e^2 + 0.174e^3 \quad (r^2 = 0.999)$
	F-C	$p_{cr} = 0.149 + 0.154e - 0.084e^2 + 0.031e^3 \quad (r^2 = 0.999)$
Square taper	C-C	$p_{cr} = 4.00e^{0.5} \quad (r^2 = 0.999)$
	H-C	$p_{cr} = 2.05e^{0.5} \quad (r^2 = 0.999)$
	H-H	$p_{cr} = 1.00e^{0.5} \quad (r^2 = 0.999)$
	F-C	$p_{cr} = 0.25e^{0.31} \quad (r^2 = 0.999)$

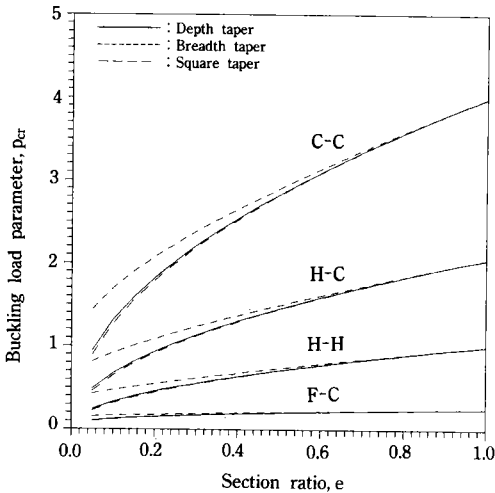


Fig. 8. The effects of cross-sectional shapes

學的으로 이용하기에 충분하다고 思料된다.

Fig. 8은 斷面形狀이 좌굴하중에 미치는 影響을 분석하기 위한 그림이다. 그림에서 알 수 있듯이 단면비 e가 일정한 경우 좌굴하중은 변화폭 구형단면, 변화높이 구형단면, 정방형 단면의 순서로 크을 알 수 있으며, 특히 단면 비가 작은 경우에는 변화폭 구형단면을 갖는 기둥과 변화 높이 구형단면, 정방형단면을 갖는 기둥사이에는 상당한 차이를 보이고 있음을 알

수 있다. 그러나 斷面比가 1에 접근하는 경우 즉, 등단면 기둥으로 轉換되는 경우에는 세가지 斷面形狀에 대한 좌굴하중 값들은 文獻에서 볼 수 있는 등단면 기둥의 좌굴하중 값과 일치함을 알 수 있다.

실제 기둥좌굴문제에서 기둥의 最大荷重能力은 좌굴하중이 되며 이에 대응하는 臨界應力은 다음과 같다.

$$\sigma_{cr} = P_{cr} / A_{min} \quad \dots\dots\dots (28)$$

(28)식에 (1)식으로 부터 $A_{min} = A_a = A_b e^{m/n}$ 및 (19)식으로부터 P_{cr} 를 대입하면 다음식과 같다.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 p_{cr} EI_b}{e^{m/n} A_b} \quad \dots\dots\dots (29)$$

(29)식의 σ_{cr} 이 다음의 관계를 만족하는 경우에만 본 연구의 좌굴하중이 기둥의 最大荷重能力이 된다.

$$\sigma_{cr} < \sigma_{pl} \quad \dots\dots\dots (30)$$

(30)식에서 σ_{pl} 은 기둥재료의 比例限度이다. (29)식과 (30)식의 관계로 부터 기둥시간길이의 임계값은 다음 식과 같이 정의된다.

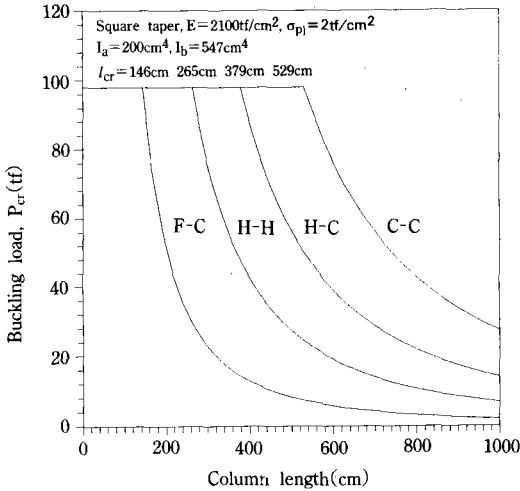


Fig. 9. P_{cr} vs. l curves

$$l_{cr} \geq \frac{\pi}{e^{m/2n}} \left[\frac{P_{cr} E I_b}{\sigma_{p1} A_b} \right]^{0.5} \dots\dots\dots(31)$$

(31)식에 대상기둥에 대한 無次元 挫屈荷重, 材料性質 등을 대입하면 임계지간길이 l_{cr} 이 결정되며, 대상기둥의 길이가 이 값 이하인 경우 즉 短柱에 대해서는 挫屈荷重에 도달하기 전에 기둥의 應力이 σ_{p1} 에 먼저 도달한다.

Fig. 9는 단면제원이 $I_a=200cm^4$, $I_b=547cm^4$, $A_a=49cm^2$, $A_b=81cm^2$ 인 정방형단면이고, 재료성질이 $E=2100t/cm^2$, $\sigma_{p1}=2tf/cm^2$ 인 기둥에 대하여 각 단부조건별로 좌굴하중과 기둥지간길이 사이의 관계를 나타낸 것이다. 그림에 나타낸 바와 같이 위의 제원을 갖는 기둥의 경우 部材材料의 比例限度 $\sigma_{p1}=2tf/cm^2$ 에 對應하는 荷重 98tf이하의 하중에 대해서만 挫屈荷重曲線이 적용된다.¹⁶⁾ Fig. 9에서 挫屈荷重曲線이 比例限度荷重 98tf를 넘지 않는 範圍의 기둥의 지간길이 임계값은 (31)식으로 부터 固定-固定인 경우 529cm, 回轉-固定인 경우 379cm, 回轉-回轉인 경우 265cm, 自由-固定인 경우 146cm로 결정된다.

VI. 結 論

이 論文은 動의概念에 의한 變斷面 기둥의 挫屈荷重에 관한 연구로서, 本 研究를 통하여 얻어진 結論은 다음과 같다.

1. 動의概念을 導入하여 變斷面 기둥의 挫屈荷重을 支配하는 微分方程式을 誘導하였다.
2. 위의 微分方程式과 境界條件을 이용하여 多樣한 端部條件을 갖는 變斷面 기둥의 挫屈荷重을 결정할 수 있는 數值解析 技法을 開發하였다.
3. 斷面比 e 가 클수록 挫屈荷重은 크다.
4. 변화폭 구형단면, 변화높이 구형단면, 정방형단면의 순서로 좌굴하중이 크다.
5. 변화높이 구형단면, 변화폭 구형단면 및 정방형단면을 갖는 기둥의 挫屈荷重方程式을 Table-2와 같이 提案한다.

參 考 文 獻

1. 劉哲秀, 孫晟源, 1984, 一定變斷面 長柱의 臨界挫屈荷重 決定, 大韓土木學會 論文集, 第4卷 第1號, pp. 98-101.
2. Sakiyama, T., 1986, A Method of Analysing the Elastic Buckling of Tapered Columns, Computers & Structures, Vol. 23, No. 1, pp. 119-120.
3. Kounadis, A. N. And Mallis, J. G., 1987, Elastica Type Buckling Analysis of Bars from Non-Linearly Elastic Material, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 22, No. 2, pp. 99-107.
4. Wang, C. M. and Ang, K. K., 1988, Buckling Capacities of Braced Heavy Columns Under an Axial Loads, Computers & Structures, Vol. 28, No. 5, pp. 563-571.
5. 李炳求, 吳相晉, 牟正萬, 1991, 單純支持 變斷面 기둥의 挫屈荷重 및 後挫屈舉動, 大韓土木學會 論文集, 第11卷 第4號, pp. 17-26.

6. Gupta, A. K., 1985, Vibration of Tapered Beams, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 11, No. 1, pp. 19-36.
7. 李炳求, 金連泰, 牟正萬, 1992, 軸引張力을 받는 變斷面 보의 自由振動, 韓國農工學會誌, 第34卷 第1號, pp. 57-65.
8. Biggs, J. M., 1982, Introduction to Structural Dynamics, McGraw-Hill, pp. 35-37.
9. 李炳求, 金連泰, 牟正萬, 1992, 前揭書.
10. Clough, R. W. and Penzien, J., 1975, Dynamics of Structures, McGraw-Hill, pp. 182-185.
11. Chen, W. F. and Atsuta, T., 1976, Theory of Beam-Columns(1), McGraw-Hill, pp. 110-115.
12. Al-Khafaji, A. W. and Tooley, J. R., 1986, Numerical Methods in Engineering Practice, Holt, Rinehart and Winston, Inc., pp. 419-424.
13. Leonard, J. W., 1988, Tension Structures, McGraw-Hill, pp. 300-304.
14. 李炳求, 吳相晉, 牟正萬, 1991, 前揭書.
15. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., 1961, Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, pp. 126-130.
16. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., 1984, Mechanics of Materials, 2nd Edition, Books/Cole Engineering, pp. 569-578.