

## 칸반 시스템의 분석과 설계<sup>+</sup>

김 성 철\*

### ABSTRACT

In this paper, we study a manufacturing system of serial stages with general service times, in which the production of each stage and the coordination of stages are controlled by Kanban discipline. This Kanban discipline is modeled as a Discrete Event Dynamic System and a system of recursive equations is applied to study the dynamics of the system. The recursive relationship enables us to compare this Kanban discipline with the other blocking disciplines such as transfer blocking, service blocking, block-and-hold b, and block-and-hold K, and the Kanban is shown to be superior to the other disciplines in terms of makespan and throughput. As a special case, two stages Kanban system is modeled as  $C_2/C_2/1/N$  queueing system, and a recursive algorithm is developed to calculate the system performance. In optimizing the system performance, the stochastic optimization approach of Robbins-Monro is employed via perturbation analysis, the way to estimate the stochastic partial derivative based on only one sample trajectory of the system, and the required commuting condition is verified. Then the stochastic convexity result is established to provide second-order optimality condition for this parametric optimization problem.

### 1. 서 론

본 논문에서는 M개의 일반적인 서비스 시간을 요하는 생산 단계 또는 서버가 일렬로 배열된 일괄 생산 형태의 생산 시스템으로서의 칸반 시스

템(Single Kanban System)에 대하여 다룬다. 칸반 시스템은 Just-in-time 생산 시스템에 있어서 재고 관리 시스템으로써 작업장 내에서의 재공품들이 중간 단계에서 멈추거나 적체되지 않고 원활한 흐름을 가지므로써 재고를 최소화 시킬뿐 아니라 생산률, 생산량, 그리고 생산시기등에 더

<sup>+</sup> 이 논문은 1991년도 교육부 지원 한국 학술 진흥재단의 자유공모(지방대학 육성)과제 학술연구 조성비에 의하여 연구 되었음.

\* 덕성 여자 대학교 경영학과 부교수

욱 효율적인 통제를 추구할 수 있는 정보시스템으로, 생산관리의 한 방법이다.

칸반(Kanban)은 일본말로써 카드를 의미하며 생산 시스템의 각 단계에서는 일정한 수의 칸반을 가지고 각 단계에서의 재공품의 수 및 작업물의 흐름을 통제한다. 단계  $i$ ,  $i=1, \dots, M$ ,에 배치된  $K_i$ ,  $i=1, \dots, M$ ,개의 칸반(conveyance Kanban)은 그 단계에서의 공정의 수행을 기다리는 작업물과 작업을 완료하였으나 다음 단계로의 진입이 봉쇄된 작업물에 부착되며 여분의 칸반은 전 단계  $i-1$ 로 부터 작업물의 진입을 기다린다. 즉 단계  $i$ 에 여분의 칸반이 존재하면 단계  $i-1$ 에서는 작업이 완료된 작업물은 존재하지 않는다는 의미이며 또한 단계  $i$ 에 작업이 완료된 작업물이 존재한다는 것은 단계  $i+1$ 에 여분의 칸반이 존재하지 않는다는 것을 의미한다. 그러므로 단계  $i-1$ 에서 작업이 완료된 작업물이 존재하고 단계  $i$ 에서 여분의 칸반이 존재할 때에는 단계  $i-1$ 의 작업이 완료된 작업물에 즉시 단계  $i$ 의 칸반이 부착되어, 주어진 작업물은 단계  $i$ 에서 작업의 수행을 기다리는 작업물이 되며 단계  $i-1$ 에서 부착되었던 칸반은 여분의 칸반이 되어 단계  $i-2$ 에서의 작업물의 진입을 기다리게 된다.

그러므로 작업물이 하나의 단계에서 다음 단계로 옮겨가는 동안 각 단계에 배치된 칸반은 항상 주어진 단계에 존재하며 하나의 작업물에 부착되어 공정의 수행을 기다리며 공정이 완료되어 주어진 작업물이 다음 단계의 칸반을 부여받아 다음 단계로 옮겨지면 다시 여분의 칸반이 되어 전 단계에서 작업이 완료되어 진입을 기다리는 작업물에 부착된다. 그러므로 주어진 단계에서의 칸반의 상태는 주어진 단계의 재고 상태를 나타내며 인접한 단계들과의 작업물의 이동을 조정하는 역할을 수행한다.

그러므로 주어진 칸반시스템에 있어서 하나의 단계에서의 작업물의 다음 단계로의 전이는 몇개

의 전 단계들에 있어서 칸반을 동시에 자유롭게 하여 몇 개의 작업물의 단계  $i$ 에서  $i+1$ 로서 진입은 하나의 칸반을 자유롭게 하고 이는 단계  $i-1$ 에서의 작업물의 단계  $i$ 에의 진입을 가능케하며 이는 단계  $i-2$ ,  $i-3$ 에서의 작업물의 이동을 가능케 함으로서 재공품 재고를 최소화시키고 모든 작업물들이 어느 중간 단계에서 멈추거나 봉쇄되지 않고 원활한 흐름을 갖는데 기여하게 된다.

## 2. 칸반 시스템과 봉쇄 현상

칸반 시스템의 수행도와 관련지어서 다음의 일반적인 제조 시스템에 대하여 살펴보기로 한다. 주어진 제조 시스템은  $M$ 단계로 구성되어 있으며 단계  $i$ ,  $i=1, \dots, M$ ,는 하나의 서버(server)와 서버를 포함하는  $K_i$ 개의 대기 능력의 작업물 저장소로 구성되어 있다. 그러므로 단계  $i$ 에서는 서버에서 공정을 수행중인 하나의 작업물을 포함하여  $K_i$ 개의 작업의 수행을 기다리는 작업물이 존재할 수가 있다. 단계 1에 투입되는 작업물 저장소의 대기 능력은 무한하며 항상 단계 1에 투입되어, 서버의 유희기간은 존재하지 않으며 단계  $M$ 에서 작업이 완료되는 작업물은 무한한 능력의 완제품 저장소에 의하여 결코 봉쇄되지 않는다.

이러한 제조 시스템의 봉쇄현상과 관련지어서 지금까지 고려되던 봉쇄 현상으로서 service 봉쇄와 transfer 봉쇄의 두가지 경우를 고려할 수 있다. service 봉쇄의 경우에는 단계  $i+1$ 의 작업물 저장소가 대기 능력에 다다르면 단계  $i$ 의 서버는 작업을 멈추며 transfer 봉쇄의 경우에는 단계  $i+1$ 가 대기능력에 도달하여도 단계  $i$ 의 서버는 작업을 계속하나 작업이 완료된 후에도 다음 단계가 작업물 저장소에 여유 공간이 없는 경우에만 완료된 작업물이 서버를 그대로 점유하여 서버는 작업을 멈추게 된다. 그러므로 서버가 작업

을 멈추는 경우에는 항상 하나의 작업이 완료된 작업물이 다음 단계로 진행하지 못하고 전 단계에 존재하게 된다. 그러므로 다음 단계의 작업물 저장소가 대기능력에 다다르면 서비스 봉쇄인 경우에는 그 시점에서, transfer 봉쇄의 경우에는 서버에서의 작업물이 작업을 완료하였으나 아직도 다음 단계의 대기 공간에 여유가 없는 경우에는 서버는 작업을 멈추게 된다. 그러므로 봉쇄현상이 일어난 경우에 봉쇄된 서버에서 존재 가능한 작업물의 작업상태에 의하여 서비스 봉쇄는 Block-and-Hold O, transfer 봉쇄에는 Block-and-Hold 1로 명명하기로 한다.

재래의 제조 시스템에서는 전술된 두 종류의 봉쇄현상을 통신봉쇄(communication blocking)와 제조 봉쇄(manufacturing blocking) 현상으로 기술하였다. 이에 반하여 단계  $i$ 에 하나의 서버를 포함하여 작업이 완료된 작업물이  $K_i$ 개 존재할 수 있는 작업물 저장소가 존재할 때를 고려할 수 있다. 즉 단계  $i$ 에 진입되는 작업물은 바로 작업이 수행되며 작업이 완료된 작업물은 단계  $i+1$ 에서 서버를 차지하기 전에 단계  $i$ 에  $K_i$ 까지 머무를 수 있다. 이러한 봉쇄 현상은 위에 반하여 Block-and-Hold K 봉쇄 현상으로 언급할 수 있다.

봉쇄 현상과 관련지어서 주어진 단계  $i$ 는 3개의 모수 즉 작업을 기다리는 작업물(작업중인 작업물을 포함)의 대기능력,  $a_i$ , 작업이 완료된 작업물 대기능력,  $b_i$ . 그리고 또 하나의 대기능력  $K_i$ 로 대별 특징지어질 수 있다. Block-and-Hold O의 경우에는  $a_i=K_i$ ,  $b_i=0$ , Block-and-Hold 1의 경우에는  $a_i=K_i$ ,  $b_i=1$ , 그리고 Block-and-Hold K의 경우에는  $a_i=1$ ,  $b_i=K_i$ 로 표시될 수 있다. 또한 단계  $i$ 에서 작업을 수행을 기다리는 작업물의 저장 능력이  $a_i$ , 작업이 완료된 작업물 저장능력이  $b_i$ 이며,  $b_i+a_{i+1}=K_{i+1}$ ,  $i=1, \dots, M-1$ , 인 경우를 Block-and-Hold b로 언급할 수 있다. 위의 경우에는  $a_i+b_i=K_{i+1}$ 인 이유는 서버에는 작업이 수행 중

인 작업물, 작업이 완료된 작업물이 모두 존재가능하기 때문이며 실제 대기 공간과 단계  $i$ 에 존재하는 총 작업물의 수는 모두  $K_i$ 이다.

그러므로 초기조건과 작업물의 서비스 시간이나 작업순서들이 모두 같은 경우에는 다음을 유도할 수 있다.

정리 1: 주어진  $K_i$ ,  $i=2, \dots, M$ 에 대하여  $a_1=\infty$ ,  $b_1=1$ ,  $a_i=K_i$ ,  $b_i=1$ ,  $i=2, \dots, M-1$ ,  $a_M=K_M$ ,  $b_M=\infty$ 인 Block-and-Hold 1 시스템과  $a_1=\infty$ ,  $b_1=K_2$ ,  $a_i=1$ ,  $b_i=K_{i+1}$ ,  $i=2, \dots, M-1$ ,  $a_M=1$ ,  $b_M=\infty$ 인 Block-and-Hold K 시스템, 그리고  $a_i=\infty$ ,  $b_i+a_{i+1}=K_{i+1}$ ,  $i=1, \dots, M-1$ ,  $b_M=\infty$ 인 Block-and-Hold b 시스템은 모두 동등하다.

증명: 단계  $i$ 에서 작업이 완료된 작업물은 단계  $i+1$ 에서 작업이 수행될 작업물로서 단계  $i$ 와 단계  $i+1$ 사이의 대기 능력은 주어진 모든 경우에  $K_i$ 로 동등하다.

고려되고 있는 칸반 시스템에 있어서의 봉쇄 현상은 다음과 같이 설명될 수 있다. 단계  $i$ 에서 작업의 수행을 기다리는 작업물의 수나 작업을 완료한 작업물의 수는 모두  $K_i$ 까지 존재 가능하다. 그러나 단계  $i$ 에 주어진 칸반의 수는  $K_i$ 로서 단계  $i$ 에 존재하는 작업물의 총수 즉 단계  $i$ 에서 작업을 요하는 작업물의 수와 작업을 완료한 작업물의 수의 합은  $K_i$ 로서  $a_i+b_i=K_i$ ,  $1 \leq a_i \leq K_i$ ,  $1 \leq b_i \leq K_i$ ,  $i=2, \dots, M-1$ 로 표시될 수 있다. 그러므로 재래의 봉쇄 현상의 관점에서 각 단계에서 작업이 수행되어야 할 작업물의 대기능력의 관점으로 보면 단계  $i$ 에서 작업을 요하는 작업물의 최대 대기능력은  $K_{i-1}+K_i$ 를 갖는다. 즉 단계  $i-1$ 에서 존재하는 모든 작업물이 작업을 마치고 단계  $i$ 에 존재 가능한  $K_i$ 개의 작업물이 모두 작업이

수행되어야 할 경우로서 이 경우의 단계  $i$ 의 대기 작업물의 총수는  $K_{i-1}+K_i$ 가 된다. 그러므로 칸반 시스템에 있어서 단계  $i$ 에서 작업을 요하는 작업물의 상태공간은 0부터  $K_{i-1}+K_i$ 까지 존재한다. 그러므로 대기 공간이  $K_{i-1}+K_i$ 로 확대되는 것은 아니나 인접한 단계와 상호 조정되어 각 단계의 저장능력은 변동가능하여 결과적으로 저장능력의 증대를 가져온다.

### 3. 수행도 측정을 위한 일반적 모형

고려되는 칸반 시스템은 주어진 시스템의 상태가 연속적으로 변화되지 않고 이산적으로 일어나는 도착과정이나 서비스 과정의 결합으로 변화되는 동적 시스템으로 이러한 이산적 사상의 동적 시스템 (DEDS : Discrete Event Dynamic System)에 적용가능한 이론이나 방법들은 주어진 칸반 시스템의 분석 및 설계에 효과적으로 적용될 수 있다.

이러한 방법들은 서비스 시간의 분포상의 제한 즉 일반적으로 요구되는 지수분포등의 가정을 요하지 않으며 시스템의 분석에 기본적으로 요구되는 안정 상태등의 제한을 극복하여 동적인 시스템에 직접 적용 가능하다.

주어진 시스템을 모형화하기 위하여  $n$ 을 작업물,  $i$ 를 생산단계 또는 서버를 나타낸다고 하고  $I_n^i$ 를 단계  $i$ 에서  $n$ 번째 작업물이 작업, 즉 서비스를 받기 시작하는 시점,  $C_n^i$ 를 단계  $i$ 에서  $n$ 번째 작업물이 작업을 완료하는 시점, 그리고  $T_n^i$ 를  $n$ 번째 작업물이 단계  $i$ 에서 단계  $i+1$ 로 전입되는 시점이라고 하자. 만약  $S_n^i$ 를 작업물  $n$ 의 단계  $i$ 에서의 공정 소요 시간이라고 한다면 다음의 관계가 성립될 수 있다.

정 리 2 : 언급된 봉쇄 현상들은 다음과 같은

반복적 관계(Yao & Cheng 1989, Mitra & Mitrani 1990)가 성립된다.

Block-Hold 0의 경우에는

$$\begin{aligned} I_n^i &= T_n^{i-1} \vee T_{n-1}^i \vee T_{n-ki+i}^{i+1} \\ C_n^i &= I_n^i + S_n^i \\ T_n^i &= C_n^i \end{aligned} \quad (2-1)$$

Block-Hold 1의 경우에는

$$\begin{aligned} I_n^i &= T_n^{i-1} \vee T_{n-1}^i \\ C_n^i &= I_n^i + S_n^i \\ T_n^i &= C_n^i \vee T_{n-ki+i}^{i+1} \end{aligned} \quad (2-2)$$

Block-Hold b의 경우에는

$$\begin{aligned} I_n^i &= C_{n-1}^i \vee T_{n-bi}^i \vee T_n^{i-1} \\ C_n^i &= I_n^i + S_n^i \\ T_n^i &= C_n^i \vee C_{n-ai+i}^{i+1} \vee T_{n-ki+i}^{i+1} \end{aligned} \quad (2-3)$$

Block-Hold K의 경우에는

$$\begin{aligned} I_n^i &= C_{n-1}^i \vee T_{n-ki}^i \vee T_n^{i-1} \\ C_n^i &= I_n^i + S_n^i \\ T_n^i &= C_n^i \vee C_{n-1}^{i+1} \vee T_{n-ki+i}^{i+1} \end{aligned} \quad (2-4)$$

그리고 Kanban 시스템의 경우에는

$$\begin{aligned} I_n^i &= C_{n-1}^i \vee T_{n-ki}^i \vee T_n^{i-1} \\ C_n^i &= I_n^i + S_n^i \\ T_n^i &= C_n^i \vee C_{n-ki+i}^{i+1} \vee T_{n-ki+i}^{i+1} \end{aligned} \quad (2-5)$$

로 표시될 수 있다. 여기에서  $X \vee Y$ 는  $\max [x, y]$ 를 표시한다.

증 명 : 설명을 약하기 위하여 Block-and-Hold 1의 경우를 예로 들어 설명하면  $n$ 번째 작업물이 단계  $i$ 에서 작업이 시작되기 위하여는  $n-1$ 번째 작업물이 단계  $i$ 에서 작업을 완료하고 단계  $i+1$ 로 전입되어야 하고  $n$ 번째 작업물은 단계  $i$ 로 전입되어야 한다. 단계  $i$ 에서  $n$ 번째 작업물이 작업을 시작하는 시점  $I_n^i$ 에 서비스 소요시간  $S_n^i$ 를 더한 시점이 작업이 완료되는 시점  $C_n^i$ 가 된다.

또한 작업이 완료되는 시점  $C_n^i$ 와 단계  $i+1$ 에 유효 대기 공간이 발생하는 시점  $T_{n-ki+i+1}$  중 그 값이 큰 시점이  $n$ 번째 작업물이 단계  $i$ 에서 단계  $i+1$ 로 진입되는 시점  $T_n^i$ 가 된다. 주어진 반복적인 관계는 모든  $n$ 과  $i$ 에 대하여 성립된다.

주어진 시스템의 수행도 측정치는 주어진  $N$ 개의 작업이 단계  $M$ 에서 작업을 완료하는 시간  $T_N^M$ 과 생산률  $N/T_N^M$ 으로 표시될 수 있다.

**정 리 3:** 서로 다른 봉쇄 현상을 갖는 기술된 시스템에서 칸반 시스템의 수행도가 제일 높고 Block-and-Hold 1, Block-and-Hold b, Block-and-Hold K는 동등하며 Block-and-Hold 0가 제일 낮다.

**증 명:** 먼저 Block-and-Hold 1과 Block-and-Hold 0의 두 경우를 비교하기 하기 위하여 주어진  $n$ 과  $i$ 에 대하여  $X=T_n^{i-1} \vee T_{n-1}^i$ ,  $Y=S_n^i$ , 그리고  $Z=T_{n-ki+i+1}$ 로 놓으면 주어진 반복적 관계식으로 부터

$$(X \vee Z) + Y = (X + Y) \vee (Z + Y) \geq (X + Y) \vee Z \quad (2.6)$$

가 성립되며 모든  $n$ 과  $i$ 에 대하여  $i+1$ 로의 진입 시점  $T_n^i$ 가 Block-and-Hold 1이 Block-and-Hold 0보다 빠르며 주어진 작업량  $N$ 의 단계  $M$ 에서 작업이 완료되는 시점  $T_N^M$ 이 짧고 생산률  $N/T_N^M$ 이 높다. 정리 1에 의하여 Block-and-Hold 1, Block-and-Hold b, 그리고 Block-and-Hold K의 수행도는 모두 동등하다. Block-and-Hold b와 칸반 시스템은 정리 3의 반복적 관계에 의하여 모든  $n$ 에 대하여  $T_{n-bi} \geq T_{n-ki}$ ,  $C_{n-ai+i+1} \geq C_{n-ki+i+1}$ 이며 다른 항은 모두 동일하여 주어진  $N$ 개의 작업물은 단계  $M$ 에서 완료하는 시점  $T_N^M$ 이 칸반 시스템이 짧고 생산률  $N/T_N^M$ 이 높다.

실제적으로 위의 증명은 모든  $i$ 와  $n$ 에 대한 induction에 의하여 칸반 시스템이 기존의 제조 시

스템보다 효율적임을 보인다.

주어진 반복적인 관계는 변이 상태(transition state)와 안정상태에서 칸반시스템의 수행도를 쉽게 추정가능할 뿐 아니라 서비스 소요시간의 분포상의 제약에 구애되지 않으며 또한 관심의 대상이 되는 모수들의 민감도 등을 적은 계산으로 제공할 수 있는 perturbation 분석(Ho 1987) 등을 쉽게 적용가능하여 SSCX(Strong Stochastic Convexity)를 만족시키는 조건하에서는 Robbins-Monro 알고리즘등의 기본적인 추계적 최적화 과정을 적용함으로써 시스템의 최적 설계등에 쉽게 연장 적용될 수 있다.

## 4. 2단계 칸반 시스템의 근사치 산정

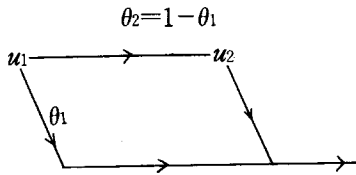
본장에서  $a_1 = \infty$ ,  $b_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2 = \infty$ 인 대기 능력과 일 반적인 분포를 갖는 두 단계의 서버로 구성된 칸반 시스템의 근사치 산정방법을 기술한다. 주어진 시스템에 있어서 서버 1은 항상 작업이 수행되고, 작업을 마치고 서버 1을 벗어나는 이탈과정은 서버 2에의 도착과정이 된다. 서버 2에 도착하는 작업물은  $b_1 + a_2$  개의 작업물이 대기 공간을 점유할 경우에는 서버 1은 작업의 수행을 멈추게 되어 결국 서버 2에 도착과정은 중단된다. 그러므로 주어진 시스템은 서버 1의 서비스 시간의 도착과정, 서버 2의 서비스 시간을 서비스 과정으로 하는  $G/G/1/b_1 + a_2$ 의 대기 시스템으로 모형화 될 수 있다.

이러한 일반적인 분포의 도착 및 복수의 서버에 의한 서비스 과정, 제한된 대기 공간의 대기 시스템은 도착과정과 서비스 과정을 Coxian 분포 화함으로써 근사화 될 수 있으며(Yao 1985), 이의 특수한 형태로써 주어진 칸반 시스템에 이의 연장이 가능하다.

두 단계로 구성된 Coxian 분포( $C_2$ )는 fig 1과

같이 설명될 수 있다. 주어진 과정의 서비스 시간은 단계 1과 단계 2로 구분되어서 단계 1에서 기대치  $1/\mu_1$ 인 서비스 시간을 마친후에 확률  $\theta_1$ 을 가지고 서비스 과정을 마치게 되며, 반면 확률  $\theta_2=1-\theta_1$ 를 가지고 서비스 과정은 기대치  $1/\mu_2$ 인 둘째 단계의 서비스 시간을 가진다. 단계 1과 단계 2에서의 소요시간은 모두 지수분포를 가진다.

fig 1



Coxian 분포는 일반적으로 주어진 분포의 squared coefficient of variance(SCV)가  $1/2$ 보다 큰 경우에 적용 가능하며 잘 알려진 분포로서의 지수 분포, Erlang 분포, 그리고 Hyperexponential 분포를 포함하여 표현되는 일반적인 분포이다. 일반적인 분포를 Coxian 분포로 치환시키는 방법은 경우에 따라서 다양하나 여기에서는 그 적용의 간편함에 비추어 marie(1980)가 제안한 방법을 적용하면 기대치가  $1/\mu$ , SCV가  $C_s^2$ 인 일반적인 분포는

$$\mu_1=2\mu, \theta_2=0.5/C_s^2, \mu_2=\mu\theta_2, \theta_1=1-\theta_2$$

인 두 단계 Coxian 분포로 치환된다.

그러므로 주어진 도착 과정과 서비스 과정이 각각  $(\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2 : \alpha_1+\alpha_2=1)$ 과  $(\mu_1, \mu_2, \theta_1, \theta_2 : \theta_1+\theta_2=1)$ 인 Coxian 분포를 갖는 G/G/1/ $b_1+a_2$ 인 대기 시스템은 두 단계의 Coxian 분포를 이용  $C_2/C_2/1/b_1+a_2$ 인 대기 시스템으로 모형화 될 수 있고  $C_2/C_2/1/b_1+a_2$ 인 시스템은 흐름 균형 방정식(flow balance equation)을 이용한 반복적 방법에 의하여 균형 대기 길이의 분포를 산정할 수 있다.

주어진 대기 시스템의 상태는 도착 과정과 서

비스 과정의 단계와 대기 공간에서 대기중인 작업물로서 특정 지어질 수 있으며  $P(n, m)$ ,  $Q(n, m)$ 을 도착과정이 단계 1(단계 2)이며 대기 공간에서 대기 중인 작업물의 수가  $n, n=0, 1, \dots, b_1+a_2$ , 이며 서비스 과정이 단계  $m, m=0, 1, 2$ , 일 경우일 때의 안정상태의 확률을 표시한다.  $m=0$ 인 경우에는 서버에 작업중인 작업물이 존재하지 않으므로  $n=0$  역시 성립된다.

정 리 4 :  $C_2/C_2/1/b_1+a_2$  시스템의 균형 분포  $(P(n, m), Q(n, m))$ 는 유일하게 존재하며 다음의 균형 방정식에 의한다.

$$n=0 : \lambda_1 P(0,0) = \theta_1 \mu_1 P(0,1) + \mu_2 P(0,2) \quad (3.1)$$

$$(\lambda_1 + \mu_1) P(0,1) = \alpha_1 \lambda_1 P(0,0) + \lambda_2 \theta(0,0) + \theta_1 \mu_1 P(1,1) + \mu_2 P(1,2) \quad (3.2)$$

$$(\lambda_1 + \mu_2) P(0,2) = \theta_2 \mu_1 P(0,1) \quad (3.3)$$

$$\lambda_2 Q(0,0) = \alpha_2 \lambda_1 P(0,0) + \theta_1 \mu_1 Q(0,1) + \mu_2 Q(0,2) \quad (3.4)$$

$n=1, \dots, b_1+a_2-1 :$

$$(\lambda_1 + \mu_1) P(n,1) = \alpha_1 \lambda_1 P(n-1,1) + \lambda_2 Q(n-1,1) + \theta_1 \mu_1 P(n+1,1) + \mu_2 P(n+1,2) \quad (3.5)$$

$$(\lambda_1 + \mu_2) P(n,2) = \alpha_1 \lambda_1 P(n-1,2) + \lambda_2 Q(n-1,2) + \theta_2 \mu_1 P(n,1) \quad (3.6)$$

$$(\lambda_2 + \mu_1) Q(n,1) = \alpha_2 \lambda_1 P(n,1) + \theta_1 \mu_1 Q(n+1,1) + \mu_2 Q(n+1,2) \quad (3.7)$$

$n=b_1+a_2 :$

$$(\alpha_2 \lambda_1 + \mu_1) P(b_1+a_2,1) = \alpha_1 \lambda_1 P(b_1+a_2-1,1) + \lambda_2 Q(b_1+a_2-1,1) + \lambda_2 Q(b_1+a_2,1) \quad (3.8)$$

$$(\alpha_2 \lambda_1 + \mu_2) P(b_1+a_2,2) = \alpha_1 \lambda_1 P(b_1+a_2-1,2) + \theta_2 \mu_1 P(b_1+a_2,1) + \lambda_2 Q(b_1+a_2-1,2) + \lambda_2 Q(b_1+a_2,2) \quad (3.9)$$

$$(\lambda_2 + \mu_1) Q(b_1+a_2,1) = \alpha_2 \lambda_1 P(b_1+a_2,1) \quad (3.10)$$

$n=0, \dots, b_1+a_2 :$

$$(\lambda_2 + \mu_2)Q(b_1+a_2, 2) = \alpha_2 \lambda_1 P(b_1+a_2, 2) + Q_2 \mu_1 Q(b_1+a_2, 1) \quad (3.11)$$

증명 : 고려되는 연속적 시간의 마코브 과정은 제한된 상태공간(S)에서 정의되므로 유일한 균형 분포가 존재한다(Keilson 1979). 그러므로 주어진 균형 방정식은 하나의 주어진 상태로부터의 확률의 흐름(probability flux)과 주어진 상태로의 확률의 흐름을 일치시킴으로써 얻어질 수 있다.

정리 5 : 정리 4에 주어진 일련의 선형 시스템은 아래와 같이 주어진 상태보다  $n$ 이나  $m$ 이 더 큰 확률들의 선형 결합으로 표시되는 동등한 일련의 선형 시스템으로 변형 가능하다.

$n=b_1+a_2 :$

$$Q(b_1+a_2, 1) = \alpha_2 \lambda_1 P(b_1+a_2, 1) / (\lambda_2 + \mu_1) \quad (3.12)$$

$$Q(b_1+a_2, 2) = [\alpha_2 \lambda_1 P(b_1+a_2, 2) + \theta_2 \mu_1 Q(b_1+a_2, 1)] / (\lambda_2 + \mu_2) \quad (3.13)$$

$n=b_1+a_2-1 :$

$$D(b_1+a_2-1, 1) = (\alpha_2 \lambda_1 + \mu_1) P(b_1+a_2, 1) - \lambda_2 Q(b_1+a_2, 1) \quad (3.14)$$

$$E(b_1+a_2-1, 1) = \theta_1 \mu_1 Q(b_1+a_2, 1) + \mu_2 Q(b_1+a_2, 2) \quad (3.15)$$

$$Q(b_1+a_2-1, 1) = [\alpha_2 D(b_1+a_2-1, 1) + \alpha_1 E(b_1+a_2-1, 1)] / (\lambda_2 + \alpha_1 \mu_1) \quad (3.16)$$

$$P(b_1+a_2-1, 1) = [D(b_1+a_2-1, 1) - \lambda_2 Q(b_1+a_2-1, 1)] / \alpha_1 \lambda_1 \quad (3.17)$$

$$D(b_1+a_2-1, 2) = (\alpha_2 \lambda_1 + \mu_2) P(b_1+a_2, 2) - \theta_2 \mu_1 P(b_1+a_2, 1) - \lambda_2 Q(b_1+a_2, 2) \quad (3.18)$$

$$E(b_1+a_2-1, 2) = \theta_2 \mu_1 Q(b_1+a_2-1, 1) \quad (3.19)$$

$$Q(b_1+a_2-1, 2) = [\alpha_2 D(b_1+a_2-1, 2) +$$

$$\alpha_1 E(b_1+a_2-1, 2)] / (\lambda_2 + \alpha_1 \mu_2) \quad (3.20)$$

$$P(b_1+a_2-1, 2) = [D(b_1+a_2-1, 2) - \lambda_2 Q(b_1+a_2-1, 2)] / \alpha_1 \lambda_1 \quad (3.21)$$

$n=0, \dots, b_1+a_2-2 :$

$$D(n, 1) = (\lambda_1 + \mu_1) P(n+1, 1) - \theta_1 \mu_1 P(n+2, 1) - \mu_2 P(n+2, 2) \quad (3.22)$$

$$E(n, 1) = \theta_1 \mu_1 Q(n+1, 1) + \mu_2 Q(n+1, 2) \quad (3.23)$$

$$Q(n, 1) = [\alpha_2 D(n, 1) + \alpha_1 E(n, 1)] / (\lambda_2 + \alpha_1 \mu_1) \quad (3.24)$$

$$P(n, 1) = [D(n, 1) + \lambda_2 Q(n, 1)] / \alpha_1 \lambda_1 \quad (3.25)$$

$$D(n, 2) = (\lambda_1 + \mu_2) P(n+1, 2) - \theta_2 \mu_1 P(n+1, 1) \quad (3.26)$$

$$E(n, 2) = \theta_2 \mu_1 (n, 1) \quad (3.27)$$

$$Q(n, 2) = (\alpha_2 D(n, 2) + \alpha_1 E(n, 2)) / (\lambda_2 + \alpha_1 \mu_2) \quad (3.28)$$

$$P(n, 2) = [D(n, 2) - \lambda_2 Q(n, 2)] / \alpha_1 \lambda_1 \quad (3.29)$$

$n=0 :$

$$D(0, 0) = (\lambda_1 + \mu_1) P(0, 1) - \theta_1 \mu_1 P(1, 1) - \mu_2 P(1, 2) \quad (3.30)$$

$$E(0, 0) = \theta_1 \mu_1 Q(0, 1) + \mu_2 Q(0, 2) \quad (3.31)$$

$$Q(0, 0) = [\alpha_2 D(0, 0) + \alpha_1 E(0, 0)] / \lambda_2 \quad (3.32)$$

$$P(0, 0) = [D(0, 0) - \lambda_2 Q(0, 0)] / \alpha_1 \lambda_1 \quad (3.33)$$

증명 : 정리 4의 균형 방정식으로 부터 간단한 대수적 조작에 의하여 유도될 수 있다.

그러므로 정의되는 모든 상태 확률은 정리 5에 의하여  $P(b_1+a_2, 1)$ 과  $P(b_1+a_2, 2)$ 를 이용하여 반복적으로 표현될 수 있다. 그러나 반복적인 계산 과정중에서 정리 4에 주어진 균형방정식 중 식(3.1)과 식(3.3)은 사용되지 않으며 이를 정상화 조건(normalization condition)과 하나의 선형 방정식으로 대체시킬 수 있다.

그러므로 정의되는 모든 상태 확률,  $P(\mathbf{s}) (\mathbf{s} \in S)$ ,은 다음에 설명되는 알고리즘으로 구해질 수 있다. 먼저  $P(b_1+a_2, 1)=1$ ,  $P(b_1+a_2, 2)=0$ 으

로 놓고 상태 공간내에 정의되는 모든  $P(\underline{a}), Q(\underline{a}), \underline{a} \in S$ 의 값을 구하여 그 값을  $P_1(\underline{a}), Q_1(\underline{a}), \underline{a} \in S$ 라 하고 그 합  $T_1$ 을 구한다. 다음에는  $P(b_1+a_{2,1})=0, P(b_1+a_{2,2})=1$ 로 놓고  $P_2(\underline{a}), Q_2(\underline{a}), \underline{a} \in S$ 와 그 합  $T_2$ 를 구한다. 주어진  $P_1(\underline{a}), Q_1(\underline{a}), P_2(\underline{a}), Q_2(\underline{a}), \underline{a} \in S$ 와  $T_1, T_2$ 를 이용하여 다음의 두개의 연립 방정식의 해를 구한다.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 T_i P(b_1+a_{2,i}) &= 1 \\ \sum_{i=1}^2 [(\lambda_1+\mu_2)P_i(0,2) - \theta_1 \mu_i P_i(0,1)] P(b_1+a_{2,i}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

### 5. 칸반 시스템의 최적화

본 장에서는 주어진 n개의 작업물을 단계 M까지 완료하는데 소요되는 시간의 기대치 (makespan)  $E[T_n^M]$  또는 이의 함수로서 표시되는 비용함수의 기대치  $E[g(T_n^M)](E[g])$ 를 최소화 시키는 최적화 문제에 대하여 논의 하기로 한다. Makespan,  $T_n^M$ ,은 주어진 칸반 시스템의 설계와 관련되는 모수,  $\theta = (\theta_i)_{i=1}^m$ 의 함수로서  $\theta$ 는 결정되어야 할 변수라고 하면 이러한 모수들은 각 단계에서 소요되는 공정소요 시간 및 그의 분산들과 관련 지을 수 있으며 단계  $i, i=1, \dots, M$ ,에서의 공정소요시간,  $S^i(\theta)$ 는 모수  $\theta$ 를 갖는 분포에 의하여  $S^i(\theta) = f^i(\theta, \xi_i)$ 로서 표현될 수 있으며  $\theta$ 의 함수로서 확률적 요소 즉 확률변수  $\xi_i$ 를 포함한다.

이러한 공정소요시간은  $S^i(\theta) = \xi_i + \varphi^i(\theta)$  또는  $S^i(\theta) = \xi_i \cdot \varphi^i(\theta)$ 의 형태로 표시되는 경우를 들 수 있으며  $\theta(\theta)$ 는  $\theta$ 에 대한 확정적 함수이다.

이러한 최적화 문제의 해  $\theta^*$ 는 Robbins-Monro

알고리즘으로 불리우는 다음의 추계적 최적화 과정(Glynn 1986, Kushner & Clark 1978)에 의하여 모수를 반복적으로 개선하므로써 구하여 질 수 있다. 즉 이는

$$\theta^{r+1} = \theta^r - \alpha^r \partial / \partial \theta_i / \alpha \theta_i E[g(T_n^M(\theta))] \quad (5.1)$$

로서  $r, r=1, 2, 3, 4, \dots$ ,은 r번째 단계에서의 개선된 해의 절차를 의미하며  $\partial / \partial \theta_i E[g]$ 는 모수  $\theta$ 에 대한 기대 비용의 편도함수, 그리고  $\alpha^r$ 은 주어진 r번째 단계에서의 스텝크기를 나타낸다.

언급된 알고리즘을 적용하여 최적해  $\theta^*$ 를 구하기 위하여는 다음의 두가지 문제가 고려되어야 한다.

i)  $E[g]$ 의 Convexity

ii) 편도함수  $\partial / \partial \theta_i E[g]$ 의 산정방법

그러면 주어진 Convexity에 의하여 만약  $\theta^r < \theta^*$  이면  $\partial / \partial \theta_i E[g] < 0$ 에 의하여  $\theta^{r+1} > \theta^r$ 이며  $\theta^r > \theta^*$  이면  $\partial / \partial \theta_i E[g] > 0$ 에 의하여  $\theta^{r+1} < \theta^r$ 이 된다. 그러므로 주어진 절차에 의하여  $\theta$ 는  $\theta^*$ 에 수렴하게 된다.

### 6. 기대비용, $E[g]$ ,의 Convexity

만약 단계  $i$ 에서의 공정 소요시간  $S^i(\theta), i=1, \dots, M$ ,는 모수  $\theta$ 에 대한 확률변수로서 모든  $\theta^1, \theta^2$ 와  $\alpha \in [0, 1]$ 에 대하여 공통의 확률 공간내에서  $\hat{S}^i(\theta^1) \leq S^i(\theta^1), \hat{S}^i(\theta^2) \leq S^i(\theta^2)$  그리고  $\hat{S}^i(\alpha \theta^1 + (1-\alpha) \theta^2) \leq S^i(\alpha \theta^1 + (1-\alpha) \theta^2)$ 와  $\hat{S}^i(\alpha \theta^1 + (1-\alpha) \theta^2) \leq \alpha \hat{S}^i(\theta^1) + (1-\alpha) \hat{S}^i(\theta^2)$ 가 성립되면  $S^i(\theta)$ 는 Strong Stochastic Convexity(SSCX)를 만족시킨다고 한다. (M.Shaked & J.G. Shanthikumar 1988). 또한  $\theta^1 < \theta^2$  이고  $\hat{S}^i(\theta^1), \hat{S}^i(\alpha \theta^1 + (1-\alpha) \theta^2) < \hat{S}^i(\theta^2)$ 를 만족시키면  $S^i(\theta)$ 는 Strong Stochastic Increasing Convexity



(SSICX)를 만족시킨다고 한다. 여기에서 증가는 비감소를 의미한다.

SSCX를 만족시키는 공정 소요 시간  $S^i(\theta)$ 의 확률 변수로는 다음과 같은 것을 들 수 있다.  $S^i(\theta) = f^i(\theta, \zeta_i)$ 에 있어서는  $\zeta_i$ 는 확률적 요소이며 함수  $f$ 가  $\theta$ 에 대하여 Convex 이면  $S^i(\theta)$ 는 SSCX임을 의미한다. 이러한 공정 소요 시간은

i)  $S^i(\theta) = \zeta_i + \varphi_i(\theta)$ 로서  $\varphi_i(\theta)$ 가  $\theta$ 에 대하여 Convex(증가하는 Convex)이면  $S^i(\theta)$ 는 SSCX(SSICX)이며

ii)  $S^i(\theta) = \zeta_i \cdot \varphi^i(\theta)$ 에서  $\varphi^i(\theta)$ 는 Convex(증가하는 Convex)이고  $\zeta_i > 0$ 이면  $S^i(\theta)$ 는 SSCX(SSICX)를 만족시킨다.

SSCX는 여러가지 특성을 만족시킨다. 첫째는 확률 변수  $X(\theta)$ 가  $\theta$ 에 대하여 SSCX를 만족시키면 어떠한 비감소 Convex 함수  $f(\cdot)$ 에 대하여  $Ef(X(\theta))$ 는  $\theta$ 에 대하여 Convex이다. 둘째,  $m$ 개의 독립적인 일련의 확률 변수  $X_i(\theta)$ ,  $i=1, \dots, m$ 에 대하여  $\underline{\theta} = (\theta_i)_{i=1}^m$ 이라 하면

i) 확률  $P_i$ ,  $i=1, \dots, m$ , 에 대하여  $X(\underline{\theta}) = X_i(\theta_i)$ , 즉  $\sum_{i=1}^m P_i = 1$ .

ii)  $X(\underline{\theta}) = \sum_{i=1}^N X_i(\theta_i)$ , 여기에서  $N$ 은 확률변수로서  $X_i$ 와 독립적이고 정수  $1, \dots, m$ 을 Support로 갖는다.

iii)  $X(\underline{\theta}) = f(X_1(\theta_1), \dots, X_m(\theta_m))$ 여기에서  $f$ 는 증가하는 Convex 함수이다. 로 정의되는  $X(\underline{\theta})$ 에 대하여  $X_i(\theta_i)$ ,  $i=1, \dots, m$ , 이 SSCX(SSICX)를 만족시키면  $X(\underline{\theta})$ 도 SSCX(SSICX)를 만족시킨다.

정 리 6: 모든  $i$ 에 대하여 단계  $i, i=1, \dots, M$ , 에서의 공정소요시간이 모수  $\theta$ 에 대하여 SSCX를 만족시키면, 즉 단계  $i$ 에서의 공정소요 시간  $S^i(\theta) = f^i(\theta, \zeta_i)$ 로 표시되고  $\zeta_i$ 는  $\theta$ 에 독립적인 확률적 요소이며  $f^i(\theta, \cdot)$ 는  $\theta$ 에 대하여

Convex라 하면  $I_n^i$ ,  $C_n^i$ , 그리고  $T_n^i$ 는 모든  $i=1, \dots, M$ ,  $n=1, \dots, N$ 에 대하여 SSCX를 만족시킨다.

증 명: 위의 특성 ii)와 iii)에 의하여 SSCX를 만족시키는 일련의 확률 변수들의 합과 최대값의 함수로 표시되는 새로운 확률 변수 또한 SSCX를 만족시키므로 induction에 의하여 SSCX는  $I_n^i$ ,  $C_n^i$ , 그리고  $T_n^i$ 에서도 보존된다.

또한  $X(\theta)$ 가  $\theta$ 에 대하여 SSCX를 만족시키면 모든 증가하는 Convex 함수  $g(\cdot)$ 에 대하여  $E[g(X(\theta))]$ 는  $\theta$ 에 대하여 Convexity를 만족시킨다.

정 리 7: 주어진  $N$ 개의 작업물이 단계  $M$ 에서 공정을 완료하는 시점, 즉 makespan  $T_n^M$ 에 대하여 발생하는 비용의 함수  $g(T_n^M(\underline{\theta}))$ 이  $T_n^M$ 에 대하여 증가하는 Convex 함수이면  $E[g(T_n^M)]$ 은  $\underline{\theta}$ 에 대하여 Convex 함수이다.

증 명:  $T_n^M$ 의 SSCX는 정리 6에 의하여  $E[g(T_n^M(\underline{\theta}))]$ 의 Convexity는 자명하다.

## 7. 편도함수 산정

주어진 절차에 있어서 요구되는 추계적 도함수 산정을 위한 재래의 DEES에 있어서의 도함수 산정은  $\theta$ 와  $\theta + \Delta\theta$ 에 대한 서로 다른 두개의 시물레이션에 의한 수행도의 차를  $\Delta\theta$ 와 나누므로써 추정하였다. 본절에서는 앞에 적용된 DEES의 반복적 관계를 이용하여 하나의 Sample path 또는 시물레이션에 의하여 주어진 시스템의 모수에 대한 수행도의 도함수를 얻을 수 있는 방법으로 근본적으로 Perturbation analysis (PA) (Ho 1987)의 개념에 의한다.

PA에 의한 시스템 수행도의 모수에 대한 도함수가 불편 추정량이 되기 위하여는, 즉

$$E[\partial/\partial\theta_{ig}] = \partial/\partial\theta_i E[g], \quad i=1, \dots, M, \quad (7.1)$$

이 성립되기 위해서는 주어진 칸반 시스템에 있어서 위의 교환조건(Commuting condition) (Glasserman 1991)을 만족시켜야 한다.

**정 리 8 :** 주어진 칸반 시스템에 있어서  $E[\partial/\partial\theta_i \cdot g] = \partial/\partial\theta_i E[g]$ 는 성립된다.

증 명 : 만약 주어진 칸반 시스템의 특정한 상태를 S라 하고  $\alpha, \beta$ 를 상태 S에서 발생 가능한 사상(event)이라 하고  $\Phi_\alpha S, \Phi_\beta S$ 를 상태 S로 부터 사상  $\alpha$  또는  $\beta$ 가 일어나므로써 전이 되는 상태라고 하면 주어진 칸반 시스템에 있어서 특정한 사상에 의한 상태의 전이는 일정하므로  $\Phi_\alpha \Phi_\beta S = \Phi_\beta \Phi_\alpha S$ 를 성립시키면 된다(Glasserman 1991). 그러므로 시스템의 상태 S를

$$S = \{ \dots (a_{i-1}, b_{i-1}, B_{i-1}), (a_i, b_i, B_i), (a_{i+1}, b_{i+1}, B_{i+1}), \dots \} \quad (7.2)$$

로 일반화시키면 여기에서  $a_i$ ( $\underline{a}_i$ )는 단계 i에서 작업을 기다리는 작업물의 수,  $b_i$ ( $\underline{b}_i$ )는 작업이 완료되어 단계 i+1로의 진입을 기다리는 작업물의 수, 그리고  $B_i$ 는 단계 i가 단계 i+1에 의하여 봉쇄되어 서버가 작업을 멈춘 경우에는 1, 그렇지 않는 경우에는 0을 갖는다.

일반적인 봉쇄 현상이 없는 상태에서

$$S = [\dots, (a_{i-1}, 0, 0), (a_i, 0, 0), (a_{i+1}, 0, 0) \dots] \quad (7.3)$$

일때  $\beta$ 를 단계 i에서의 서비스가 완료되는 사상을 나타낸다고 하면

$$\Phi_\beta S = \{ \dots, (a_{i-1}, 0, 0), (a_i - 1, 0, 0), (a_{i+1} + 1, 0, 0) \dots \} \quad (7.4)$$

$$\Phi_{\beta^{-1}} S = \{ \dots, (a_{i-1} - 1, 0, 0), (a_i + 1, 0, 0), (a_{i+1}, 0, 0) \dots \} \quad (7-5)$$

그리고

$$\Phi_\beta \Phi_{\beta^{-1}} S = \Phi_{\beta^{-1}} \Phi_\beta S = \{ \dots, (a_{i-1} - 1, 0, 0), (a_i, 0, 0), (a_{i+1} + 1, 0, 0) \dots \} \quad (7.6)$$

이므로 위의 교환 조건을 만족시킨다.

봉쇄현상이 일어나는 특수한 경우로서

$$S = \{ \dots (a_{i-2}, 0, 0), (a_{i-1}, b_{i-1}, 0), (0, b_i, 1), (a_{i+1}, 0, 0), (a_{i+2}, 0, 0) \dots \} \quad (7.7)$$

라 하고  $a_{i-1} + b_{i-1} = K_{i-1}$ 이며 단계 i-1의 서버는 작업을 수행중이며,  $b_i = K_i$ 로서 단계 i의 서버는 봉쇄되어 작업을 수행치 않고 있으며  $a_{i+1} = K_{i+1}$ 인 경우를 보면

$$\Phi_{\beta^{-1}} S = \{ \dots, (a_{i-2}, 0, 0), (a_{i-1} - 1, b_{i-1} + 1, 0), (0, b_i, 1), (a_{i+1}, 0, 0), (a_{i+2}, 0, 0) \dots \} \quad (7.8)$$

$$\Phi_{\beta^{-1}} S = \{ \dots, (a_{i-2}, 0, 0), (a_{i-1}, b_{i-1} - 1, 0), (1, b_i - 1, 0), (a_{i+1}, 0, 0), (a_{i+2} + 1, 0, 0) \dots \} \quad (7.9)$$

그리고

$$\begin{aligned} \Phi_{\beta^{-1}} \Phi_{\beta^{-1}} S &= \Phi_{\beta^{-1}} \Phi_{\beta^{-1}} S \\ &= \{ \dots, (a_{i-2}, 0, 0), (a_{i-1} - 1, b_{i-1}, 0), (1, b_i - 1, 0), (a_{i+1}, 0, 0), (a_{i+2} + 1, 0, 0) \dots \} \end{aligned} \quad (7.10)$$

로서 위의 교환 조건을 만족시킨다. 다른 경우도

같은 방법으로 증명될 수 있다.

다음으로 고려하여야 할 문제는 주어진 칸반 시스템의 수행도의 편도함수,  $\partial/\partial\theta g$ 를 구하는 방법이며 이를 위하여는 다음의 추계적 도함수의 개념을 필요로 한다. 모수  $\theta$ 에 의하여 발생하는 공정 소요시간 $\{S(\theta)\}$ 가  $F(\cdot, \theta)$ 의 분포를 갖는다고 하면 monte Carlo 시뮬레이션에 있어서  $S(\theta)$ 는  $[0,1]$ 에서 정의되는 일양분포를 갖는 하나의 확률변수  $U$ 에 의하여 발생되며

$$S(u, \theta) \stackrel{d}{=} F^{-1}(u, \theta) \stackrel{d}{=} \inf\{S; F(S, \theta) \geq u\} \quad (7.11)$$

를 만족시킨다.

그러므로 같은  $u$ 에 의한  $S(\theta+h) \stackrel{d}{=} F^{-1}(F(S(u, \theta), \theta), \theta+h)$ 로 주어진다. 그러므로  $S(\theta)$ 의 추계적 도함수  $\partial/\partial\theta S(u, \theta)$ 는 만약  $F^{-1}(u, \theta)$ 가 미분가능하면  $\partial/\partial\theta S(u, \theta) = \partial/\partial\theta F^{-1}(u, \theta)$ 가 되며 이는 평균치 정리에 의하여  $-\partial F(S(\theta), \theta) / \partial S F(S(\theta), \theta)$ 로 표시될 수 있다. 그러므로 시뮬레이션에 있어서  $S(\theta)$ 가 발생되면 이의 도함수는 주어진 식에 의하여 구하여 질 수 있다.

단계  $i$ 에서의  $n$ 번째 작업물의 도함수,  $\partial/\partial\theta S_n^i(u, \theta)$ 는 특정한 시점, 즉  $I_n^i, C_n^i$ , 그리고  $T_n^i$ 에서의 모수  $\theta$ 에 대한 편도함수로 연장될 수 있고 이를 위한 일반적인 전가 법칙(propagation rule) (Cao & Ho 1987)은 다음과 같이 기술될 수 있다.

i) 단계  $i$ 에서의 유희기간후에 단계  $i-1$ 에서 작업물이 도착하면 단계  $i$ 는 단계  $i-1$ 의 도함수와 같은 도함수를 갖는다.

ii) 단계  $i$ 가 단계  $j(i < j)$ 에 의하여 봉쇄되면 봉쇄기간이 끝나는 시점에서 단계  $i$ 는 단계  $j$ 와 같은 도함수를 갖는다.

iii) 만약 주어진 단계  $i$ 에서 작업을 마치는 경우 봉쇄나 유희기간이 도래하지 않는 경우에는

주어진 작업물의 도함수는 다음 작업물에 전가된다.

그러므로 주어진  $n$ 개의 작업물이 단계  $M$ 까지의 작업물 완료하는 makespan의 모수  $\theta$ 에 대한 편도함수,  $\partial/\partial\theta T_n^M$ 은 식(2.5)를 이용하여 반복적으로 유도될 수 있다.

예를 들면

$$\partial/\partial\theta C_n^i = \partial/\partial\theta I_n^i + \partial/\partial\theta S_n^i \quad (7.12)$$

가 성립된다. 그러므로 한번의 시뮬레이션으로부터  $E[T_n^M]$ 과  $E[\partial/\partial\theta T_n^M]$ ,  $i=1, \dots, M$ 을 모두 동시에 산정할 수 있다.

## 8. 결 론

본 논문에서는  $M$ 개의 일반적인 서비스 시간을 갖는 생산단계 또는 서버가 일렬로 배열된 생산 시스템으로서의 칸반 시스템에 있어서 수행도 측정을 위한 분석적 방법들을 다루었다. 고려되는 칸반 시스템의 봉쇄 현상은 3개의 모수, 단계  $i$ 에서 작업을 기다리는 작업물의 대기능력, 작업이 완료된 작업물의 대기 능력, 그리고 총 작업물의 대기능력으로 대별되어, 이산적 사상의 동적 시스템에 적용 가능한 반복적 관계로 모형화되었다. 이러한 반복적 관계는 칸반시스템의 봉쇄현상이 재래의 제조시스템에 있어서의 봉쇄현상 즉 Block-and-Hold-0, Block-and-Hold-1, 그리고 Block-and-Hold-b 그리고 Block-and-Hold-K보다 효율적임을 보인다.

특히 두 단계의 서버로 구성된 칸반 시스템은  $G/G/1/b_1+a_2$ 의 대기 시스템으로 모형화 되어 도착과정과 서비스과정을 Coxian분포화 함으로써 근사치 산정이 가능한 분석적 모형이 제시되었다.

주어진 칸반 시스템의 최적화는 기본적인 추계

적 최적화과정인 Robbins-Monro 알고리즘에 의하여 주어진 조건하에서 수행도가 모수에 대한 Convexity를 만족시킴을 보였다. 요구되는 수행도의 도함수는 한번의 표본 경로에 의하여 산정될 수 있는 Rerturbation Analysis에 의하여 이의 적용에 요구되는 교환조건이 만족됨을 증명하였다.

주어진 방법은 시스템의 수행도 뿐만이 아니라 모든 모수에 대한 수행도의 민감도를 한번의 시뮬레이션으로 산정 가능하며 이는 안정 상태에서 뿐만이 아니고 변이 상태에서도 적용 가능하다. 또한 지수분포등의 특정한 분포의 가정을 요하지 않으므로써 지금까지 적용되던 방법들에 비하여 많은 장점들을 수반한다.

### 參 考 文 獻

- Bitran, G.R and L. Chang, "A Mathematical Programming Approach to a Deterministic Kanban System" *Magt. Sci.*, 33(1987).
- Cao, X.R. and Y.C. Ho, "Sensitivity Analysis and Optimization of Throughput in a Production Line with Blocking," *IEEE Trans. Auto. Control*, 32(1987).
- Deleersnyder, J.L., T.J. Hodgson, H. Muller and PIJ O'Grady, "Kanban controlled Pull Systems : An Analytic Approach," *Magt. Sci.*, 35(1989).
- Glasserman, P., *Gradient Estimation Via Perturbation Analysis*, Kluwer Academic Publishers, 1991.
- Glynn, P.W., "A GSMP Formalism for Discrete Event Systems," *Proc. IEEE*, 77(1987)
- Glynn, P.W., "Optimization of Sochastic Systems," *Proc. 1986 Winter Simu. confer.*(1986).
- Ho.Y.C., "Performance Evaluation and Pertubation Analysis of Discrete Event Dynamical Systems," *IEEE Trans, Auto. Control*, 32(1987).
- Keilson, J., *Markov Chain Models : Rarity and Exponentiality*, Springer-Verlag, New York, 1979.
- Kushner, H.J. and D.Clark, *Stochastic Approximation Methods for Constrained and Unconstrained Systems*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- Marie, R.A., "Calculating Equilibrium Probabilities for  $\lambda(n)/C_k/1/N$  queue," *Proc. Performance* (1980).
- Mitra, D. and I. Mitrani, "Analysis of Kanban Discipline for Cell Coordination in Production Lines. I," *Magt. Sci.*, 36(1990).
- Shaked, M. and J.G. Shanthikumar, "Stochastic Convexity and its Applications," *Adv. Appl. Prob.*, 20(1988).
- Suresh, S. and W. Whitt, "Arranging queues in Series : A Simulation Experiment," *Magt.Sci.*, 36 (1990).
- Yao, D.D. and D.W. Cheng, "New Wave Manufacturing System Modeling," *Research Report*, Columbia University, New York, 1989.

Yao, D.D. and J.A. Buzacott, "Queueing Models for a Flexible Machining Station, II : The Method of Coxian Phases," *Eur. J. Oper. Res.*, 19(1985).

Zipkin, P., "A Kanban-Like Production Control System : Analysis of Simple Models," Research Paper, Columbia University, 1989.