

〈論 文〉

## 대류 조건하의 가변 점성 유체층의 선형 안정성

송 태 호\*

(1991년 8월 31일 접수)

### Linear Stability of Variable-Viscosity Fluid Layer under Convection Boundary Condition

Tae-Ho Song

**Key Words :** Linear Stability(선형 안정성) Benard Convection(베나드 대류) Variable Viscosity(가변 점성) Convection Boundary Condition(대류 경계 조건)

#### Abstract

The critical condition for onset of Benard convection with variable viscosity  $\nu = \nu_0 \exp(-CT)$  has been obtained using a linear stability theory. The bottom wall is rigid while the upper surface may be either free or rigid. The two boundaries are subject to convective heat transfer. The critical Rayleigh numbers are presented up to maximum viscosity ratio of 3000. It is greater for smaller upper and/or lower surface Biot numbers. Its dependence on the viscosity ratio is complicated. However, a simple sublayer theory is found to be applicable for extremely large viscosity ratio. In such cases, the critical Rayleigh number and the critical wave number are functions of viscosity ratio and lower surface Biot number.

#### 기 호 설 명

$A$	: 최대 및 최소 점성비의 자연 대수	$\mu$	: 점성 계수
$a$	: 무차원 파수	$p$	: 압력
$\hat{a}$	: 단축 무차원 파수	$R_a$	: 레일리 수
$b_n(i)$	: 균질해의 다항식 계수	$\hat{R}_a$	: 단축 레일리 수
$C$	: 온도-점성 관계식의 관련 계수	$T$	: 온도
$C_i$	: 특이해의 계수	$t$	: 시간
$F$	: z축 방향 속도 성분의 진폭 함수	$u_i$	: i축 방향 속도
$f^{(1)}$	: 특이해	$w$	: z축 방향 속도
$G$	: 온도 및 z축 방향 속도의 지수 계수	$Z$	: 무차원 z축 좌표
$g$	: 중력 가속도	$\alpha$	: 열확산 계수
$H$	: 온도의 진폭 함수	$\beta$	: 체적 팽창 계수
$h$	: 열전달 계수	$\nu$	: 동점성 계수
$k$	: 열전도 계수	$\sigma$	: 요동의 성장률
$L$	: 유체층의 두께		

#### 하첨자

$B$	: 바닥
$c$	: 임계치

\*정회원, 한국과학기술원 기계공학과

$s$  : 정지한 정상 상태

$U$  : 윗면

상첨자

$^{\circ}$  : 요동항

## 1. 서론

위 아랫면이 고정되고 온도가 주어져 있는 유체층의 대류는 임계 레이레이수 1707.8에서 시작된다. 또한 윗면이 자유 표면일 때에는 그 임계 레이레이수가 1100.7임이 알려져 있다.<sup>(1)</sup>

유체층내에 열의 생성이 있을 수 있으며 윗면이 대류 경계 조건하에 놓인 경우에 대하여 Sparrow<sup>(2)</sup> 등은 선형 이론을 적용하여 임계 레이레이수 및 임계 파수를 구하였다. 이외에도 Yang<sup>(3)</sup>은 복사 가열의 영향을 고찰하였으며 Gardener<sup>(4)</sup>은 구형 환형 공간의 문제를, Maekawa와 Abe<sup>(5)</sup>는 전기장의 영향을, Pearson<sup>(6)</sup>은 표면 장력의 영향을 고찰하였다. 또한 Chao<sup>(7)</sup>은 비선형 가속도항의 영향을 고찰하여 프란틀 수가 작은 유체의 경우 그 비선형항의 영향이 크다는 것을 발견하였다. 비선형 효과는 또한 Lee 등<sup>(8)</sup>에 의하여 유동중의 유체에 대하여 고려되었으며, Hamouda와 Mollendorf<sup>(9)</sup>는 갑자기 가열되는 유체층에 대한 비선형 효과를 고려했다.

이상의 연구는 모두 유체의 물성치가 일정한 경우에 대한 연구인데, 베나드 대류의 안정성이 공학적으로 중요한 유체는 대개 프란틀 수가 매우 크고 온도에 따라 점성이 민감하게 변화하는 것들로서 글리세린, 엔진 오일, 에틸렌 글리콜, 글리세롤, 용융 유리 및 마그마 등이 이에 속한다. 보다 구체적으로 글리세린, 엔진 오일, 에틸렌 글리콜은 0°C에서 50°C로 가열됨에 따라 그 점성이 수십분의 일로 낮아지며 용융유리나 마그마 따위는 800°C에서 1300°C로 가열됨에 따라 그 점성이 약 1/10,000로 낮아진다. 이와 같이 점성이 심하게 변화하는 유체가 용융, 유동 혹은 주조의 공정을 거치면서 대류 현상을 일으키는가의 여부는 제품의 품질 및 공정의 제어상 반드시 파악해야할 사항이다. Stengel<sup>(10)</sup> 등은 상하면의 온도가 고정되어 있는 경우의 임계 레이레이수 및 임계 파수를 최대 및 최소 점성 비의 함수로 구하여 실험과의 비교를 행하였다. 이들은 온도의 함수로서 점성을 표현하는 식의 형태에

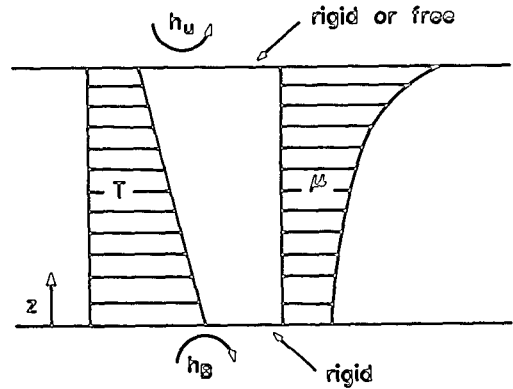


Fig. 1 Schematic diagram of the problems.

따라 그 임계 레이레이수 및 임계 파수가 많이 달라 진다는 것을 발견하였으며 후에 Chen<sup>(11)</sup> 등은 글리세롤에 대하여 실제와 가장 부합되는 함수식의 형태를  $\nu = \nu_0 \exp(C/T)$ 로 보고하였다.

한편 실제적으로 베나드 대류의 발생시 유체층의 상하면은 적당한 대류 열전달 계수를 가지고 있게 되는데, 이와 같은 경계 조건을 가진 가변 점성 유체의 안정성은 연구된 바가 없다. 이에 따라 본 연구를 수행하게 되었으며 유체의 점성이 지수 함수적으로 ( $\nu = \nu_0 \exp(-CT)$ ) 변화할 경우를 관찰하였다. Fig. 1은 대상이 된 유체층을 보인 것으로 하부는 고정되어 있고 상부는 고정되어 있거나 자유 표면 상태이다. 유체층의 하부는 상부보다 더 뜨겁게 되어 있는데, 이것은 유체층의 상부는 차가운 주위로 열을 빼앗기며 하부는 뜨거운 주위로부터 가열되기 때문이다. 이때 상하부의 냉각 및 가열 경계 조건은 대류경계 조건으로 주어진다. 열팽창 계수는 양이며 온도의 증가에 따라 점성은 감소한다. 이와 같은 온도-점성 관계, 수력학적 경계 조건, 열적 조건들은 프란틀 수가 큰 유체에서 표본적으로 나타나는 것들로서 선형적 안정 이론을 적용하여 옳은 결과를 얻을 수 있다<sup>(7)</sup>.

## 2. 수학적 처리

동점성 계수가 지수 함수적으로 변화할때

$$A = \ln\left(\frac{\nu_u}{\nu_b}\right) \quad (1)$$

로 정의 하면 임의 위치에서의 동점성 계수  $\nu$ 는 다음처럼 주어진다.

$$\nu = \nu_B \left( \frac{\nu_u}{\nu_B} \right) \frac{T_B - T}{T_B - T_u} \quad (2)$$

여기에서, 하첨자  $U$  및  $B$ 는 윗면과 아랫면을 뜻하며  $T$ 는 온도이다. Fig. 1의 정지 유체층에 미약한 요동이 가해지면  $i$ 방향(1은  $x$ , 2는  $y$ , 3은  $z$ ) 속도, 온도, 동점성 계수 및 압력은 각각  $u_i = u_i^*$ ,  $T = T_s + T^*$ ,  $\nu = \nu_s + \nu^*$ ,  $p = p_s + p^*$ 로 주어진다. 여기에서 하첨자  $s$ 는 대류가 일어나기 직전의 기본상태(basic state), 상첨자  $*$ 는 요동항을 표시한다. 연속 방정식, 운동량 방정식과 에너지 보존 방정식에 위의 표현들을 대입하고 Pellew와 Southwell<sup>(1)</sup>의 유도 과정을 그대로 반복하여 중력 방향 속도  $w^*$ 에 관한 6차의 편미분 방정식을 얻을 수 있다. 이 자세한 과정은 참고 문헌 (1)에 넘기도록 하고 다만  $\nu$ 가 위치에 따라 변화하는데 따른 운동량 확산항의 전개만을 표현하면,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) \right] \\ &= \nu_s \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \nu_s}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^*}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

처럼 선형화 된다. 여기에서  $j$ 는 합을 뜻하는 반복 첨자이다. 모든 지배 방정식에 대하여 요동항끼리의 곱을 무시하고 선형화할 때, 부시네스크의 가정을 이용하면  $w^*$ 에 관한 지배 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} - \alpha \nabla^2 \right) \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu_s \nabla^2 - 2 \frac{\partial \nu_s}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \nabla^2 w^* \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2 \nu_s}{\partial z^2} \nabla_{xy}^2 w^* - \frac{\partial^2 \nu_s}{\partial z^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} \right] \\ & \quad + g\beta \frac{\partial T_s}{\partial z} \nabla_{xy}^2 w^* = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

여기에서  $\nabla_{xy}^2$ 는  $x$  및  $y$ 에만 관한 라플라스 연산자이다. 식(4)에  $w^* = F(z) G(x, y) \exp(\sigma t)$ 의 변수 분리형 해를 가정하되 지수계수  $G$ 가

$$\nabla_{xy}^2 G + \left( \frac{a}{L} \right)^2 G = 0 \quad (5)$$

의 관계를 만족하며 안정성의 임계 상태는  $\sigma=0$ 에서 일어남을 감안하면  $F$ 에 관한 6차 방정식이 다음과 같이 구하여 진다.

$$\begin{aligned} & \frac{d^6 F}{dZ^6} + 4A \frac{d^5 F}{dZ^5} + (6A^2 - 3a^2) \frac{d^4 F}{dZ^4} \\ & \quad + (4A^3 - 8a^2 A) \frac{d^3 F}{dZ^3} + (A^4 - 6a^2 A^2 + 3a^4) \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} \end{aligned}$$

$$+ 4a^3 A \frac{dF}{dZ} + (a^2 A^4 - a^6 + a^2 R_a e^{A(1/2-Z)}) F = 0 \quad (6)$$

여기에서  $Z = z/L$ 로 정규화되었으며 레일리수  $R_a$ 는  $Z=0.5$ 에서의 동점성 계수  $\nu_0$ 를 이용하여 다음처럼 정의하였다.

$$R_a = \frac{g\beta(T_B - T_u)L^3}{\nu_0 \alpha} \quad (7)$$

또한,  $T^* = H(z) G(x, y) \exp(\sigma t)$ 로 두고  $\sigma=0$ 인 조건에서  $H$ 와  $F$ 는 다음과 같은 관계가 있음을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} H &= \frac{\nu_s}{g\beta} \frac{1}{(aL)^2} \left[ \frac{d^4 F}{dZ^4} + 2A \frac{d^3 F}{dZ^3} \right. \\ & \quad \left. + (A^2 - 2a^2) \frac{d^2 F}{dZ^2} - 2a^2 A \frac{dF}{dZ} \right. \\ & \quad \left. + a^2 (a^2 + A^2) F \right] \end{aligned} \quad (8)$$

(6)식으로부터 여섯개의 균질해  $f^{(0)}(Z)$ ,  $f^{(1)}(Z)$ , ...  $f^{(5)}(Z)$ 가 얻어지며, 이들을 각각 무한다항 급수로 전개하고자 한다<sup>(2)</sup>. 즉,

$$F(Z) = \sum_{i=0}^5 C_i f^{(i)}(Z) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} f^{(i)}(Z) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(i)} Z^n \\ (i &= 0, 1, \dots, 5) \end{aligned} \quad (10)$$

으로 표현하여 (10)식을 (6)식에 대입하면 계수  $b_n^{(i)}$ 에 관한 회귀 공식이 얻어진다. 즉,  $n \geq 6$ 에 대하여

$$\begin{aligned} b_n^{(i)} &= -\frac{4A}{n} b_{n-1}^{(i)} - \frac{6A^2 - 3a^2}{n(n-1)} b_{n-2}^{(i)} \\ & \quad - \frac{4A^3 - 8a^2 A}{n(n-1)(n-2)} b_{n-3}^{(i)} \\ & \quad - \frac{A^4 - 6a^2 A^2 + 3a^4}{n(n-1) \dots (n-3)} b_{n-4}^{(i)} \\ & \quad - \frac{4a^4 A}{n(n-1) \dots (n-4)} b_{n-5}^{(i)} \\ & \quad - \frac{a^2 A^4 - a^6}{n(n-1) \dots (n-5)} b_{n-6}^{(i)} \\ & \quad - \frac{a^2 R_a e^{A/2}}{n(n-1) \dots (n-5)} \sum_{m=0}^{n-6} \frac{(-1)^m}{m!} A^m b_{n-6-m}^{(i)} \end{aligned} \quad (11)$$

또한  $0 \leq n \leq 5$ 에 대하여는  $b_n^{(i)} = \delta_{ni}$ (크로네커의 델타)로 두면  $f^{(i)}(Z)$  간에 선형 독립이 된다.  $f^{(i)}(Z)$ 의 계수  $C_i$ 는 경계 조건들로부터 구할 수 있다. 우선 바닥  $Z=0$ 에서 유속이 0이므로

$$F(0) = 0 \tag{12}$$

이고  $x$  및  $y$  방향 속도도 항상 0이므로 연속 방정식에서  $\partial w^* / \partial z = 0$ , 즉

$$\frac{dF(0)}{dZ} = 0 \tag{13}$$

또한, 윗면  $Z=1$ 에서  $w^*=0$ 이니까

$$F(1) = 0 \tag{14}$$

만일 윗면이 고정되어 있다면 (13)식과 마찬가지로

$$\frac{dF(1)}{dZ} = 0 \tag{15}$$

가 되고, 윗면이 자유 표면일 경우  $x$  및  $y$  방향 속도의  $z$  방향 구배가 0이니까 연속 방정식을  $z$ 에 대하여 미분하여 보면  $\partial^2 w^* / \partial z^2 = 0$ , 즉

$$\frac{d^2 F(1)}{dZ^2} = 0 \tag{16}$$

을 얻는다. 윗면과 아랫면의 대류 경계 조건은  $H$ 에 관하여 각각

$$\frac{\partial H(1)}{\partial Z} = -\frac{h_u L}{k} H(1) \tag{17}$$

$$\frac{\partial H(0)}{\partial Z} = \frac{h_b L}{k} H(0) \tag{18}$$

로 표현되며 (8)식을 이용하면  $F$ 에 관한 경계 조건으로 바꾸어 쓸 수 있다. 이상의 여섯개의 경계 조건은 모두 균질하므로 계수  $C_i$ 가 모두 0인 무의미해를 줄 수가 있다. 이것을 피하는 경우는  $f^{(i)}(Z)$  및 그 도함수들이 (12)부터 (18)의 경계 조건에 대입되어  $C_i$ 를 결정짓는 계수 행렬을 만들 때에 그 행렬식이 0이 되는 경우 뿐이다.  $f^{(i)}(Z)$  및 그 도함수들은  $Z=0$  및  $Z=1$ 에서 파수  $a$  및 레일 레이수  $Ra$ 의 함수이므로 이 문제는 특이치  $a$ 와  $Ra$ 의 조합을 구하는 문제가 된다. 주지하다시피  $a$ 는 1정도의 크기를 가지며 이때의 특이치  $Ra$ 는  $a$ 에 대하여 아래로 불록하다. 최소  $Ra$ 를 임계 레일 레이수라 부르며 이 수와 그 때의  $a$ 값을 점성의 대수비  $A$ , 윗면과 아랫면의 비오수  $h_u L/k$ 와  $h_b L/k$ 의 함수로 구하는 것이 본 논문의 목적이다.

### 3. 수치해법

주어진  $A$ ,  $h_u L/k$  및  $h_b L/k$ 에 있어서 임의의  $a$

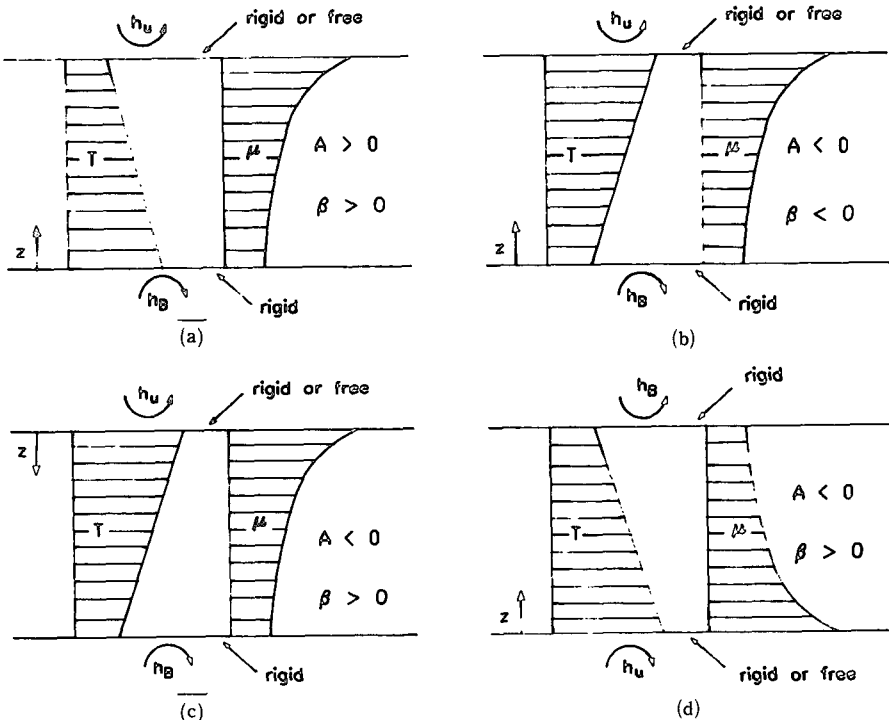


Fig. 2 The four equivalent problems.

를 취하고 그때에 경계 조건들로부터  $C_i$ 를 구하기 위한 계수 행렬의 행렬식이 0이 되는 특이치  $Ra$ 를 구한다.  $a$ 를 다소 변화시키면서 특이치  $Ra$ 가 최소가 되도록 하여 그때의 임계 파수  $a_c$  및 임계 레일레이수  $Ra_c$ 를 출력한다. 결과적으로 근이 되는  $Ra$ 를 찾기 위한 내부 루프와  $Ra$ 를 최소화시키기 위한  $a$ 의 변화 루프로써 이중으로 구성된 계산 방식을 취하게 된다. 내부 루프는 수정된 선형 보간법(modified linear interpolation method)을 사용하였으며 외부 루프는 Fibonacci 탐색법을 적용하였다.  $a$  및  $Ra$ 는 변화폭이 각각  $10^{-5}$  및  $10^{-3}$  이내에 들면 수렴한 것으로 간주하였다. 본 연구에서  $h_u L/k$  및  $h_b L/k$ 는 0, 0.1, 1.0, 10 및  $\infty$ 의 모든 가능한 조합을 취하였다. 이 비오(Biot)수가 0인 경우는 열 유속이 고정되어 있는 것이며 무한대인 경우는 온도가 고정되어 있는 경우에 해당된다. 또한  $A$ 는 0부터 8까지 1의 간격으로 변화시켰는데 이것은 최대 3,000까지의 점성비에 해당되며  $A$ 가 8이 넘으면 점근적 거동이 나타나는 바<sup>(10)</sup> 별도로  $A$ 를 10, 12 및 14로 취하여 그 거동을 조사하였다.

내부 루프에서  $f^{(i)}$  및 그 도함수치를 구하기 위해서는 식(11)을 이용하여 계수  $b_n^{(i)}$ 를 구하게 되는데 실제의 계산 결과  $A$ 가 어느정도(약 4)이상 커지면  $n$ 이 수십개가 넘어도  $b_n^{(i)}$ 가 0으로 접근 감소하지 않아서 수렴성이 매우 나뉘어 확인되었다. 반면  $A$ 가 음일 때에는 이 수열의 감쇠가 빨라서 수렴에 문제가 없는 것을 알 수 있었다. 따라서 Fig. 1의 문제를 Fig. 2에 보인 네개의 등가 문제중 (d)의 문제로 변환시켜 보았다. 즉 Fig. 2(a)의 원래 문제는  $A$  및 체적 팽창을  $\beta$ 의 부호를 바꾸면 (b)의 문제와 동일하여 진다. (b)의 문제에서 좌표축의 방향을 바꾸면 (c)와 같이 체적 팽창률의 부호를 다시 양으로 바꾼 것과 같다. (c)의 위 아래를 뒤집어 놓은 것이 (d)로서 원래문제에서  $A$ 의 부호가 바뀌고 위 아래의 경계 조건이 바뀐 문제가 된다. (d)의 문제를 풀고자 할 때  $A \leq 8$ 에서는  $b_n^{(i)}$ 를 70개, 그 이상에서는 100개항을 취하여 수렴성이 충분함을 알 수 있었다. 또한 (d)에서 아랫면이 고정되어 있을 때(즉 (a)에서 윗면이 고정되어 있을 때),  $F(0)=0$ ,  $dF(0)/dZ=0$ 라는 두 조건은  $C_0=C_1=0$ 으로써 쉽게 만족되며, 자유표면일 때는 그 수력학적 조건들이  $C_0=C_2=0$ 으로써 곧 만족되므로 실제  $C_i$ 들의 계수 행렬은 여타 4개의

$C_i$ 들에 대한 것만으로써  $4 \times 4$ 의 크기를 갖는다.

실제 계산에 사용된 컴퓨터는 시스템 공학 연구소의 CRAY-2S로서 10진법으로 15자리의 유효 숫자로 계산할 때 하나의  $A$ ,  $h_u L/k$  및  $h_b L/k$  조합에서 약 13초의 CPU 시간이 소요되었다. 이로써 전체적인 계산 시간은 그다지 중요한 인자가 아님을 알 수 있다. 유효 숫자 오차(roundoff)는  $A \leq 8$ 일 때  $Ra_c$ 에 대하여 최대  $10^{-2}$ ,  $a_c$ 에 대하여는 최대 0.003임을 알 수 있었으며, 또한  $A \geq 10$ 일 때에는  $Ra_c$ 에 대하여 0.6,  $a_c$ 에 대하여 0.01 이하의 오차를 보였다. 특히  $A=0$ 이고 위 아래가 고정되어 있으며 온도가 결정되어 있는 ( $h_u=h_b=\infty$ 에 해당) 경우 잘 알려져 있는 임계레이레이수 및 임계 파수는 각각 1707.762, 3.1163으로 나타나, Fujimura와 Kelly가<sup>(12)</sup> 구한 가장 정확한 수치(각각 1707.762 및 3.116324)와 비교할 수 있는 한도까지 정확히 일치하였다. 또한  $A=0$ 일 때 바닥의 온도가 결정되어 있거나 열유속이 주어져 있는 경우 Sparrow등<sup>(2)</sup>이 발표한 수치와는 소수 이하 두 자리까지  $a_c$  및  $Ra_c$ 가 일치하였으며  $A > 0$ 이고 위 아래의 온도가 고정되어 있는 경우 Stengel등<sup>(10)</sup>이 발표한 그래프와는 판독오차 이내로 일치하였다. 따라서 현재 계산방식의 정확도는 공학적으로 충분하며, 그 계산 결과도 다른 계산 결과와 잘 일치하여 본 계산 결과가 옳음을 확인할 수 있다.

#### 4. 계산 결과 및 논의

Fig. 3은 윗면이 고정되어 있을 때의 임계 레일레이수를 위 아랫면의 비오수를 인자로 하여  $0 \leq A \leq 8$ 의 범위에서 보인 것이다. 일반적으로 위나 아랫면의 비오수가 증가할수록 임계 레일레이수는 커지는데, 이것은 약간의 온도 요동에 대하여 원상 회복을 시키는 복원력이 경계면의 비오수가 클수록 강하기 때문으로 보인다. 점성 대수비  $A$ 가 0인 경우에는 위 아래의 비오수가 서로 바뀌더라도 똑같은 임계 레일레이수 및 임계 파수가 나타나는데, 이것은 물리적으로 상하의 대칭성이 주어지기 때문이다. 이같은 대칭성은  $A$ 가 양수로 커짐에 따라 더 이상 나타나지 않는다. 또한  $A$ 가 커질수록 윗면의 비오수가 임계 레일레이수에 미치는 영향이 현저히 줄어드는 것을 알 수 있다. 이것은 윗면의 대류 경계조건보다도 아랫면의 대류 경계조건이 더 큰 영향을 주는 것을 의미한다. 이는  $A$ 가 커질때

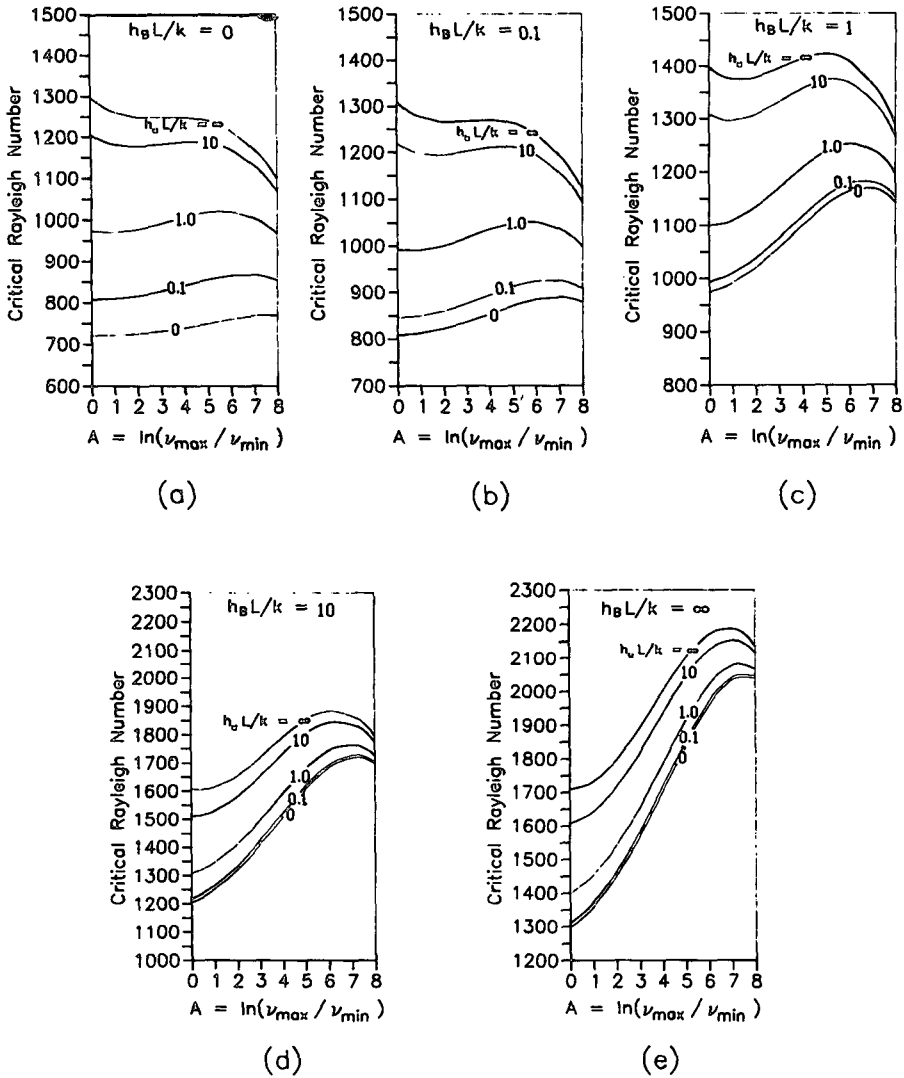


Fig. 3 The critical rayleigh number when the upper surface is rigid.

아랫면 근처의 점성이 윗면 근처보다 훨씬 작아져서 대류가 주로 아랫부분에서 일어나기 때문으로 보인다. 이 효과는 A가 매우 큰 경우에 더욱 뚜렷이 나타나므로 후에 다시 상술한다.

임계레이레이수는 A가 증가함에 따라 증감이 반복되는 복잡한 양상을 보인다. 여기에서 A가 국부적으로 증감의 기복을 보이는 것은 레이레이수를 정의할 때 그 평균 온도에서의 점성을 사용한 탓으로 이 값을 예컨대 조화 평균치  $(\nu_m^{-1} = \int_0^1 dZ/\nu)$ 로 대신 취한다면 A에 대하여 임계 레이레이수는

항상 증가한다. 즉 조화 평균치를 사용한 레이레이수  $Ra_m$ 은 (7)식으로 주어진 레이레이수  $Ra$ 와  $Ra_m = Ra(e^A - 1)/(A e^{A/2})$ 의 관계가 있음을 보일 수 있다. 한편, 점성비가 매우 클 때에는 Stengel 등이<sup>(10)</sup> 지적한 바와 같이 아랫쪽의 윤희층(sub-layer)내에서 대류가 생기는 것으로 생각되며 그 점근적 거동은 후술하기로 한다.

임계 파수  $a_c$ 는 자세히 보이지 않았으나 표 1에  $A=0$ 이고 바닥의 비오수가 0 또는 무한대인 두 경우를 여러가지 윗면 조건에 대하여 보였다. 이로부터 위 혹은 아래의 비오수가 커질 수록 임계 파수

Table 1 The critical wavenumber  $a_c$  for uniform viscosity ( $A=0$ )

Upper Surface Condition	$h_B L/k$	$h_u L/k$				
		0	0.1	1.0	10.0	$\infty$
Rigid	$\infty$	2.552	2.582	2.751	3.029	3.116
	0	0	1.228	1.943	2.437	2.552
Free	$\infty$	2.086	2.116	2.293	2.589	2.682
	0	0	1.015	1.644	2.106	2.215

가 커진다는 것을 알 수 있다. 특히 위 아래의 비오수가 모두 0인 경우 임계파수는 0이 되어 그 대류의 세포 크기가 무한히 커짐을 알 수 있으며 또한 윗면이 고정되어 있을 때에 위 아래의 비오수가 무한대로 커지면 임계 파수는 3.116에 가까와 짐을 알 수 있다. 윗면이 자유 표면인 경우는 윗면이 고정된 경우보다 임계 파수가 전체적으로 다소 작아 위 아래의 비오수가 무한대일때  $a \approx 2.68$ 이 되는 것 외에는 똑같은 경향을 보임을 알 수 있다. 당연히 윗면이 자유 표면일 때에는 고정되어 있을 때보다 유동이 자유로와 임계 파수가 작아지고 대류 세포의 크기가 커질 것이 예측된다. 표 1은 이러한 예상을 뒷받침해 주고 있으며, 여기에 보이지는 않았으나, 파수는  $0 \leq A \leq 8$ 인 경우에  $A$ 에 별로 민감하게 변화하지 않아서 수 퍼센트 내지 삼십 퍼센트 가량 변화가 있다.

윗면이 자유 표면일 때에 임계 레일레이수는 윗면이 구속되어 있을 때보다 감소한다(Fig. 4 참조). 역시 앞서 논의된 바와 같이 앞서의 경우보다 대류가 일어나기가 용이함을 확인할 수 있다. 이 경우는 상하 경계 조건의 대칭성이 없으며 따라서  $A=0$ 인 경우, 위 아랫면의 비오수를 서로 바꿀 때 임계 레일레이 수는 같지가 않다. 보다 구체적으로 예컨대 바닥의 비오수가 0, 윗면의 비오수가 무한대일때 그 임계 레일레이 수는 816.744이고 위 아래의 비오수가 바뀌어 바닥에서 무한대, 윗면에서 0일 때 임계 레일레이 수는 668.998로 줄어든다. 윗면이 고정되어 있을 때와 마찬가지로 위나 아랫면의 비오수가 감소할 수록 임계 레일레이 수가 감소한다. Fig. 4로부터 알 수 있듯이 그 임계 레일레이수는 위 아랫면의 온도가 고정된 경우 점성 대수비  $A$ 의 증가에 따라 지속적으로 증가하며, 반면 위 아랫면의 열유속이 주어진 경우에는 오히려 지

속적으로 감소한다. 이 경향은 다소 혼돈스럽게 보이나 앞서 논의된 바와 마찬가지로 레일레이수에 쓰인 점성을 조화 평균치로 바꿔 쓴다면 모든 경우에 있어서  $A$ 에 대한 임계 레일레이수의 구배는 항상 양이다. 따라서 그 임계 레일레이수와 점성 대수비  $A$ 의 복잡한 관계는 단순히 대표 점성의 선택에 따른 임의적인 현상으로 이해할 수 있다.

한편 용융유리, 마그마 등에서 종종 나타나는 바와 같이 점성 대수비  $A$ 가 무한히 커질 경우의 거동을 조사하기 위하여  $A=14$ 까지를 계산하여 보았다. 이때의 계산 결과를 Fig. 5 및 Fig. 6에 보였으며 여기에 쓰인 단축 임계 레일레이수  $\bar{R}a_c$  및 단축 임계 파수  $\bar{a}_c$ 는 다음과 같이 정의된 것이다.

$$\bar{R}a_c = Ra_c \frac{e^{a^2}}{A^4} \quad (19)$$

$$\bar{a}_c = \frac{a_c}{A} \quad (20)$$

이 단축 임계수들은 Stengel 등<sup>(10)</sup>이 다음과 같이 생각하여 도출한 것이다. 점성 대수비  $A$ 가 8이상이면 아랫쪽의  $8L/A$  두께의 윤향층(sub-layer)만의 레일레이수가 전체 유체층의 레일레이수보다도 더 커진다. 뿐만 아니라 이 두께의 유체층의 레일레이수는 어떠한 임의의 일부두께의 레일레이수보다도 커서 유체층내에서 대류가 시작된다면 바로 이 두께 즉 하부  $8L/A$ 에서 시작될 것이다. 이 두께에서의 레일레이수를 임의의 상수 75.20로 나눈것이 위의 단축 레일레이수이며 이 두께에 대한 파수를 8로 나눈것이 단축파수이다. 이 단축 임계수들은  $A$ 가 매우 커짐에 따라 일정한 값으로 수렴한다. 즉, 실제적인 대류는 그 윤향층에서 만 일어나는 것으로 이해할 수 있다. 이러한 점근적인 거동이 발생할 때에는 윤향층 상부의 유체층은 거의 고정되어 움직이지 않는다. 이것은 윗

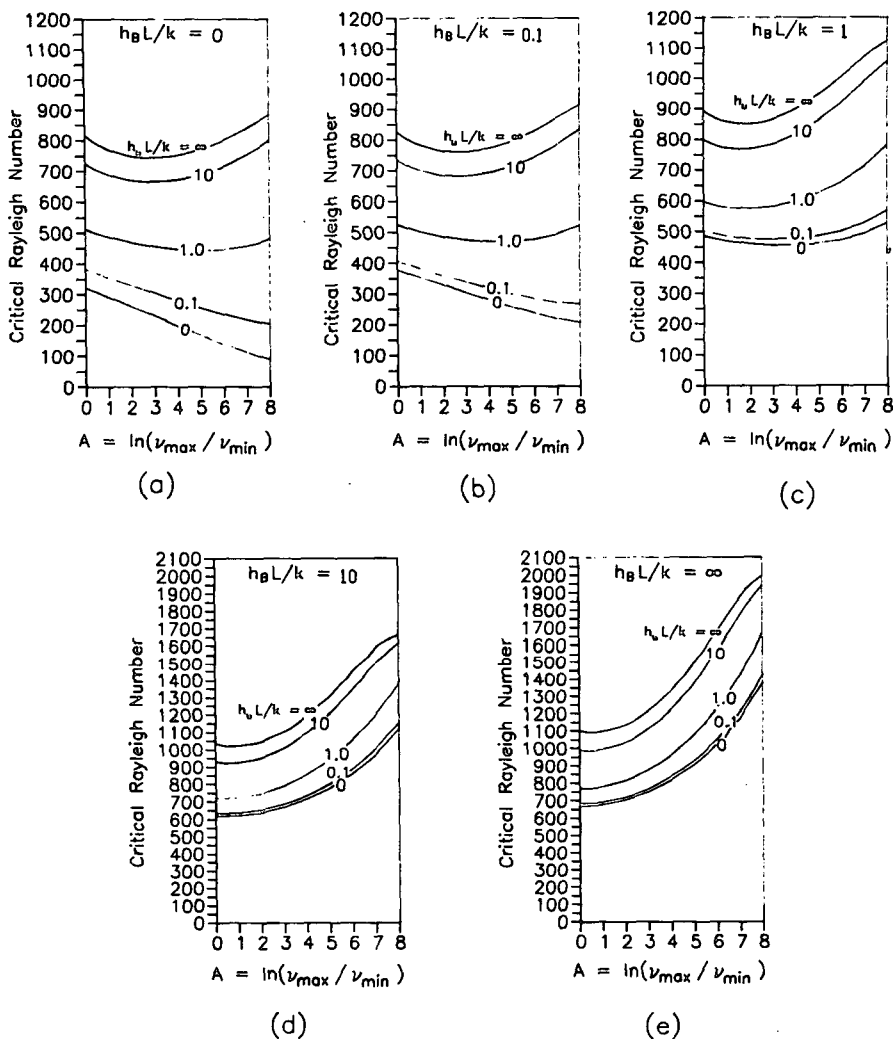


Fig. 4 The critical rayleigh number when the upper surface is free.

면이 자유 표면이더라도 실제 유체층의 입장에서선 윗면이 고정된 것과 같다. 따라서 점근적 거동에 있어서 윗면의 수력학적 경계 조건은 아무런 영향이 없다. 이 현상은 Stengel등<sup>(10)</sup>에 의하여 이미 확인되었으며 본 연구에서도 Fig. 5 및 Fig. 6에서  $A$ 가 매우 클 때에는 윗면이 자유 표면이건 고정되어 있건 똑같은 점근적 경향을 보이는 것으로부터 확인할 수 있다. 더우기 윗면의 비오수가 무엇이든 점근적 거동은 영향을 받지 않음이 확인되었다. 이러한 이유로 Fig. 5 및 Fig. 6에서는 윗면의 비오수가 무한대인 경우만 보였으며 이 결과는 윗면의 비오수가 아주 작은 경우에도 똑같이 된다고 볼 수

있다. 결과적으로, 점성비가  $10^4$  이상으로 커질 때 거의 움직이지 않는 고점성층의 수력학적, 열적 경계 조건은 그 거동에 영향이 없다고 할 수 있다. 한편 Fig. 5 및 Fig. 6에 보인 바 아랫면의 비오수는 그 임계 레일레이수 및 임계 파수에 많은 영향을 주고 있다. 즉  $A$ 가 매우 클 때에 아랫면의 비오수가 무한대에서 영으로 감소할 수록 단축 임계 레일레이수가 각각 27.1에서 12.6으로 감소하며 단축 임계 파수는  $\pi/8$  정도에서 0.23정도로 감소한다. 이 경향은 이미 앞에서  $A$ 가 작은 경우에서도 나타났고 또 물리적으로도 예상되었던 것이다. 다만 Stengel등<sup>(10)</sup>은 아랫면의 비오수가 무한대일때



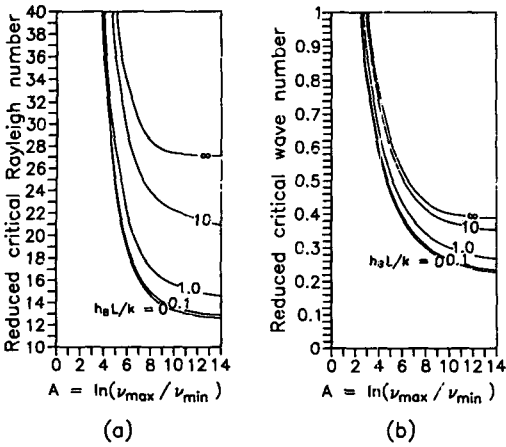


Fig. 5 Asymptotic behavior of the reduced critical rayleigh number and the reduced critical wave number when the upper surface is rigid.

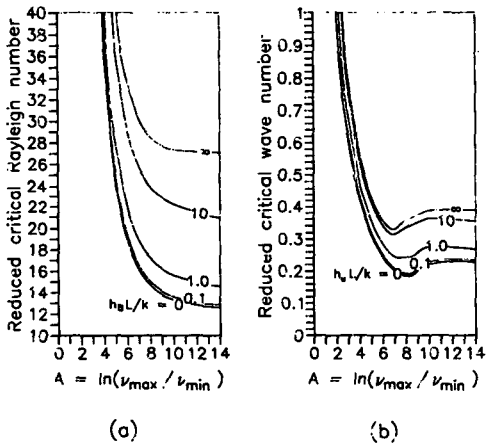


Fig. 6 Asymptotic behavior of the reduced critical rayleigh number and the reduced critical wave number when the upper surface is free.

단축 임계 레일레이수가 27.5로 접근한다고 계산하였는데 본 연구의 수치 27.1과의 차이는 미소하기는 하나 유효 숫자 오차의 탓으로 보이며 어느 계산 결과가 더 옳은지 판정하기는 어렵다.

끝으로 위 아랫면의 비오수가 모두 0일때 그 임계 파수는 A가 12보다 작은 구역에서는 0이다가 그이후는 돌발적으로 증가하여 윗면의 비오수에 관계가 없어지는 것을 확인할 수 있었다. 이것은 전혀 예측하지 못했던 현상으로 이와 같은 돌발적 현상이 나타날 즈음하여  $a$ 에 대한 임계 레일레이수 (즉 경계 조건의 행렬식을 영으로 만드는 레일레이

수)의 구배  $dRa_c/da$ 가  $a=0$ 에서 0으로 떨어지는 것을 관찰할 수 있다. 이로써 위의 현상은,  $a$ 와 임계 레일레이수의 상관 그래프의 오목점(concave point)의 이동에 따른 결과로 생각된다. 이 현상은 본 연구에서는 더 이상 깊이 연구하지 않았으나 흥미로운 사안이라 생각된다.

### 5. 결 론

상하면이 대류 전열 조건으로 주어지고 아랫면은 고정되어 있으며 윗면은 고정되어 있거나 자유 표면인 유체층의 점성이 온도에 대하여 지수적으로 변할 때의 베나드 대류의 선형 안정성을 고찰하였다. 이로부터 다음과 같은 결론들을 도출하였다.

- (1) 임계 레일레이수는 상하면의 비오수가 감소할수록 감소한다. 또한 윗면이 자유 표면일때보다 고정되어 있을 때 임계 레일레이수가 증가한다.
- (2) 임계 파수의 거동은 (1)항의 임계 레일레이수의 거동과 유사하다.
- (3) 점성비에 대한 임계 레일레이수의 변화는 다소 복잡하나 임계 레일레이수의 점성을 조화 평균 점성으로 취하면 점성비가 증가할 수록 항상 임계 레일레이수는 증가한다.
- (4) 점성비가 커질수록 점성이 낮은 쪽의 경계 조건이 점성이 높은 쪽의 경계 조건보다 더 큰 영향을 끼친다.
- (5) 점성비가 3,000을 넘어서면 유체층 하부의 유히층에서만 대류가 일어나기 시작하며 이때 그 점근적 거동은 아랫면의 비오수에만 의존한다.

### 참 고 문 헌

- (1) Pellew, A.R. and Southwell, R.V., 1940, "On Maintained Convective Motion in a Fluid Heated from Below", Proc. Roy. Soc., A., Vol.176, pp.312~343.
- (2) Sparrow, E.M., Goldstein, R.J. and Jonsson, V.K., 1964, "Thermal Instability in a Horizontal Layer : Effect of Boundary Conditions and Non-linear Temperature Profile", J. of Fluid Mechanics, Vol.18, pp. 513~528.
- (3) Yang, W. -M., 1990, "Thermal Instability of a Fluid Layer Induced by Radiation", Numerical Heat Transfer, A., Vol.17, pp.365~376.

- (4) Gardner, D.R., Douglass, R.W. and Trogdon, S.A., 1990, "Linear Stability of Natural Convection in Spherical Annuli", *J. of Fluid Mechanics*, Vol.21, pp. 105~129.
- (5) Maekawa, T. and Abe, K., 1991, "Onset of Natural Convection under Electric Field", *ASME/JSME Thermal Engineering Proc.*, Vol.1, pp.17~24.
- (6) Pearson, J.R.A., 1958, "On Convection Cells Induced by Surface Tension", *J. of Fluid Mechanics*, Vol.4, pp.489~500.
- (7) Chao, P., Churchill, S.W. and Ozoe, H., 1982, "The Dependence of the Critical Rayleigh Number on the Prandtl Number", *Convective Transport and Instability Phenomena* (Edited by Zierep, J. and Oertel, H., Jr.), G. Braun, Karlsruhe, pp 55~70.
- (8) Lee, H.R., Chen, T.S. and Armaly, B.F., 1990, "Non-parallel Thermal Instability of Forced Convection Flow over a Heated, Non-isothermal Horizontal Flat Plate", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.33, pp.2019~2028.
- (9) Hamouda, H. and Mollendorf, J.C., 1991, "Stability Analysis of Growing Horizontal Thermal Layer Subject to Sudden Bottom Heating", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.34, pp.505~512.
- (10) Stengel, K.C., Oliver, D.S. and Booker, J.R., 1982, "Onset of Convection in a Variable-Viscosity Fluid", *J. Fluid Mechanics*, Vol.120, pp.411~431.
- (11) Chen, Y. -M. and Pearlstein, A.J., 1988, "Onset of Convection in Variable-Viscosity Fluids : Assessment of Approximate Viscosity-Temperature Relations", *Phys. Fluids*, Vol.31, pp.1380~1385.
- (12) Fujimura, K. and Kelly, R.E., 1988, "Stability of Unstably Stratified shear Flow between Parallel Plates", *Fluid Dynamics Research*, Vol.2, pp. 281~292.