행렬게임의 활성전략집합에 대한 감도분석

(Sensitivity Analysis on the Active Strategy Set in the Matrix Game)

성 기 석*

ABSTRACT

The purpose of this paper is to study the sensitivity analysis in the matrix game. The third type sensitivity analysis is defined as finding the characteristic region of an element of the payoff matrix in which the set of current active strategies is preserved.

First by using the relationship between matrix game and linear programming, we induce the conditions which must be satisfied for preserving the set of current active strategies.

Second we show the characteristic regions of active and inactive strategy. It is found that the characteristic regions we suggests in this paper are same with that of the type one sensitivity analysis suggested by Sung[3] except only one case.

Key Words : Sensitivity Analysis, Matrix Game, Active Strategy,

1. 서　　론

행렬게임은 그 특성이나 해법이 많이 연구되어 있다. 행렬게임에서의 감도분석은 제1종과, 제2종으로 나누어 연구된 바가 있다.[3] 또한 선형계획과의 관계와 선형계획을 이용한 행렬게임의 감도분석도 제1종과 제2종에 대하여 연구된 바가 있다.[4]

행렬게임의 감도분석에서 제1종은 이득행렬의 어느 한 계수가 변화할 때, 현재의 게임의 최적전략들의 값과 게임값이 최적으로 유지되는 변화범위를 구하는 것이고, 제2종은 현재의 게임의 최적기저해가 최적으로 유지되는 변화범위를 구하는 것이다.

주어진 행렬게임에서 최적혼합전략에 대하여 영의 확률을 가지는 순수전략을 비활성전략이라고 하고 비활성전략이 아닌 순수전략을 활성전략이라 한다. 즉, 적어도 하나의 최적혼랍전략에서 영보다 큰 확률을 가지는 순수전략을 활성전략이라한다. 그런데 행렬게임에서 현재의 활성전략집합이 그대로 유지되는 행렬계수의 변화범위를 아는 것이 유용하며 의미가 있다. 왜내하면 행렬게임의 최적전략은 대부분의 경우 여러개의 게임의

*강릉대학교 산업공학과

기저해의 볼록조합으로 나타나기 때문에 어느 한 게임의 기저해에 대해서만 감도분석하는 것은 실제적인 의미가 적다. 이러한 활성전략의 집합이 유지되는 계수의 변화범위를 구하는 것을 제3종 감도분석이라 하자.

이러한 감도분석은 주어진 이득행렬에 대하여 게임의 해를 구하여 의사결정을 내린 후에, 상황이 바뀌어 이득행렬의 한 계수가 변화됨으로 인해서 새로운 게임의 해를 구할 필요가 있을 때, 새로운 게임의 해를 구하는 과정에서 고려해야할 활성전략의 집합을 정하는데 사용할 수 있다.

이 논문은 2장에서 선형계획과 행렬게임의 관계를 살펴보고, 또 선형계획의 최적해가 가져야할 조건을 이용하여 행렬게임에서 활성전략의 집합이 유지되는 조건을 구한다. 그리고 3장에서 행렬게임의 제3종 감도분석 방법을 제시하고, 제4장에서 예제를 풀이한다.

2. 선형계획과 행렬게임

지금 어느 한 행렬게임에서 모든 요소의 값이 양수인 rxs 행렬 A를 이득행렬, r 차원벡터 X를 참가자 1의 혼합전략, s 차원벡터 Y를 참가자 2의 혼합전략이라 하자. 그리고 e를 모든 요소를 1로 하는 단위벡터라 하자.

그러면 각 참가자의 최적혼합전략은 각각 다음의 두 선형계획식의 최적해 X^*, Y^*를 구하여 $x=\gamma X^*$, $y=\gamma Y^*$와 같이 구할 수 있다. 이때 게임의 값은 양의 값인 γ가 된다.

$$\begin{aligned} &\text{Min } 1/\gamma = e^T X \\ &\text{s.t.} \quad A^T X \geq e \quad \cdots\cdots(1) \\ &\qquad\quad X \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Max } 1/\gamma = e^T Y \\ &\text{s.t.} \quad AY \geq e \quad \cdots\cdots(2) \\ &\qquad\quad Y \geq 0 \end{aligned}$$

그런데 선형계획식 (1)과 (2)는 서로 쌍대관계이므로 다음과 같은 하나의 선형계획식 (3)을 풀어서 그 최적해 Y^*와 쌍대최적해 X^*를 구하여 참가자 1과 2의 최적혼합전략을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{Max } 1/\gamma = e^T Y \\ &\text{s.t.} \quad AY + IS = e \quad \cdots\cdots(3) \\ &\qquad\quad Y,\ S \geq 0 \end{aligned}$$

행렬게임의 모든 최적혼합전략에서 영의 확률을 가지는 순수전략을 비활성전략이라 하고 비활성전략이 아닌 순수전략을 활성전략이라 한다. 지금 주어진 행렬게임에서 참가자 1과 참가자 2의 최적혼합전략을 각각 $x=(x^+,\ x^0)$, $y=(y^+,\ y^0)$와 같이 표시하고 x^+, y^+는 각각 참가자 1과 2의 활성전략 x^0, y^0는 비활성전략에 대응하는 확률값이라 하자. 그러면 $x^+\geq 0$, $y^+\geq 0$이고 $x^0=0$, $y^0=0$이다. 여기서 이득행렬 A의 어느한 계수가 변화할 때, 활성전략들은 활성전략으로, 비활성전략들은 비활성전략으로 계속 유지되는 θ의 변화 범위를 구하는 것이 제3종 감도분석이다.

지금 이득행렬 A가 다음과 같이 각 참가자 1과 2의 활성전략과 비활성전략에 대응하는 부분행렬로 분리된다고 하자.

$$\begin{array}{c|cc} & y^+ & y^0 \\ \hline x^+ & M & R \\ x^0 & F & G \end{array}$$

이때 활성전략 행렬인 mxn($m\leq n$) 행렬 M이 정방행렬이 아니라고 가정한다. 행렬 M이 정방행렬인 경우에는 이것은 게임의 최적기저해와 대응되고, 이러한 게임의 최적기저해에 대한 감도분석은 제2종 감도분석으로서, 이미 연구되었다.[3]

그리고 이 행렬게임을 선형계획식 (3)과 같은 형태로 만들었을 때, 선형계획식 (3)의 행렬이 다음과 같이 분리된다고 하자.

$$
\begin{array}{c} \\ [A \mid I] = \begin{array}{c} X^+ \\ \\ X^0 \end{array} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} Y^+ & Y^0 & S^0 & S^+ \end{array} \\
\left[\begin{array}{c|c|c|c} M & R & I & \\ \hline F & G & & I \end{array}\right]
\end{array}
$$

여기서 X^+와 X^0는 전술한 바와 같이 선형계획식 (3)의 쌍대해가 된다. 즉, X^+의 값은 여유변수 S^0의 할인가와 같고, X^0의 값은 여유변수 S^+의 할인가와 같다. 그리고 여기서 X^+, Y^+는 각각 참가자 1과 2의 활성전략, X^0, Y^0는 비활성전략에 대응한다. 따라서 선형계획식 (3)의 가능한 모든 최적기저해에서 $X^+ \geq 0$, $Y^+ \geq 0$이고, $X^0=0$, $Y^0=0$이 되어야 한다. 위에서 행렬 M이 어떠한 비가역인 임의의 행렬 B를 부분행렬로 가져서 다음과 같이 분리된다고 하자.

$$
\begin{array}{c} \\ [A \mid I] = \begin{array}{c} X^+ \\ \\ X^0 \end{array} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} Y_B^+ & Y_D^+ & Y^0 & S^0 & S^+ \end{array} \\
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} B & D & R & I & \\ \hline F_B & F_D & G & & I \end{array}\right]
\end{array}
$$

그리고 선형계획식 (3)의 최적기저행렬을

$$
N = \begin{array}{c}
\begin{array}{cc} Y_B^+ & S^+ \end{array} \\
\left[\begin{array}{c|c} B & \\ \hline F_B & I \end{array}\right]
\end{array}
$$

라고 두면, 이것의 역행렬은 다음과 같다.

$$
N^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} B^{-1} & \\ \hline -F_B B^{-1} & I \end{array}\right]
$$

그러면 쌍대해는 다음과 같이 된다.

$$[X^+ \mid X^0] = [e \mid 0]\, N^{-1} = [e^T B^{-1} \mid 0]$$

그리고 할인가는 다음과 같이 된다.

$$
\begin{array}{l}
[X^+ \mid X^0]\,[A \mid I] - [e \mid 0] \\
\begin{array}{ccccc} \quad Y_B^+ & \quad Y_D^+ & \qquad Y^0 & \qquad S^0 & S^+ \end{array} \\
= [\,0 \mid e^T B^{-1} D - e \mid e^T B^{-1} R - e \mid e^T B^{-1} \mid 0\,]
\end{array}
$$

그런데 선형계획식 (3)의 가능한 모든 최적기저해에서 $X^+ \geq 0$, $Y^+ \geq 0$ 이고 $X^0=0$ $Y^0=0$이 되려면 다음의 조건들을 만족하여야 한다.

먼저 모든 가능한 최적기저해에 대해서 $X^+ \geq 0$ 이고 $X^0=0$ 이려면, 임의의 최적기저해에 대해서 쌍대가능성을 만족하면 되므로, $M=[B \mid D]$로 되는, M의 임의 가역인 부분행렬 B에 대하여

$$X^+ = e^T B^{-1} \geq 0 \tag{4}$$

이어야 한다. 그 다음 모든 가능한 최적기저해에 대해서 $Y^+ \geq 0$ 이고 $Y^0=0$이 되려면, 우선 상보여유정리를 적용하면, $M=[B \mid D]$로 되는 M의 모든 가역인 부분행렬 B에 대하여, 할인가로부터,

$$e^T B^{-1} D - e = 0 \tag{5}$$
$$e^T B^{-1} R - e \geq 0 \tag{6}$$

이어야 한다. 또 원가능성을 만족하여야 하므로

$$MY^+ = e \tag{7}$$
$$FY^+ \leq e \tag{8}$$
$$Y^+ \geq e \tag{9}$$

이어야 한다. 이러한 조건 (4)－(9)를 만족할 때 선형계획식 (3)의 현재의 모든 가능한 최적기저해가 최적으로 유지되며 각 최적기저해에서 $X^+ \geq 0$, $Y^+ \geq 0$ 이고 $X^0=0$, $Y^0=0$이게 된다. 즉, 주어진 행렬게임의 활성전략의 집합이 그대로 유지된다. 따라서 위의 조건 (4)－(9)를 만족하는 행렬계수 $a'_{pq}=a_{pq}+\theta$의 변화 범위를 구하면 된다.

3. 감도분석

여기서 이득행렬 A의 어느한 계수 a_{pq}가 $a'_{pq}=a_{pq}+\theta$와 같이 변화할 때, 위의 조건 (4)－(9)가 계속해서 만족되는 θ의 최대변화 범위를

구해보자, E_{pq}를 a_{pq}에 대응되는 요소의 값이 1이고 나머지 모든 요소의 값이 0인 단위행렬이라 하자.

경우 1 : a_{pq}가 행렬 M에 속할 때, 즉 참가자 1과 2 모두의 활성전략에 대응하는 행렬계수가 변화하는 경우이다. 이 경우 위의 조건식 (4)－(9) 모두가 영향을 받는다. 그런데 조건 (5)를 보면, $M=[B|D]$로 되는, M의 모든 가역인 부분행렬 B에 대하여 $e^TB^{-1}D-e=0$를 만족하여야 한다. 지금 M의 임의의 가역인 부분행렬 B'가 주어져 $M=[B'|D']$과 같이 분리 된다고 하자. 이때 만약 a_{pq}가 B'에 속한다면 $e^T(B'+\theta E_{pq})^{-1}D-e=0$이어야 하고, D'에 속한다면 $e^T(D'+\theta E_{pq})-e=0$이어야 한다. 그런데 두 경우 모두 항상 등호를 만족시키려면 $\theta=0$일 수 밖에 없다. 따라서 $\theta=0$이다.

경우 2 : a_{pq}가 행렬 G에 속할 때, 즉 참가자 1과 2 모두의 비활성전략에 대응하는 행렬계수가 변화하는 경우이다. 이 경우 위의 조건식 (4)－(9)중 어느것도 영향을 받지 않는다. 즉 a_{pq}가 어떻게 변화하더라도 조건 (4)－(9)가 만족되고, 따라서 현재의 활성전략의 집합은 그대로 유지된다. 그러므로 $-\infty \le \theta \le \infty$이다.

경우 3 : a_{pq}가 행렬 R에 속할 때, 즉 참가자 1의 활성전략과 참가자 2의 비활성전략에 대응하는 행렬계수가 변호하는 경우이다. 이 경우 위의 조건식(4)－(9) 중에서 조건식 (6)만 영향을 받는다. 즉, $M=[B|D]$로 되는, M의 모든 가역인 부분행렬 B에 대하여 $e^TB^{-1}(R+\theta E_{pq})-e \ge 0$를 만족하여야 한다. 그런데, 조건식 (4)에서 $e^TB^{-1}=X^+$이고, 또 $x^+=\gamma X^+$이므로 $x^+(R+\theta E_{pq}) \ge \gamma e$를 만족하면 조건식 (6)이 만족된다. 여기서 $x^+R=\ell$이라 두면, ℓ은 참가자 2의 비활성전략들에 대한 기대값이 되는데, 이것을 사용하여 앞의 식을 정리하면 $(\ell_q-\gamma)/x_p \le \theta \le \infty$와 같이 된다. 제1종과 제2종 감도분석의 결과와 일치한다.

경우 4 : a_{pq}가 행렬 F에 속할 때, 즉 참가자 1의 비활성전략과 참가자 2의 활성전략에 대응하는 행렬계수가 변화하는 경우이다. 이 경우 위의 조건식 (4)－(9) 중에서 조건식 (7)－(9)만 영향을 받는다. 따라서 다음의 식

$$\{MY^+ = e,\ (F+\theta E_{pq})Y^+ \le e,\ Y^+ \ge 0\}$$

에서 Y^+의 해가 존재하여야 한다. 즉, 위 식에서 Y^+의 해가 존재하는 θ의 최대 변화 범위를 구하면 된다. 이러한 θ의 범위를 구하기 위해서는 선형계획의 2 단계 단체법에서 제1단계의 인공변수가 기저로 다시 진입하게 되는 θ의 범위를 구하거나, 상대 단체법을 이용하여 쌍대 무한해가 발생하게 되는 θ의 범위를 구하는 방법 등을 사용할 수 있을 것이다. 그러나 이들 방법들도 많은 계산을 요하므로 효율적인 계산방법에 대한 연구가 더 있어야 할 것이다.

4. 예제 풀이

다음과 같은 행렬게임의 이득행렬이 주어져 있다하자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

위 문제에서 최적혼합전략을 구해보면

$[x,\ y]^1 =$

$[(2/3,\ 1/3),\ (1/12,\ 1/6,\ 3/4,\ 0)],$

$[x, y]^2 =$
$[(2/3, 1/3), (1/6, 0, 5/6, 0)]$,
$[x, y]^3 =$
$[(2/3, 1/3), (0, 1/3, 2/3, 0)]$
과 같이 여러개의 최적혼합전략이 있음을 알 수 있다. 그 중 $[x, y]^1$에 대해서 각 참가자 1과 2의 순수전략들의 기대값인 κ, ℓ을 구해보면 다음과 같다.

x \ y	1/12	1/6	3/4	0	κ
2/3	1	2	3	4	8/3
1/3	6	4	2	1	8/3
0	7	0	1	8	4/3
ℓ	8/3	8/3	8/3	9/3	

따라서 활성전략에 대응하는 부분행렬 M은 다음과 같다.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

그러면 여기서 활성전략의 집합을 유지하는 제 3종 감도분석을 해보자.

1) 경우 1 : A의 계수들 중 a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}은 행렬 M에 속하는 계수들이므로 변화할 수 없다. 따라서 $\theta_{11}=\theta_{12}=\theta_{13}=\theta_{21}=\theta_{22}=\theta_{23}=0$.

2) 경우 2 : a_{34}는 행렬 G에 속하는 계수이므로 어떻게 변화 하더라도 활성전략의 집합이 바뀌지 않는다. 따라서 $\infty \leq \theta_{34} \leq \infty$.

3) 경우 3 : a_{14}, a_{24}는 행렬 R에 속한다. 따라서 다음과 같이 계산한다. 우선 행렬 M의 임의의 비가역인 부분행렬 B와 그 역행렬 B^{-1}을 다음과 같이 구한다.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 3/4 & -1/8 \end{bmatrix}$$

그리고 $e^T B^{-1} = [1/4 \ 1/8]$와 같이 구한다. 그리고 a_{14}, a_{24}에 대해서 각각 다음과 같이 계산한다.

i) a_{14} : $[1/4 \ 1/8] \ [4+\theta \ 1]^T \geq 1$이어야 하므로

$$-1/2 \leq \theta_{14} \leq \infty$$

ii) a_{24} : $[1/4 \ 1/8] \ [4 \ 1+\theta]^T \geq 1$이어야 하므로

$$-1 \leq \theta_{24} \leq \infty$$

4) 경우 4 : a_{31}, a_{32}, a_{33}는 행렬 F에 속하므로 다음과 같이 계산한다.
먼저 다음의 식

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$
$$y_1, 2y_2, 3y_3 = 1$$
$$6y_1, 4y_2, 2y_3 = 1$$

을 만족하는 y_1, y_2, y_3의 영역을 정리하면
$y_2=-2y_1+1/8$, $y_2=-2y_3+1/2$, $y_3=y_1+1/4$
$0 \leq y_1 \leq 1/16$, $0 \leq y_2 = -1/8$, $1/4 \leq y_3 \leq 5/16$
와 같다. 그리고 a_{31}, a_{32}, a_{33}에 대해서 각각 다음과 같이 계산한다.

i) a_{31} : $(7+\theta)y_1 - 0y_1 + 0y_2 + 1y_3 \leq 1$

즉 부등식 $(8+\theta)y_1 \leq 3/4$을 만족하는 θ의 최대 변화 범위를 구하면 된다. 그런데 $0 \leq y_1 \leq 1/16$이므로 $y_1=0$일 때 부등식은 항상 만족된다.

따라서 $\infty \leq \theta_{31} \leq \infty$.

ii) a_{32} : $7y_1 + \theta y_2 + 1y_3 \leq 1$

즉 부등식 $(\theta-4)y_2 \leq 1/4$을 만족하는 θ의 최대 변화 범위를 구하면 된다. 그런데 $0 \leq y_2 \leq 1/8$이므로 $y_2=0$일 때 부등식은 항상 만족된다. 따라

서 $\infty \leq \theta_{32} \leq \infty$.

iii) a_{33} : $7y_1 + 0y_2 + (1+\theta)y_3 \leq 1$

즉 부등식 $(8+\theta)y_3 \leq 11/4$을 만족하는 θ의 최대 변화 범위를 구하면 된다. 그런데 $1/4 \leq y_3 \leq 5/16$이므로 $\infty \leq \theta_{33} \leq 3$.

5. 결 론

본 논문에서는 행렬게임에서 현재의 활성전략의 집합을 유지하는 행렬계수의 변화 범위를 구하는 것을 제3종 감도분석이라고 정의하였다. 그리고 선형계획법에서 최적기저해가 유지되기 위한 조건들을 이용하여 제3종 감도분석 방법을 연구하였다.

여기서 두 참가자의 활성전략의 수가 같을 때에는 제2종 감도분석의 경우와 동일하므로 연구대상에서 제외하고, 참가자 1의 활성전략의 수가 참가자 2의 것보다 적다고 가정하였다.

제3종 감도분석의 결과는, 감도분석의 대상이 되는 행렬계수가 참가자 1의 비활성전략과 참가자 2의 활성전략에 대응하는 경우에만 다르고, 참가자 1의 활성전략과 참가자 2의 비활성전략에 대응하는 경우, 두 참가자 모두의 활성전략에 대응하는 경우, 두 참가자 모두의 비활성전략에 대응하는 경우 등의 나머지 세 경우에는 제1종 감도분석과 동일하게 나타났다.

參 考 文 獻

1. 박순달, 게임이론, 대영사, 1982.
2. 박순달, 선형계획법, 대영사, 1982.
3. 성기석, 박순달, "행렬게임에서의 감도분석", 한국경영과학회지, 13권 1호, pp.1-9.
4. 성기석, 박순달, "선형계획을 이용한 행렬게임의 감도분석", 대한산업공학회지, 14권 1호, pp.43-49.
5. Bohnenblust H.F., S.Karlin, L.S.Shapley "Solution of Discrete Two Person Games" Annals of Mathematics study No.24.
6. Dresher M. Games of Strategy (1961) Prentice-Hall pp.36-49.
7. Gal T. Postoptimal Analysis, Parametric Programming & Related Topics (1979) McGraw-Hill
8. Gale D., S. Shermn "Solution of Finite Two Person Games" Annals of Mathematics Study No.24.
9. Jones A.J. Game Theory (1980) Ellis Howood
10. Murty K. Linear and Combinatorial programming (1976) John Wiley & Sons.
11. Shapley L.S., Snow R. "Basic Solutions of Discrete Games" Annals of Mathematics Study No. 24.