

〈論 文〉

디지털재설계법에 의한 크레인계의 제어

이동철* · 신민생** · 하주식*** · 김상봉**

(1991년 7월 29일 접수)

Control of Crane Systems by a Digital Redesign Method

D.C.Lee, M.S.Shin, J.S.Ha and S.B.Kim

Key Words: Bilinear Transformation(쌍선형변환), Optimal Regulator Design(최적레귤레이터설계), Digital Redesign(디지털 재설계), Mobile Crane(수평이동 크레인)

Abstract

An algorithm of transforming continuous-time state feedback gains into equivalent discrete-time feedback gains or vice versa is proposed using bilinear transformation. The proposed method is evaluated experimentally by an application control of a mobile crane system which is implemented by 16bits micro computer with A/D and D/A converters. It has been shown from the experimental result that the transformed feedback gains are virtually identical to the optimal discrete gain over range of significant sampling time. Since the transformed matrix is composed by a distinct relationship between continuous-time gain and discrete-time gain, it is noted that the proposed method can be regarded as an explicit gain transformation method compared to the other methods using series expansion.

1. 서 론

실제 제어시스템은 대부분 연속적인 데이터시스템이다. 마이크로 프로세서와 디지털 컴퓨터분야의 기술적인 발전에 따라서, 연속적인 시스템은 디지털변환기와 디지털컨트롤러에 의해 제어되어지게 되었다. 이산계의 제어이론을 사용하여 새로운 설계를 수행하는 것보다 오히려 연속적인 데이터시스템에 등가한 디지털시스템을 얻는 디지털 재설계기술의 적용이 가능하게 되었다.

그러나, 이와같은 디지털 재설계문제에 있어, 변형된 이산시스템의 입력행렬이 정칙이어야 한다는 가 상태변수의 수가 입력변수의 수와 같아야 된다

는 등의 제약이 있다⁽²⁾. 실제적으로 디지털컨트롤러로 연속적인 데이터계를 실현시키기 위하여, 연속데이터 신호 공간에서 설계된 보상기와 관측기의 매개변수들은 어떤 적절한 근사방법을 사용하여 대응하는 이산시간계의 파라미터로 변환되어진다. 물론 이 문제를 해결하는 가장 좋은 방법은 샘플링시간을 짧게하여 연속시간 컨트롤러를 적당하게 이산근사화 시키는 것일 것이다.

디지털 재설계문제의 접근법으로서 Taylor의 급수 전개형식의 표현법⁽¹⁾, 상태변수 매칭^(3,4,5), 개인 평균치법⁽⁶⁾등의 연구가 잘 알려져 있다. Hitz와 Anderson⁽¹⁰⁾은 전달함수 행렬의 상태공간 실현에 쌍선형변환을 이용하여 무한시간구간에 걸쳐 연속시간 2차형식 최소화 문제는 이산-시간 문제로 될 수 있다는 것을 보였다. 위의 문제에 대한 반대의 접근은 Bar-Ness와 Halbersberg⁽¹¹⁾에 의하여 유도되었다. Kondo와 Furuta⁽⁸⁾는 연속형 대수 리카치

*부산공업대학 전기공학과

**정회원, 부산수산대학교 공과대학 기계공학과

***한국해양대학 제어계측공학과

방정식을 이산형 대수 리카치방정식으로 변환하는데 쌍선형변환을 이용했으며, 그 물리적 의미를 명확히 했다. Barnett⁽¹⁷⁾는 연속적인 전달함수를 등가한 이산적인 전달 함수로 변환시키는 알고리즘에 $s = \frac{z+1}{z-1}$ 의 형과 같은 쌍선형변환을 이용했다. Geoutage⁽¹²⁾등은 $s = \frac{Tz-1}{2z+1}$ 형태를 사용하여 Barnett⁽¹⁷⁾와 유사한 알고리즘을 표현했다. 지금까지 쌍선형변환법을 이용해서 이산계의 피이드백 이득관계를 명확히 하면서 디지털 재설계 문제를 다룬 연구는 없다. 본 논문에서는 쌍선형 함수를 이용하여 연속시스템의 상태공간에서 설계된 페루우프계로부터 이산시스템의 피이드백 게인행렬을 얻을 수 있는 디지털재설계법이 제안 되었고, 크레인의 실시간 제어를 통해 본 연구에서 제안된 디지털 재설계법의 유효성을 확인했다.

2. 디지털 재설계 문제

다음과 같은 선형시불변 시스템을 생각한다.

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1b)$$

여기서 $x \in R^n$ 은 상태벡터, $u \in R^m$ 은 제어벡터 그리고 $y \in R^p$ 는 출력벡터이다.

시스템 (1)의 제어법칙 :

$$u(t) = Fx(t) \quad (2)$$

는 주어진 임의의 설계사양을 만족시키도록 구해졌다고 하자.

이때, 시스템 식(1)의 페루프시스템은

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A + BF)x(t) \quad (3)$$

와 같이 되고, 각 샘플링순간에는 다음 식으로 나타내어진다.

$$x[(k+1)T] = e^{(A+BF)T}x(kT) \quad (4)$$

여기서 T 는 샘플링시간이다.

샘플 데이터제에 있어서, 연속시간계 식 (1)은 샘플링 간격동안 구간적으로 일정한 피이드백 제어에 의해 구동된다. 연속시간 시스템 식 (1)과 등가적인 이산계 방정식은

$$x[(k+1)T] = \phi x(kT) + \Gamma u(kT) \quad (5)$$

이다. 여기서

$$\Psi = e^{AT}, \quad \Gamma = \int_0^T e^{A\tau} d\tau B$$

이다.

피이드백제어치 식 (2)를 이용하는 경우, 방정식 식 (5)의 페루우프계는 다음 방정식으로 나타내어진다.

$$x[(k+1)T] = (\Psi + \Gamma F)x(kT) \quad (6)$$

일반적으로 연속-이산등가성을 만족시킬만큼 샘플링 시간은 짧지 못하므로, 두 페루우프계의 응답은 같은 샘플링순간에 일치하지 않는다. 따라서, 식 (3)과 식 (6)의 등가 시스템 응답이 일치할 수 있는 피이드백 제어치를 얻어야만 한다.

재설계문제라고 하는 것은 샘플링순간에 시스템 식 (3)과 식 (6)의 이산-연속등가성을 얻을 수 있는 샘플 데이터 피이드백 제어법칙 식 (7)을 구하는 것이다.

$$u(kT) = \overline{F}x(kT) \quad (7)$$

본 논문에서는, 위에서 보인 재설계 문제에 쌍선형 근사법을 이용한다는 의미에서 근사화 등가문제로서 다루어지게 된다.

3. 연속-이산 피이드백 게인변환

3.1 선형분수함수에 의한 사상

본 절에서는, 기본해석함수 즉, 쌍선형함수에 의해 여러가지 곡선과 영역들이 사상된다는 것을 보이도록 한다. 유리함수가 다음과 같은 형태로 주어진다고 하자.

$$\rho = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}, \quad ad - bc \neq 0 \quad (8)$$

여기서 a, b, c, d 는 스칼라값이다. 이때 함수 식 (8)은 λ -평면을 ρ -평면으로 사상하며, 이 함수는 쌍선형변환 또는 Mobius변환⁽¹⁵⁾으로 불리워진다.

역으로 λ 에 대해서 식 (8)을 정리하면 식 (9)을 얻는다.

$$\lambda = \frac{-d\rho + b}{c\rho - a} \quad (9)$$

제어이론에서 근사치 문제를 고려할 경우, 식

(8)에서 $a=1, b=-1, c=0$ 이면 Euler의 근사치 함수, $a=1, b=-1, d=0$ 이면 역 미분함수라 한다. 또, $a=2/T, b=-2/T, c=1, d=1$ 이면 Tustin의 근사치 함수⁽⁷⁾라 한다. 여기서 T 는 스칼라이다.

(1) 성질 I⁽⁴⁾

쌍선형변환 식 (8)은 λ -평면내의 원 D (중심: $a+j0$, 반경: r)를 다음과 같은 중심과 반경을 가지는 \bar{D} 로 사상한다.

$$\text{중심: } a_c = \frac{ab - a(ad+bc) - (r^2 - a^2)cd}{a^2 - 2aac - (r^2 - a^2)c^2} \quad (10)$$

$$\text{반경: } r = \frac{r(ad-bc)}{a^2 - 2aac - (r^2 - a^2)c^2} \quad (11)$$

(2) 성질 II⁽¹⁴⁾

쌍선형변환 식 (8)은 ρ -평면내의 좌반평면을 다음과 같은 중심과 반경을 가지는 원 D 로 사상한다.

$$\text{중심: } a = \frac{bc+ad}{2ac} \quad (12)$$

$$\text{반경: } r = \frac{bc-ad}{2ac} \quad (13)$$

다음과 같은 Tustin의 함수를 생각한다.

$$z = f(s) = \frac{1 + Ts/2}{1 - Ts/2} \quad (14a)$$

혹은 역으로,

$$s = g(z) = \frac{2z-1}{Tz+1} \quad (14b)$$

식 (1)에서 $a=2/T, b=-2/T, c=1, d=1$ 을 의미한다. 이때 위의 성질 I과 성질 II와 유사한 결과를 다음과 같이 얻을 수 있다.

(3) 성질 III

Tustin 함수는 다음의 결과들을 만족한다.

(가) Tustin 함수 식 (14)은 s -평면내의 원 D (중심: $a+j0$, 반경: r)를 z -평면내의 다음과 같은 중심과 반경을 가지는 원으로 사상한다.

$$\text{중심: } a_1 = \frac{-1 + \frac{T^2}{4}(a^2 - r^2)}{1 - aT + \frac{T^2}{4}(a^2 - r^2)} \quad (15)$$

$$\text{반경: } r_1 = \frac{rT}{1 - aT + \frac{T^2}{4}(a^2 - r^2)} \quad (16)$$

(나) 쌍선형변환 식 (14)은 s -평면내의 좌반평면을

중심 $a=0$ 와 반경 $r=1$ 을 갖는 원으로 사상한다.

(4) 성질 IV⁽¹⁴⁾

페루우프시스템의 극을 $\lambda_i = \lambda_i(A+BF), i=1, 2, \dots, m$ 이라 하고 $\psi(\mu)$ 는 유리 스칼라함수라고 하자.

$$\Psi(\mu) = \gamma_0 \prod_{j=1}^m (\mu - \mu_j)^{\sigma_j} \quad (17)$$

여기서 γ_0 와 $\sigma_j (j=1, 2, \dots, m)$ 는 스칼라값이다. 이때 $\Psi(\lambda_i)$ 는 행렬 $\Psi(A+BF)$ 의 고유치이다.

3.2 연속-이산계의 피이드백 게인변환

시스템 식 (1)과 식 (2)형태의 제어치를 생각한다. 이때 시스템 식 (1)의 페루우프시스템은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A+BF)x(t) \quad (18)$$

페루우프시스템 식 (18)에 대해 쌍선형변환 (14b)를 고려하고, 행렬 $(A+BF)$ 의 고유치를 $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$ 이라 한다.

성질 III로부터 $f(\lambda_i)$ 는 행렬 $f(A+BF)$ 의 고유치로 되어 다음과 같이 주어짐을 알 수 있다.

$$f(\lambda_i) = \frac{1 + \frac{T}{2}\lambda_i}{1 - \frac{T}{2}\lambda_i} \quad (19)$$

쌍선형변환식 (14b)에 의해 변환된 시스템의 페루우프행렬이 다음과 같이 된다고 하자.

$$\Psi + \Gamma \bar{F} \triangleq \Delta f(A+BF) \quad (20)$$

행렬 $\Psi + \Gamma \bar{F}$ 의 고유치는 $f(\lambda_i), i=1, 2, \dots, n$ 로 주어진다. 주어진 시스템 식 (1)의 페루우프 시스템 행렬에 대해 쌍선형변환 식 (14b)를 사용하면, 식 (20)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Psi + \Gamma \bar{F} = [I - \frac{T}{2}(A+BF)]^{-1} [I + \frac{T}{2}(A+BF)] \quad (21)$$

지금 변환된 시스템에 대한 상태방정식을

$$x(k+1) = \Psi x(k) + \Gamma u(k) \quad (22)$$

와 같이 표현하고, 상태 피이드백치를 다음과 같이 정의 하면

$$\bar{u}(k) = \bar{F} x(k) \quad (23)$$

이때, 페루프시스템은 다음과 같이 된다.

$$\bar{x}(k+1) = (\Psi + \Gamma \bar{F}) \bar{x}(k) \quad (24)$$

(1) 정리 I

s -평면에서 z 평면으로 사상하는 쌍선형변환을 식 (14b)에 의해 주어진다 하자. 여기서 T 는 행렬 $(I - \frac{T}{2}A)$ 가 정칙이 되도록 주어지고, 시스템 식 (1)의 페루프행렬은 식 (14b)에 의해 변환되어진다고 하자. 이때 페루프시스템 행렬인 Ψ, Γ, \bar{F} 는 다음과 같이 된다.

$$\Psi = [I - \frac{T}{2}A]^{-1} [I + \frac{T}{2}A] \quad (25a)$$

$$\Gamma = T [I - \frac{T}{2}A]^{-1} B \quad (25b)$$

$$\bar{F} = F [I - \frac{T}{2}(A + BF)]^{-1} \quad (25c)$$

또는 역으로

$$A = \frac{2}{T} (\Psi + I)^{-1} (\Psi - I) \quad (26a)$$

$$B = \frac{2}{T} (\Psi + I)^{-1} \Gamma \quad (26b)$$

$$F = 2\bar{F} [I + \Psi + \Gamma \bar{F}]^{-1} \quad (26c)$$

로 주어진다.

• 증명

식 (21)의 표현에 대해

$$[I - \frac{T}{2}(A + BF)]^{-1} = [I - \frac{T}{2}A]^{-1} [I - \frac{T}{2}BF (I - \frac{T}{2}A)^{-1}]^{-1} \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{T}{2} [I - \frac{T}{2}A - \frac{T}{2}BF]^{-1} [I - \frac{T}{2}A]^{-1} [I + \frac{T}{2}A] \\ & + \frac{T}{2} [I - \frac{T}{2}A - \frac{T}{2}BF] \\ & = T [I - \frac{T}{2}A]^{-1} BF [I - \frac{T}{2}(A + BF)]^{-1} \quad (27b) \end{aligned}$$

의 성질을 이용하면

$$\begin{aligned} \Psi + \Gamma \bar{F} &= [I - \frac{T}{2}A]^{-1} [I + \frac{T}{2}A] \\ & + T [I - \frac{T}{2}A]^{-1} \\ & BF [I - \frac{T}{2}(A + BF)]^{-1} \quad (28) \end{aligned}$$

를 얻을 수 있다. 변환된 시스템에 대한 정의에서

행렬 Ψ, Γ, \bar{F} 는 각각 식 (25)로 표현된다. 역으로 페루프시스템 식 (24)에 대한 선형분수변환식 (14b)를 이용하고, 그리고 위에서 보인 것과 같은 유사한 조작을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} A + BF &= g(\Psi + \Gamma \bar{F}) \\ &= \frac{2}{T} (\Psi + I)^{-1} (\Psi - I) \\ &+ \frac{2}{T} (\Psi + I)^{-1} \Gamma \bar{F} [I + \Psi \\ &+ \Gamma \bar{F}]^{-1} \quad (29) \end{aligned}$$

따라서 연속시스템행렬 A, B, F 와 이산시스템행렬 Ψ, Γ, \bar{F} 는 식 (25)과 식 (26)와 같은 관계로 주어져, 위에서 보인 것과 같은 결과들로 부터 연속-이산계인 변환의 문제에 대해 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다. [Q.E.D.]

(2) 정리 II

T 가 샘플링시간으로 주어지는 쌍선형변환 식 (14b)를 생각한다.

피이드백행렬 F 는 $\lambda_i R_c(A + BF) < 0$ 를 만족시키도록 선택되었다고 가정한다. 이때 다음과 같은 결과들이 만족된다.

(가) $\lambda_i(\Psi + \Gamma \bar{F}) \in \text{unit disk } D(\text{center}=0, \text{radius}=1)$

를 만족시키는 피이드백행렬은 다음과 같이 주어진다.

$$\bar{F} = F [I - \frac{T}{2}(A + BF)]^{-1} \quad (25c)$$

(나) 식 (25c)의 피이드백 행렬 \bar{F} 는 $T \rightarrow 0$ 일 때 시스템 식 (4)와 식 (6)에 대해 이산-연속등가성을 만족한다.

• 주의 I

정리 I은 이산시간 피이드백계인을 피이드백관 계 식 (26c)을 사용함으로써 등가 연속 시간계인 변환문제에 대해 응용 가능하다.

• 주의 II

샘플링시간 T 가 대단히 짧다고 하면, 식 (25c)는 다음과 같은 Taylor급수 전개식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{F} &= F + \frac{T}{2} F(A + BF) + \frac{T^2}{4} F(A \\ &+ BF)^2 + \dots \quad (30) \end{aligned}$$

따라서 T^2 이상의 항을 0이라고 하면, 제안된 방법에 의해 얻어진 계인행렬은 Melzer와 Kuo⁽¹⁾형태의 최적등가 gain 식(30)과 동일하게 된다.

$$\begin{aligned} \bar{F} &= F + \frac{T}{2!} F(A+BF) \\ &+ \frac{T^2}{3!} F(A+BF)^2 + \dots \end{aligned} \quad (31)$$

4. CRANE의 제어

4.1 CRANE 실험장치의 개요

Fig. 1은 크레인의 위치제어에 대해서 도식적으로 나타낸 것으로 台車와 풀리로 연결하여 직류서보모터(12V, 20W, 500rpm)에 의해 구동되고, 풀리에 연결된 포텐쇼메터1(J50S, ±0.1%, 2k Ω Copal)과 대차에 부착되어 振子の 로프와 연결된 포텐쇼메터2(J50S, ±0.1%, 2k Ω Copal)로서 대차의 이동거리와 振子の 振動을 측정할 수 있도록 구성되어 있다. 增幅器(Pre-amplifier)는 0~5V인 D/A변환기의 출력전압을 입력하여 서보모터의 정, 역회전 구동이 가능하도록 +12~-12V로 增幅를 시키며, 제어부의 플랜트 출력을 A/D 변환시켜 제어則등의 계산을 행하여 플랜트의 입력을 D/A변환기를 통해서 출력하는 부분으로 구성되어 있고, 제어를 위해서 16비트 퍼스널컴퓨터를 이용하고 있으며 제어용 프로그램은 C-언어로 작성되어 있고, A/D 및 D/A 변환기는 PCL-812를 사용했다.

4.2 모델링 (Modeling)

Fig. 1에서 Cart(台車)의 등가질량, 등가점성마찰계수, 진자(화물)의 질량, 로우프의 길이, 대차의 구동력, 출발점으로부터 착화점까지의 거리, 출발점으로 부터 台車까지의 거리, 로우프의 흔들림각을 각각 M,D,m,ℓ,F,L,r,θ라고 하면 그 運動方程式⁽¹⁸⁾은 台車에 대해

$$\begin{aligned} (M+m) \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{dr}{dt} + ml \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ \sin \theta = ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} \cos \theta + F \end{aligned} \quad (32)$$

와 같이 주어지고, 진자에 대해

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mg \ell \sin \theta = ml \frac{d^2 r}{dt^2} \cos \theta \quad (33)$$

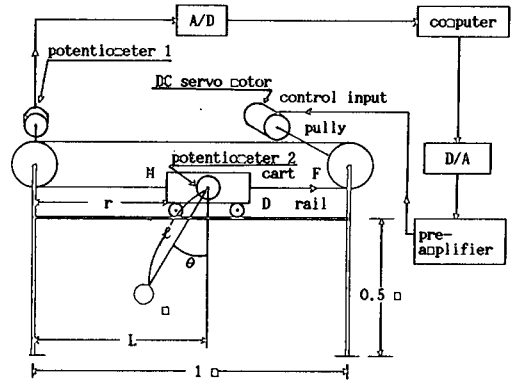


Fig. 1 Configuration of crane system

와 같이 된다.

또한, 진자의 안정점($\theta \approx 0$)에 대해 $\sin \theta \approx \theta$, $\theta = 0$, $\cos \theta = 1$ 로 취하여 선형근사화하면, 식 (32)와 식(33)은 다음과 같은 상태방정식으로 표시할 수 있다.

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (34a)$$

$$y = Cx \quad (34b)$$

여기서

$$x = \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{bmatrix}, \quad u = u_a, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g/\ell & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1/\ell \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이고, 본 실험 장치에서 진자길이는 $\ell = 0.3[m]$ 이다.

5. 실험

振子の 흔들림이 없이 주어진 목표치에 추종할 수 있는 제어계 설계법으로서 디지털 재설계법을 이용하여 마이크로 컴퓨터에 의한 실시간제어를 행했다. 실험을 간단하게 하기 위해 목표입력이 階段

形態이고, 외란이 없을 경우에 대해서 샘플링시간을 3ms, 5ms, 7ms, 10ms로 바꾸어 가면서 실험을 행했으며, 목표치도 0.5V, 1.0V, 1.5V, 2.0V등으로 변경시키면서 목표치 추종성의 실험을 했고, 외란이 있을때의 목표치 추종성도 살펴 보았다. 종래의 실험결과와 比較檢討를 위해 最適레규레이터 設計法을 이용했으며, 3절에서 보인 設計알고리즘과 최적제어설계법에 대한 설계파라미터들은 다음과 같다.

5.1 최적 레규레이터설계법

식 (34)에 대해 評價函數

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (35)$$

$$Q = \text{diag}[1 \ 10 \ 0 \ 0], \quad R = [0.02]$$

를 最小로 하는 피드백행렬은

$$F = [7.07106781 \quad 20.1807096 \quad 6.57734314 \quad 1.68483177]$$

이고, 페루우프극은

$$\lambda_i(A - BF) : \{-1.14638441 \pm j1.23337767 - 4.94994146 \pm j7.54752452\} \text{와 같이 주어진다.}$$

5.2 디지털제어설계법에 의한 설계법

페루우프행렬식 :

$$\bar{F} = F \left[I - \frac{T}{2} (A + BF) \right]^{-1} \quad (25c)$$

에 의한 \bar{F} 의 값은 각 샘플링시간마다 다음과 같다.

샘플링시간이 3ms일때

$$\bar{F} = [7.20402454 \quad 20.43701 \quad 6.711577828 \quad 1.7428542]$$

샘플링시간이 5ms일때

$$\bar{F} = [7.29686008 \quad 20.6787145 \quad 6.80536472 \quad 1.79039149]$$

샘플링시간이 7ms일때

$$\bar{F} = [7.39324599 \quad 20.8902286 \quad 6.90265160 \quad 1.83477733]$$

샘플링시간이 10ms일때

$$\bar{F} = [7.54480 \quad 21.22170 \quad 7.055 \quad 1.9038]$$

이다.

5.3 觀測器의 設計

본 실험의 경우, 距離와 角度만을 포텐쇼메터를 사용하여 測定하고 있으므로, 나머지 狀態를 觀측하기 위해 最小次元 觀測器를 다음과 같이 設計했다. 단, 觀측기의 극은 $-10, -10$ 으로 했다.

$$\frac{dm(t)}{dt} = \hat{A}m(t) + \hat{B}y(t) + \hat{J}u(t) \quad (36)$$

$$\hat{x}(t) = \hat{C}m(t) + \hat{D}y(t) \quad (37)$$

단,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} -100 & 0 \\ 0 & -132.67 \end{bmatrix}$$

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} 1 \\ 33.333 \end{bmatrix} \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

이다.

여기서, 觀測器 식 (36), 식 (37)을 離散化하면 다음과 같다.

$$m(k+1) = \hat{A}_D m(k) + \hat{B}_D y(k) + \hat{J}_D u(k) \quad (38)$$

$$\hat{x}(k) = \hat{C}_D m(k) + \hat{D}_D y(k) \quad (39)$$

단, 샘플링 시간이 3ms일때

$$\hat{A}_D = \begin{bmatrix} 0.9704 & 0 \\ 0 & 0.9704 \end{bmatrix} \quad \hat{B}_D = \begin{bmatrix} -0.2955 & 0 \\ 0 & -0.3921 \end{bmatrix}$$

$$\hat{J}_D = \begin{bmatrix} 0.00295 \\ 0.00985 \end{bmatrix} \quad \hat{C}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{D}_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

샘플링 시간이 5ms일때

$$\hat{A}_D = \begin{bmatrix} 0.9512 & 0 \\ 0 & 0.9512 \end{bmatrix} \quad \hat{B}_D = \begin{bmatrix} -0.4877 & 0 \\ 0 & -0.6470 \end{bmatrix}$$

$$\hat{J}_D = \begin{bmatrix} 0.00487 \\ 0.01625 \end{bmatrix} \quad \hat{C}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{D}_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

샘플링 시간이 7ms일때

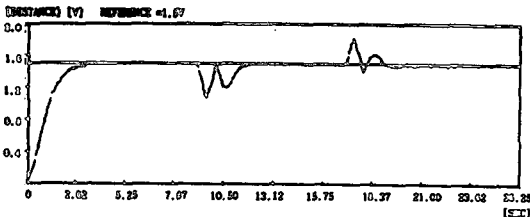
$$\hat{A}_D = \begin{bmatrix} 0.9323 & 0 \\ 0 & 0.9323 \end{bmatrix} \quad \hat{B}_D = \begin{bmatrix} -0.6760 & 0 \\ 0 & -0.6760 \end{bmatrix}$$

$$\hat{J}_D = \begin{bmatrix} 0.00676 \\ 0.02253 \end{bmatrix} \quad \hat{C}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{D}_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

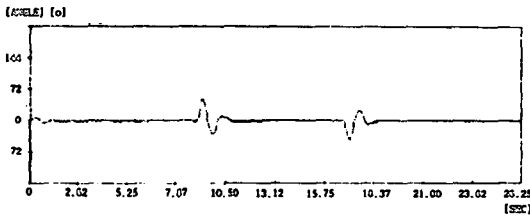
샘플링 시간이 10ms일때

$$\hat{A}_D = \begin{bmatrix} 0.9048 & 0 \\ 0 & 0.9048 \end{bmatrix} \quad \hat{B}_D = \begin{bmatrix} -0.9516 & 0 \\ 0 & -1.2625 \end{bmatrix}$$

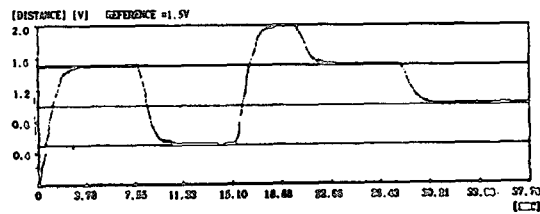
$$\hat{J}_D = \begin{bmatrix} 0.00951 \\ 0.03172 \end{bmatrix} \quad \hat{C}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{D}_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$



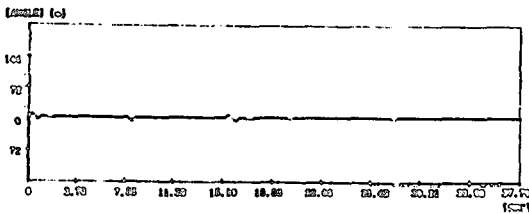
a) Response for cart with disturbance



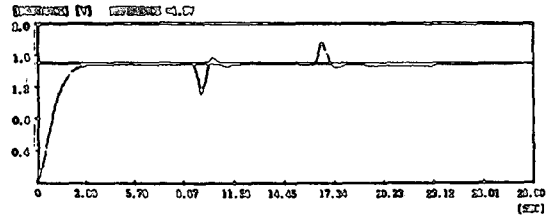
b) Response for pendulum with disturbance



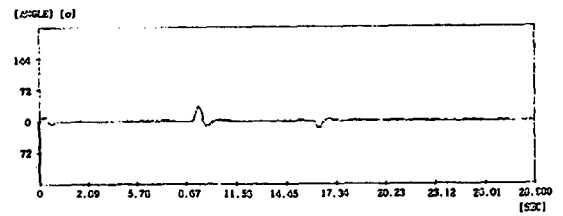
c) Response for cart with reference variation



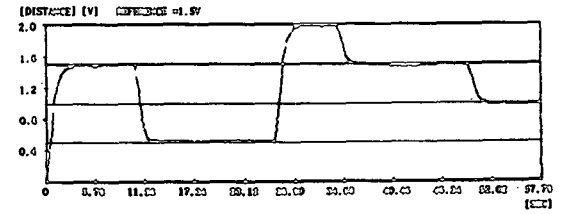
d) Response for pendulum with reference variation
(2-1) optimal regulator design



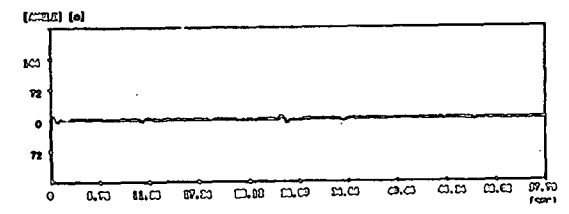
a) Response for cart with disturbance



b) Response for pendulum with disturbance



c) Response for cart with reference variation



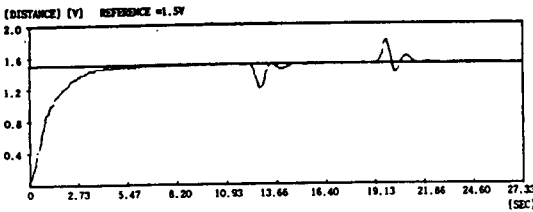
d) Response for pendulum with reference variation
(2-2) digital redesign

Fig. 2 Experimental results (sampling time : 3msec)

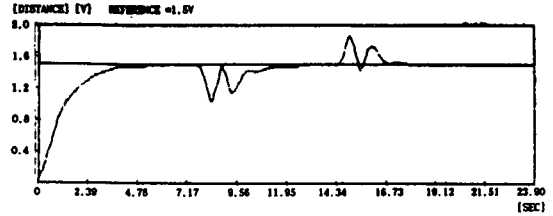
이다. 離散化된 觀測器를 제어프로그램으로 실현시켜 제어를 행하였으며, 제어프로그램은 C언어로 作成되었다.

5.4 실험결과

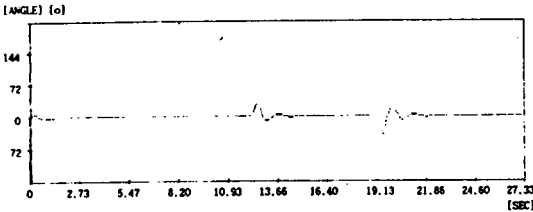
5.1절의 최적 레귤레이터제어법과 3절의 디지털 재설계법의 피이드백행렬을 이용해서 Fig. 1에 보



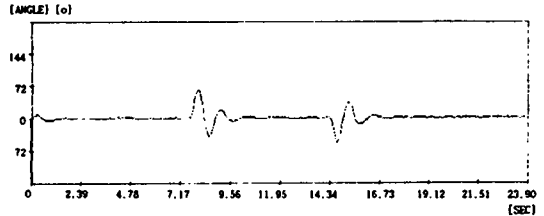
a) Response for cart with disturbance



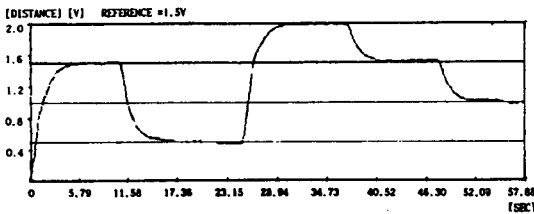
a) Response for cart with disturbance



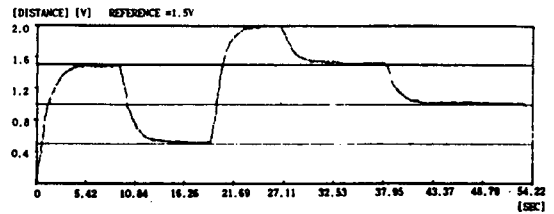
b) Response for pendulum with disturbance



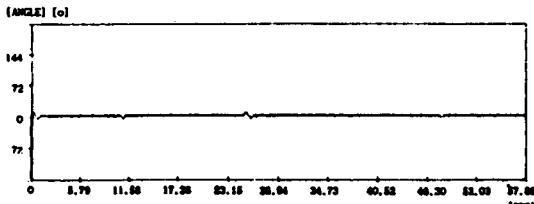
b) Response for pendulum with disturbance



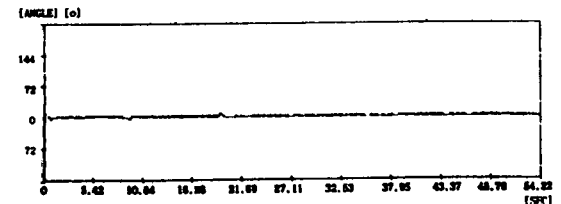
c) Response for cart with reference variation



c) Response for cart with reference variation



d) Response for pendulum with reference variation



d) Response for pendulum with reference variation

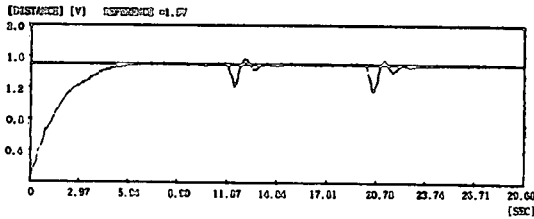
(3-1) optimal regulator design

(3-2) digital redesign

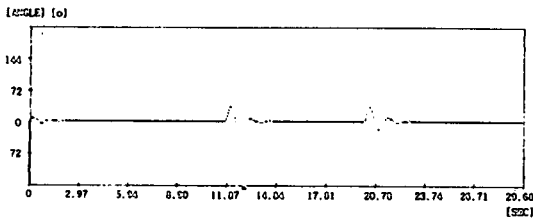
Fig. 3 Experimental results (sampling time : 5msec)

인 크레인계를 샘플링시간이 3ms, 5ms, 7ms, 10ms로 실제적인 실험을 행한 결과는 각각 Fig 2, Fig. 3, Fig. 4, Fig. 5와 같다. Fig. 2~Fig. 5의 a) c)의

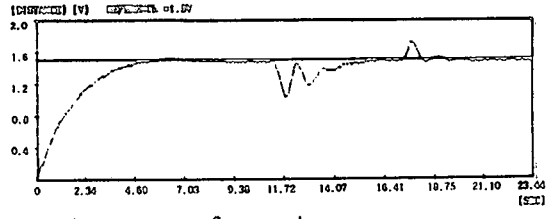
종축은 台車가 움직인거리로서 [dis]이고 크기를 전압[v]로, 횡축은 제어를 행한 시간[time]으로서 [sec]이며, b) d)의 종축은 진자가 진동한 각도로



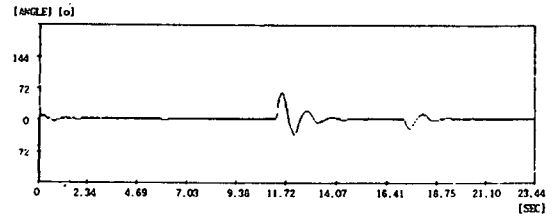
a) Response for cart with disturbance



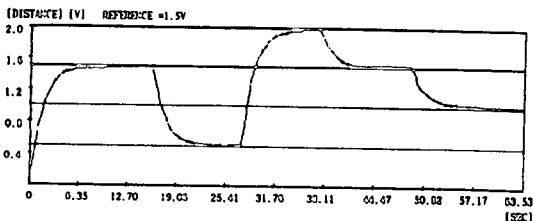
b) Response for pendulum with disturbance



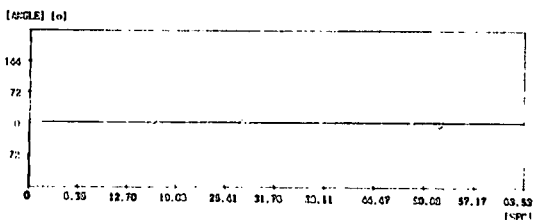
a) Response for cart with disturbance



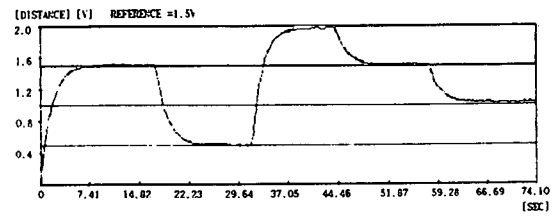
b) Response for pendulum with disturbance



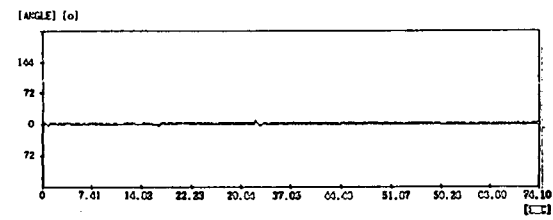
c) Response for cart with reference variation



d) Response for pendulum with reference variation



c) Response for cart with reference variation

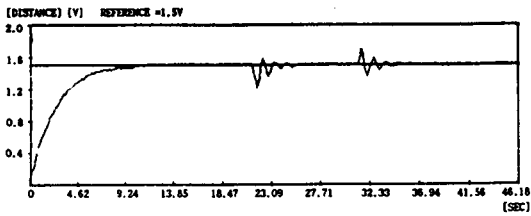


d) Response for pendulum with reference variation

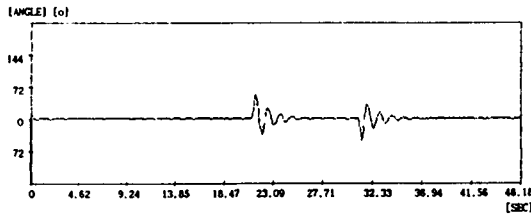
(4-1) optimal regulator design

(4-2) digital redesign

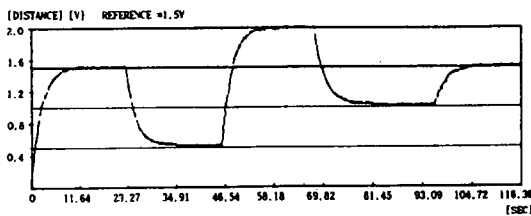
Fig. 4 Experimental results (sampling time : 7msec)



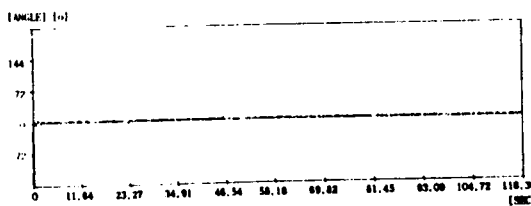
a) Response for cart with disturbance



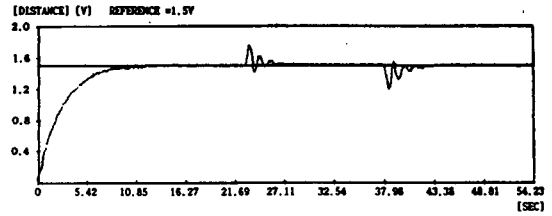
b) Response for pendulum with disturbance



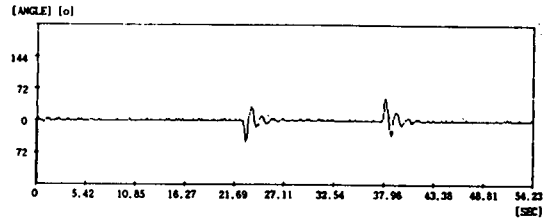
c) Response for cart with reference variation



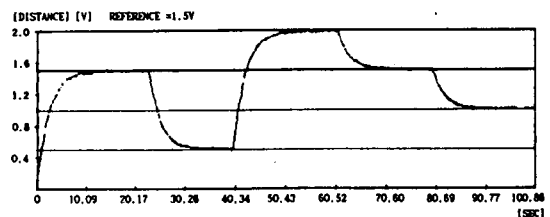
d) Response for pendulum with reference variation
(5-1) optimal regulator design



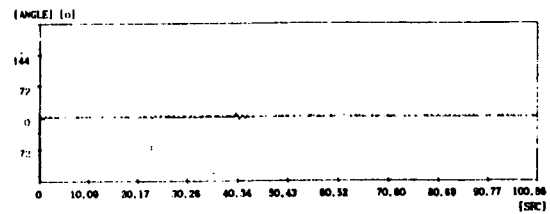
a) Response for cart with disturbance



b) Response for pendulum with disturbance



c) Response for cart with reference variation



d) Response for pendulum with reference variation
(5-2) digital redesign

Fig. 5 Experimental results (sampling time : 10 msec)

Table 1 Experimental results

Classification	Design method	Optimal regulator				Digital Redesign			
		3ms	5ms	7ms	10ms	3ms	5ms	7ms	10ms
Settling Time(sec)	Sampling time	3.11	6.3	6.84	11.66	2.8	5.3	5.4	12.88
Disturbance (angle : °)		46.8	43.2	43.2	57.60	36	70	61	50.4
Response speed about disturbance(sec)		2.78	2.9	3.24	3.34	2.7	3.29	3.36	4.4
initial oscillator(°)		3.6	7.2	8.6	10.80	10	8.6	7.9	3.6

하여 [ang] [°], 횡축은 제어를 행한 시간으로 [sec]로 한다. a)와 b)는 台車가 출발하여 목표치에 도달한 후 외란을 가했을 때 台車가 움직인 거리와 진자의 진동에 대한 결과이고, c)와 d)는 台車가 목표치에 도달한 후 목표치를 변경했을 때 台車가 움직인 거리와 진자의 진동에 대한 결과를 나타내고 있다.

최적레규레이터제어법과 디지털설계법의 실험 결과는 Fig 2, Fig. 3, Fig. 4, Fig. 5와 같다. 台車의 출발초기인 1~2초 사이에 3°~10° 정도의 진동이 발생하지만, 2초가 경과한 이후부터 目標値에 도달할 때까지 진자의 振動은 거의 발생하지 않고 있음을 알 수가 있다. 샘플링시간이 3ms, 5ms, 7ms, 10ms일때의 Settling Time과 목표치에 도달한 후 손으로 진자에 가한 임의의 외란에 대한 응답속도는 Table 1과 같다.

그리고, 목표치를 1.5V에서 0.5V, 2.0V, 1.5V, 1.0V로 변경을 시켰을 때에도 변경된 목표치에 정상편차없이 추종하고 있음을 알 수가 있다.

Table 1에 의하면 최적제어법과 디지털설계법에서의 차이는 거의 발견할 수 없을 정도이고, 샘플링시간이 짧을 수록 목표치의 추종성이나 외란에 대한 응답속도가 빠르다는 것을 알 수가 있다.

6. 결론

본 논문에서는 연속신호공간에서 설계된 계로부터 이산시스템의 피이드백계인 행렬을 얻을 수 있는 명백한 알고리즘이 쌍선형변환법을 이용하여 제안되었다. 크레인제어에 본 설계법을 적용하여 실시간제어를 행한 결과 주어진 목표치에 정상편차없이 정확하게 추종하고 있고, 임의로 가해진 외란에 대해서도 단시간내에 진자의 진동을 억제시키면서 목표치에 추종하고 있으며, 목표치의 변경에 대한 응답도 정상편차없이 정확하게 목표치에 추종하고 있으므로 본 연구에서 제안된 디지털설계법의 유효성을 확인할 수 있다.

참 고 문 헌

(1) Melzer S.M. and Kuo B.C., 1971, "Sampling Period Sensitivity of the Optimal Sampled Data Linear Regulator", Automatica, Vol. 7, pp. 367~370.
 (2) Kuo B.C., 1980, "Digital Control Systems", Holt,

Rinehart and Winston, Inc.
 (3) Kuo B.C. and Peterson D.W., 1973, "Optimal Discretization of Continuous Data Control System", Automatica, Vol.9, pp 125~129.
 (4) Kuo B.C, Singh G. and Yackel R., 1973, "Digital Approximation of Continuous Data Control Systems by Point-by Point State Comparison", Comput, Elec. Engineering, Vol. 1, pp. 155~170.
 (5) Singh G., Kuo B. C and Yackel R.A., 1974, "Digital Approximation by Point-by Point State Matching with Higher-Order Holds", Int, J. Control, Vol.20, No.1, pp. 81~90.
 (6) Yackel R.A, Kuo B.C and Singh G., 1974, "Digital Redesign of Continuous Systems by Matching of States at Multiple Sampling Periods", Automatica, Vol.10, pp.105~111.
 (7) Astrom K.J and Wittenmark B., 1984, "computer Controlled Systems, Theory and Design", Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs.
 (8) Kondo R. and Furuta K., 1986, "On the Bilinear Transformation of Riccati Equations", IEEE Trans. Auto. Control, Ac-31, No.1, PP.50~54.
 (9) Kleinman D.L. and Rao P.K., 1977, "Continuous-Discrete Gain Transformation Methods for Linear Feedback Control", Automatica, Vol.13, pp.425~428.
 (10) Hitz K.L. and Anderson B.D.O., 1972, "Iterative Method of Computing the Limiting Solution of the Matrix Riccati Differential Equation", Proc. IEEE, Vol.119, No.9, pp.1402~1406.
 (11) Bar-Ness Y. and Halbersberg A., 1983, "Solution of the Singular Discrete Regulator Problem Using Eigenvector Methods", Int. J. Control, Vol.31, No.4, pp.615~625
 (12) Groutage F.F., Volfson S.B. and Schneider A.M., 1987, "s-plane to z-plane Mapping Using a Simultaneous Equation Algorithm Based on the Bilinear Transformation", IEEE Trans. Auto. Control, Ac-32, No.7, pp.635~637.
 (13) Furuta K. and Kim S.B., 1987, "Pole Assignment in a Specified Disk", IEEE Trans, Auto, Control, Ac-32, No.5, pp.423~427.
 (14) kim S.B. and Furuta K., 1988, "Regulator Design with Poles in a Specified Region", Int. J. Control, Vol. 47, No.1 pp. 143~160.
 (15) Churchill R.V., Brown Jd.W. and Verhey R.F., 1974, "Complex Variables and Applications", McGraw-Hill International Book Company,
 (16) Gantmacher F.R., 1960, "The Theory of Matrices", Chelsea Publishing Company.

- (17) Barnett S., 1983, "Polinomials and Linear Control Systems", Marcel Dekker, Inc., New York and Basel.
- (18) 김상봉, 신민생, 김환성, 정용길, 1991, "이동 CRANE의 제어에 관한 연구" 한국 정밀공학회지, 제8권 제2호, pp.47~46.